

ТЕЧЕНИЕ В ОДНОРОДНО РАСШИРЯЮЩЕМСЯ СЛОЕ И РАЗЛЕТ ГАЗОВОГО ОБЪЕМА В ПУСТОТУ

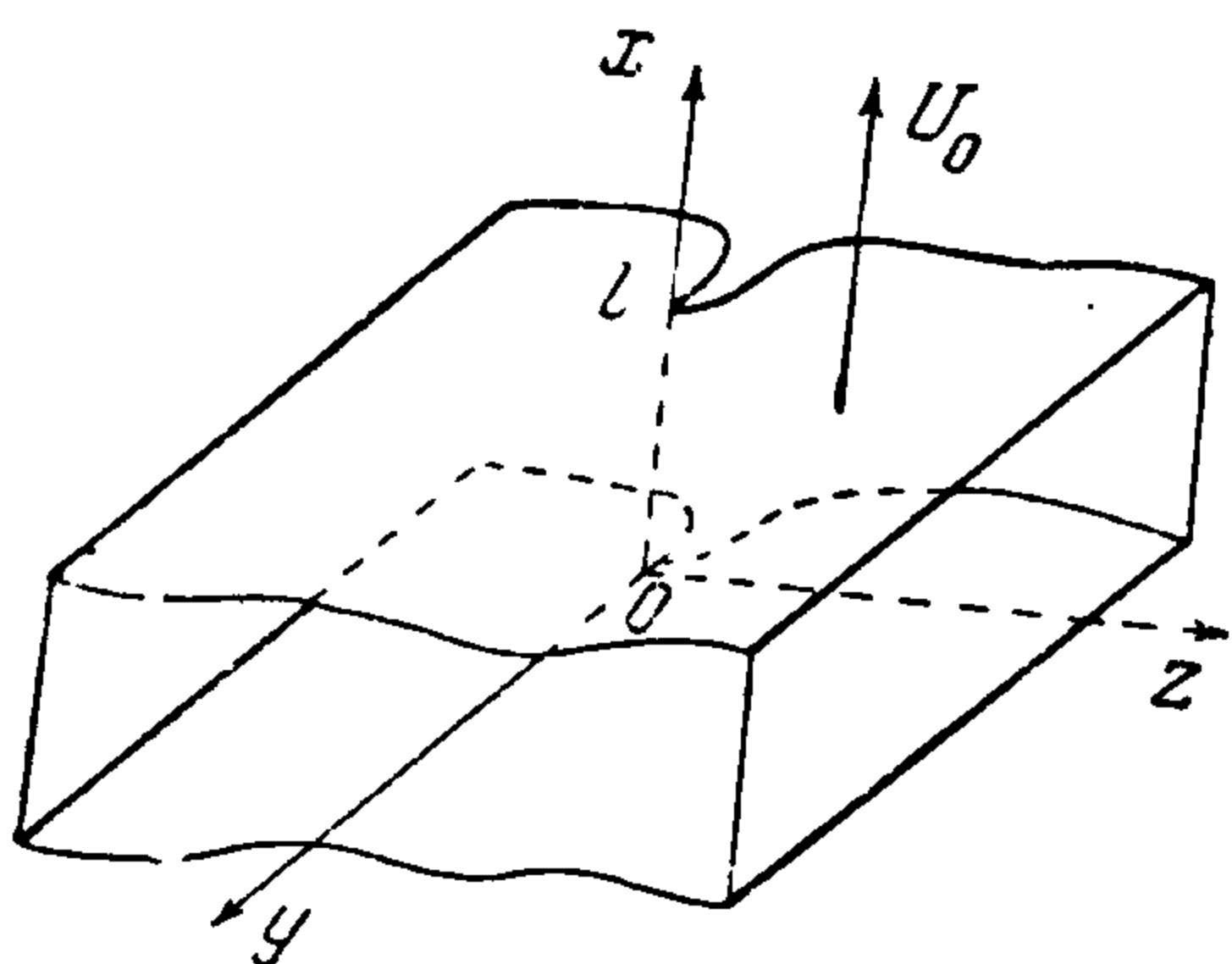
В. А. Смирнов
(Москва)

Предлагается приближенная схема однородно расширяющихся слоев, сводящая в определенных условиях задачи трехмерного неустановившегося течения к нескольким одномерным или плоским задачам.

Рассмотрим расширение в вакуум струй газа, в которых кинетическая энергия частиц велика по сравнению с внутренней энергией газа, заключенного в струе. Пусть первоначальное течение в струе одномерное (с плоскими или цилиндрическими волнами), и по длине струи имеется некоторое распределение скорости частиц, плотности и давления газа. При рассматриваемом соотношении энергий в струе последующее срабатывание давления до нуля мало изменит скорости частиц в направлении первоначального движения. Существенным будет лишь поперечный разлет струи. Естественно следующее упрощающее предположение: начиная с выбранного момента t_0 , частицы вдоль струи движутся по инерции, сохраняя каждая свою скорость.

В этом предположении последовательные слои частиц в струе не влияют друг на друга, движение в них независимо. Поэтому достаточно решить задачу о разлете газа в бесконечно тонком слое, вырезанном из струи. Давление и плотность поперек слоя будут выравниваться мгновенно, скорость поперек слоя будет распределена линейно. Такой слой является однородно расширяющимся.

1. Для плоского однородно расширяющегося слоя расположение осей координат дано на фиг. 1. Вследствие указанных предположений будет



Фиг. 1

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

Не ограничивая общности рассуждений, за одну из граничных плоскостей слоя можно принять неподвижную плоскость $x = 0$. Вторая плоскость пусть движется в направлении оси x со скоростью u_0 и при $t = 0$ занимает положение $x = l$. Частицы слоя, согласно сказанному, движутся вдоль оси x по инерции. Градиент скорости в направлении оси x будет

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_0}{l + u_0 t} = \frac{1}{t + \omega}, \quad \omega = \frac{l}{u_0} \quad (1.2)$$

Для скорости u движения частиц в слое получим выражение

$$u = \frac{x}{t + \omega} \quad (1.3)$$

Компонента u скорости, таким образом, заранее определена; поэтому уравнения трехмерного неустановившегося адиабатического течения газа существенно упростятся. Уравнения движения и условия адиабатичности будут такими, как для плоского течения газа (в плоскости yz):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.4)$$

а уравнение неразрывности будет отличаться от соответствующего уравнения в плоском течении лишь слагаемым, зависящим от времени

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{t + \omega} = 0 \quad (1.5)$$

Для цилиндрического однородно расширяющегося слоя расположение осей координат дано на фиг. 2. Поверхность внутреннего цилиндра имеет начальный радиус x_1 и расширяется со скоростью u_1 . Соответственно для внешнего цилиндра имеем x_2 и

u_2 . Рассмотрим только одномерные течения в слое, для которых скорость v направлена вдоль образующей цилиндра. Кроме того, ограничим закон расширения слоя требованием

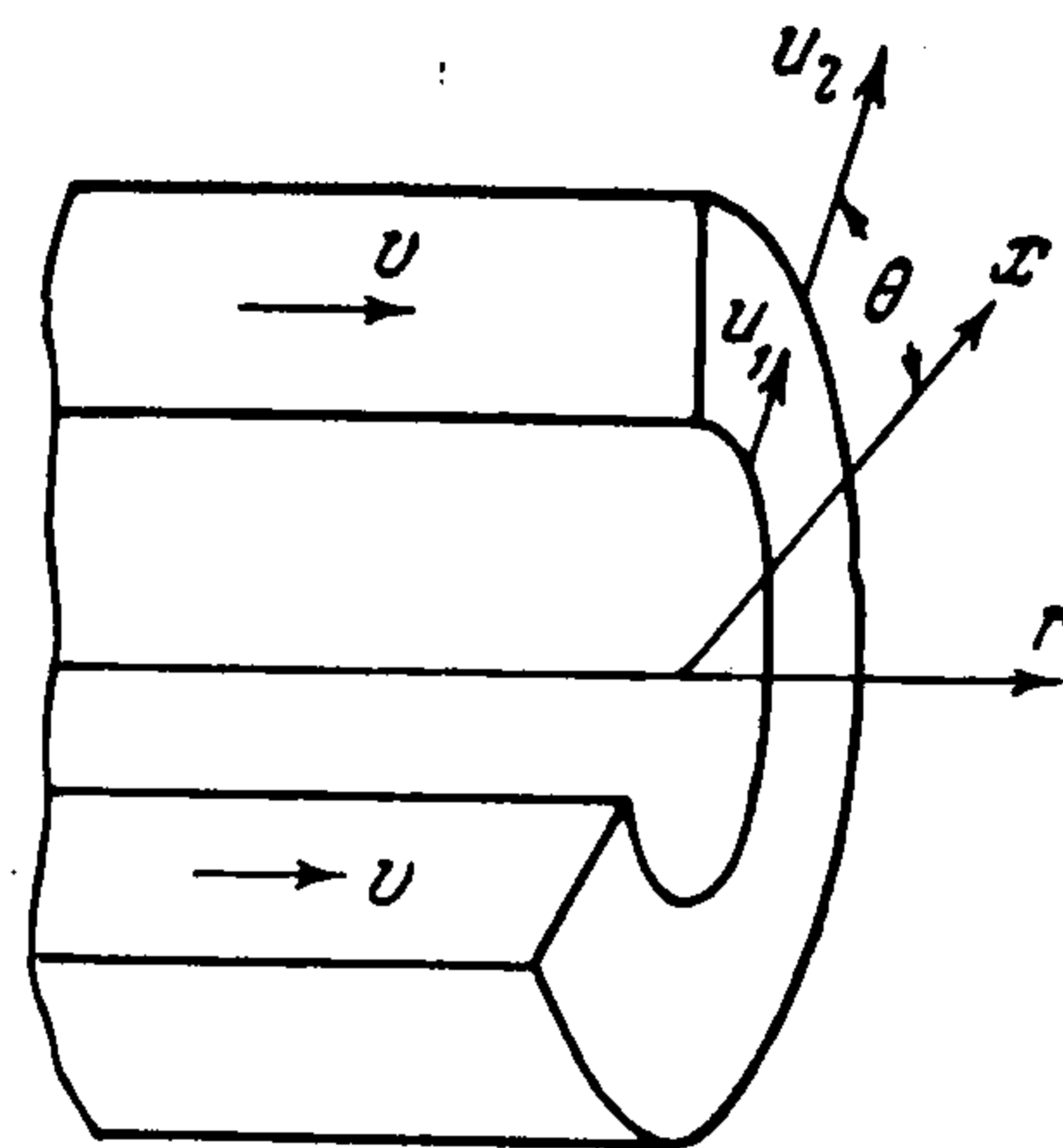
$$\frac{x_1}{u_1} = \frac{x_2}{u_2} = \frac{x_2 - x_1}{u_2 - u_1} = \omega \quad (1.6)$$

В цилиндрических координатах (x, θ, r) будет

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad (1.7)$$

Скорость u движения по инерции в цилиндрическом разлете, удовлетворяющая граничным условиям $u = u_1$ при $x = x_1 + u_1 t$, $u = u_2$ при $x = x_2 + u_2 t$ и требованию (1.6), определится формулой

$$u = \frac{x}{t + \omega} \quad (1.8)$$



Фиг. 2

Для одномерного течения вдоль оси r в однородно расширяющемся цилиндрическом слое уравнение движения и условие адиабатичности [будут такими же, как для течения с плоскими волнами, а уравнение неразрывности примет вид

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2}{t + \omega} = 0 \quad (1.9)$$

Уравнения одномерного адиабатического движения газа в однородно расширяющемся слое могут быть записаны в общем виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{\rho^\gamma} + v \frac{\partial}{\partial r} \frac{p}{\rho^\gamma} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + (v - 1) \frac{\rho v}{r} + \lambda \rho \frac{1}{t + \omega} &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь $\nu = 1, 2$ — для течений с плоскими и цилиндрическими волнами соответственно; $\lambda = 1, 2$ — для течений в плоском и цилиндрическом слоях.

Укажем следующие возможности решения полученных уравнений.

а) *Одноатомный газ*, $\gamma = 5/3$. Для этого случая в работах [1,2] найдено преобразование

$$\begin{aligned} \tau &= a - \frac{b^2}{t-d}, & \eta &= \frac{b}{t-d} y, & \zeta &= \frac{b}{t-d} z, & v' &= \frac{t-d}{b} v - \frac{y}{b} \\ w' &= \frac{t-d}{b} w - \frac{z}{b}, & \rho' &= \left(\frac{b}{t-d} \right)^3 \rho, & p' &= \left(\frac{b}{t-d} \right)^5 p \end{aligned} \quad (1.11)$$

являющееся инвариантным преобразованием для трехмерных неустановившихся течений газа. Нетрудно убедиться, что преобразование (1.11) при $d = -\omega$ переводит уравнения (1.4), (1.5) и уравнения (1.10) для $\nu = 1$, $\lambda = 2$ в уравнения плоского и одномерного течения газа соответственно.

Таким образом, преобразованием (1.11) любое решение для плоского неустановившегося течения газа при $\gamma = 5/3$ переводится в решение для однородно расширяющегося плоского слоя, а любое одномерное с плоскими волнами течение — в одномерное течение в цилиндрическом однородно расширяющемся слое.

б) *Течения со скоростью, пропорциональной координате* [3]. Как нетрудно проверить, точным решением уравнений (1.10), аналогичным решению Л. И. Седова [3], будет система функций

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt} r, & p &= [A + B\varphi(\mu r)] \frac{\mu^{\nu\gamma}}{(t + \omega)^{\lambda\gamma}} \\ \rho &= \frac{\mu^{\nu-1}}{r} (t + \omega)^{-\lambda} \varphi'(\mu r), & \mu' - \frac{2\mu^2}{\mu} &= B \frac{\mu^{3+\nu(\gamma-1)}}{(t + \omega)^{\lambda(\gamma-1)}} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь $\varphi(\mu r)$ — произвольная функция, A, B — произвольные постоянные. Решение (1.12) является частным случаем решения Л. В. Овсянникова [4], в котором компоненты скорости пропорциональны соответствующим координатам.

в) *Изотермическое течение газа*, $\gamma = 1$. Если в этом случае к уравнениям (1.4), (1.5) или (1.10) применить преобразование

$$p = p' (t + \omega)^{-\lambda}, \quad \rho = \rho' (t + \omega)^{-\lambda} \quad (1.13)$$

то эти уравнения перейдут в обычные уравнения плоского или одномерного изотермического течения газа.

Отметим, что в уравнениях (1.10) имеется параметр ω с размерностью времени, поэтому автомодельные течения газа не могут быть обобщены на случай однородно расширяющегося слоя.

2. Приведем решения для некоторых течений разлета газа в однородно расширяющемся слое.

Рассмотрим течение разлета, в котором скорость пропорциональна координате [3]. Для цилиндрической симметрии при $p / \rho^\gamma = \text{const}$ и при $\gamma = 5/3$ это решение будет [6]

$$v' = \frac{1}{R(\tau)} \frac{dR}{d\tau} r' = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{R^{4/3} - 1} \frac{1}{R^{5/3}} r', \quad \rho = \frac{1}{R^2(\tau)} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{3/2} \quad (2.1)$$

Здесь введены безразмерные переменные и функции ¹

$$\tau = \frac{c_1' t_0}{r_1'}, \quad r' = \frac{r_0'}{r_1'}, \quad v' = \frac{v_0'}{c_1'}, \quad \rho' = \frac{\rho_0'}{\rho_1'} \quad (2.2)$$

где c_1', ρ_1' — скорость звука и плотность при $\tau = 0$, $r' = 0$; r_1' — радиус занятого газом объема в момент $\tau = 0$. Знаки плюс и минус в (2.1) соответствуют разлету и слету. Зависимость $R(\tau)$ для $\gamma = 5/3$ дана в [5] (фиг. 102, $\nu = 2$). Некоторые значения R приведены ниже:

$\tau = 0$	0.04	0.17	0.45	0.6	1.0	2.0
$R = 1.0$	1.002	1.04	1.28	1.47	2.08	3.92

Введем безразмерные переменные для однородно расширяющегося слоя

$$t = \frac{c_1 t_0}{r_1}, \quad r = \frac{r_0}{r_1}, \quad v = \frac{v_0}{c_1}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{\rho_1} \quad (2.3)$$

Здесь c_1, ρ_1 — скорость звука и плотность при $t = 0$, $r = 0$; r_1 — радиус занятого газом объема при $t = 0$.

Формулы преобразования (1.11) для безразмерных переменных (2.2), (2.3) будут

$$\tau = a - \frac{b^2}{t+k}, \quad r' = \frac{b}{m} \frac{r}{t+k}, \quad v = \frac{mb}{t+k} v' + \frac{r}{t+k}, \quad \rho = \left(\frac{mb}{t+k}\right)^3 \rho' \quad (2.4)$$

Здесь $k = \omega c_1 / r_1$ — известная, а a, b, m — произвольные константы ².

Преобразованное для однородно расширяющегося слоя решение (2.1) будет

$$v(r, t) = \left[\frac{1}{t+k} \pm \left(\frac{b}{t+k}\right)^2 \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{R^{4/3} - 1}}{R^{5/3}} \right] r$$

$$\rho(r, t) = \left(\frac{mb}{t+k}\right)^3 \frac{1}{R^2} \left[1 - \frac{1}{m^2} \left(\frac{b}{t+k}\right)^2 \frac{r^2}{R^2} \right]^{3/2}, \quad R = R(\tau) = R\left(a - \frac{b^2}{t+k}\right) \quad (2.5)$$

¹ Здесь и далее индексом 0 отмечены размерные величины, входящие в (1.11).

² Если константы преобразования (1.11) отметить индексом 0, то будет

$$k = -\frac{c_1 d_0}{r_1}, \quad a = \frac{c_1'}{r_1'} a_0, \quad b = \left(\frac{c_1 c_1'}{r_1 r_1'}\right)^{1/2} b_0, \quad m = \left(\frac{r_1' c_1'}{r_1 c_1}\right)^{1/2}$$

Реально заданы могут быть лишь параметры $c_1, r_1, \omega = -d_0$ течения в однородно расширяющемся слое. Параметры исходного плоского течения c_1', r_1' , подвергающегося преобразованию, являются произвольными так же, как и параметры a_0, b_0 преобразования (1.11).

Рассмотрим в однородно расширяющемся слое решение, соответствующее начальным условиям

$$v(r, 0) = 0, \quad \rho(1, 0) = 0, \quad \rho(0, 0) = 1 \quad (2.6)$$

Первое из условий (2.6), согласно (2.5), будет

$$\pm \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{b^2}{k} \sqrt{R_0^{4/3} - 1} + R_0^{5/3} = 0, \quad R_0 = (R)_{t=0} = R \left(a - \frac{b^2}{k} \right) \quad (2.7)$$

Это условие может быть удовлетворено только при знаке (—) перед первым слагаемым. Следовательно, тот же знак нужно взять в формулах (2.1) и (2.5). Это значит, что исходное течение (2.1) представляет собой слет газа к оси симметрии.

Второе и третье условия (2.6) приводят к соотношениям

$$b^2 / m^2 k^2 R_0^2 = 1, \quad (mb / k)^3 = R_0^2 \quad (2.8)$$

Формулы (2.7), (2.8) определяют зависимости констант m , b , R_0 от параметра k в виде

$$m = \left(1 + \frac{2}{9k^2} \right)^{-1/3}, \quad b = k \left(1 + \frac{2}{9k^2} \right)^{5/6}, \quad R_0 = \left(1 + \frac{2}{9k^2} \right)^{3/4} \quad (2.9)$$

По зависимости $R(\tau)$ найдется [5] значение τ_0 , соответствующее R_0 , и значение ¹

$$a = \tau_0 + \frac{b^2}{k} = \tau_0 + k \left(1 + \frac{2}{9k^2} \right)^{5/4} \quad (2.10)$$

Ниже даны значения $a(k)$, вычисленные для $0 \leq k \leq 1.3$:

$k = 0$	0.05	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0	1.3
$a = -0.634$	-0.315	-0.17	0.013	0.154	0.4	0.95	1.27

Итак, течение разлета газа в однородно-расширяющемся плоском слое, удовлетворяющее начальным условиям (2.6), определяется формулами (2.5), где взят знак (—), $k = \omega c_1 / r_1$ и константы a , b , m заданы формулами (2.9), (2.10).

Одномерное течение с плоскими волнами при $p / \rho^\gamma = \text{const}$, $\gamma = 5/3$, в котором скорость пропорциональна координате, будет [3,6]

$$v' = \frac{1}{R_1(\tau)} \frac{dR_1}{d\tau} r' = -3 \frac{\sqrt{R_1^{2/3} - 1}}{R_1^{4/3}} r', \quad \rho' = \frac{1}{R_1(\tau)} \left(1 - \frac{r'^2}{R_1^2} \right)^{3/2} \quad (2.11)$$

Зависимость $R_1(\tau)$ для $\gamma = 5/3$ дана в [5] (фиг. 102, $\nu = 1$) и может быть выражена в виде [6]

$$\tau = \pm \frac{R_1^{2/3} + 2}{3} \sqrt{R_1^{2/3} - 1} \quad (2.12)$$

Имеют место формулы (2.2) — (2.4). Параметр

$$k = x_1 c_1 / r_1 v_1 = \omega c_1 / r_1 \quad (2.13)$$

Преобразованное для однородно-расширяющегося слоя решение (2.11) примет вид

$$v(r, t) = \left[\frac{1}{t+k} - \left(\frac{b}{t+k} \right)^2 \frac{3}{R_1^{4/3}} \sqrt{R_1^{2/3} - 1} \right] r \quad (2.14)$$

$$\rho(r, t) = \left(\frac{mb}{t+k} \right)^3 \frac{1}{R_1} \left[1 - \frac{1}{m^2} \left(\frac{b}{t+k} \right)^2 \frac{r^2}{R_1^2} \right]^{3/2}, \quad R_1 = R_1(\tau) = R_1 \left(a - \frac{b^2}{t+k} \right)$$

Рассмотрим в однородно расширяющемся слое решение, соответствующее начальным условиям

$$v(r, 0) = 0, \quad \rho(1, 0) = 0, \quad \rho(0, 0) = 1 \quad (2.15)$$

¹ Так как исходное течение есть слет, то значение τ_0 должно быть взято со знаком минус.

Согласно (2.14), эти условия будут соответственно

$$3b^2 \sqrt{R_{10}^{2/3} - 1} = kR_{10}^{4/3}, \quad b^2 = m^2 k^2 R_{10}^2, \quad m^3 b^3 = k^3 R_{10}$$

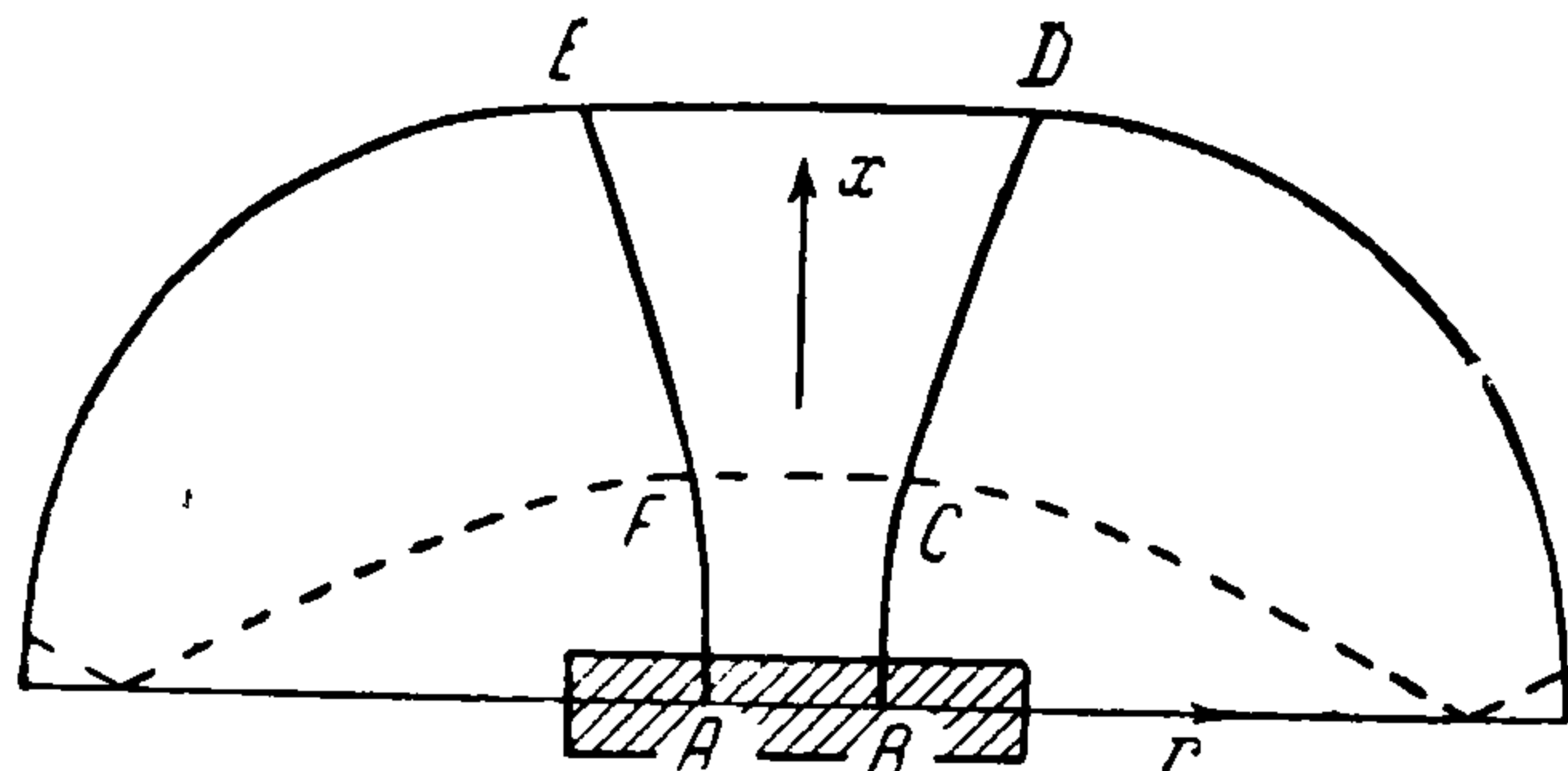
Эти формулы определяют зависимость констант m , b , R_{10} от параметра k

$$m = \left(1 + \frac{1}{9k^2}\right)^{-1/2}, \quad b = k \left(1 + \frac{1}{9k^2}\right), \quad R_{10} = \left(1 + \frac{1}{9k^2}\right)^{3/2} \quad (2.16)$$

В данном случае τ_0 явно выражается через R_{10} , согласно (2.12), и, следовательно, через k ; имеем

$$\tau_0 = a - \frac{b^2}{k} = -\frac{1}{3k} - \frac{1}{81k^3}$$

$$a(k) = k - \frac{1}{3k} \quad (2.17)$$



Фиг. 3

Таким образом, течение разлета газа в однородно расширяющемся цилиндрическом слое при $\gamma = 5/3$ и при начальных условиях (2.15) определяется формулами (2.14) и зависимостями (2.13), (2.16), (2.17).

3. Характерным свойством течений разлета в вакуум является быстрый переход потенциальной энергии газа в кинетическую энергию разлетающихся частиц.

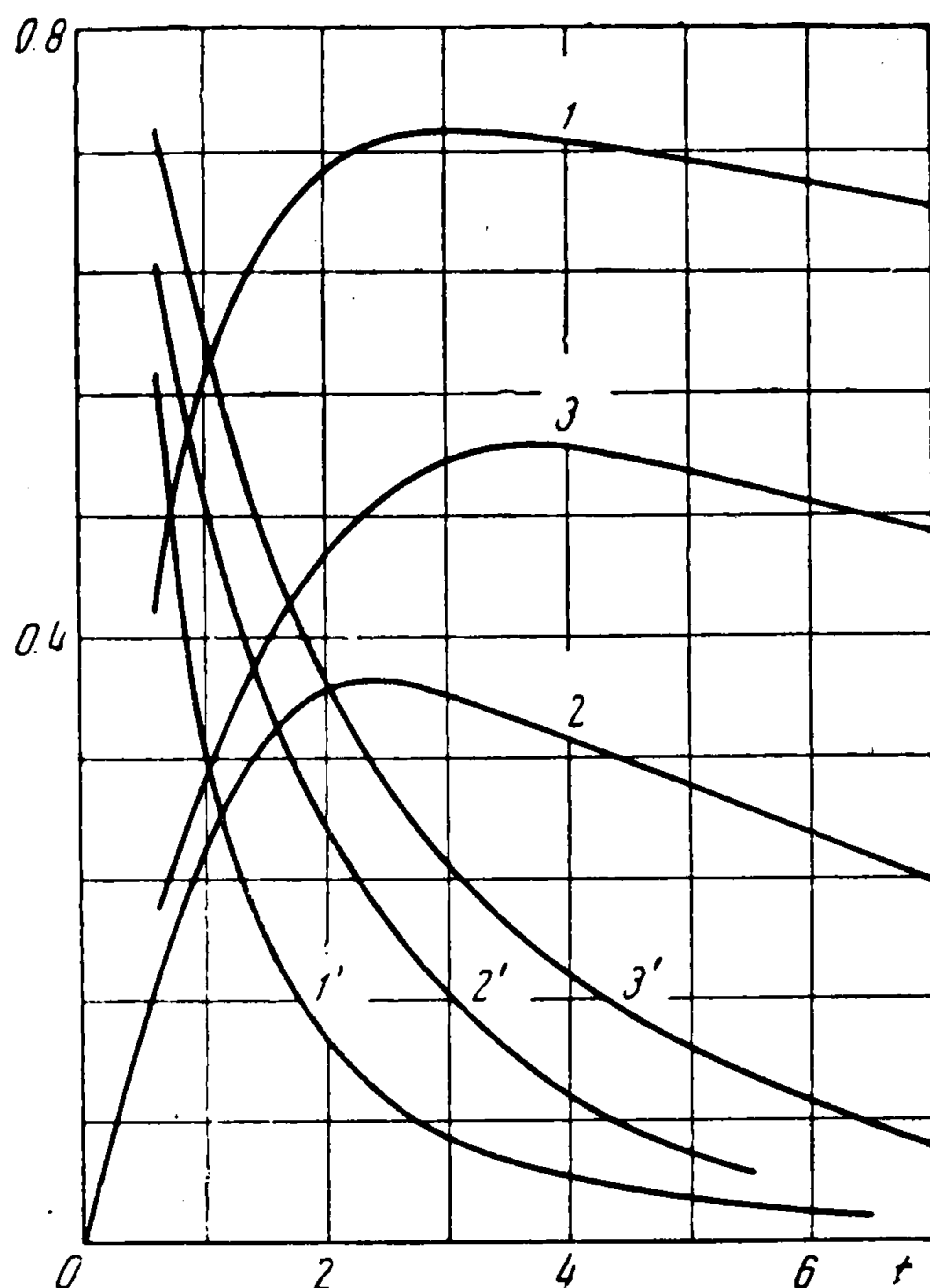
В то же время для многих несимметричных форм объемов начальные стадии разлета достаточно просты и могут быть рассчитаны. Так, если часть поверхности рассматриваемого объема есть плоскость (параллелепипед, диск, конечный конус и пр.), то начальной стадией разлета части объема, примыкающей к этой поверхности, будет одномерное, с плоскими волнами течение, размываемое в дальнейшем влиянием границ плоской части. Если часть поверхности есть круговой цилиндр или сфера, то начальная стадия разлета примыкающей к ней части объема будет соответствующим одномерным течением с цилиндрической или сферической симметрией.

На фиг. 3 представлена схема течения разлета в один из начальных моментов. Эта схема может трактоваться как верхняя половина течения либо в меридиональном сечении круглого диска, либо в диаметральном сечении кругового цилиндра. Штриховкой показан начальный объем, занятый газом.

Часть $ABDE$ течения представляет одномерную струю с плоскими волнами в случае диска и с цилиндрической симметрией в случае кругового цилиндра. Течение внутри $ABDE$ известно по имеющимся решениям одномерных задач о разлете в вакуум.

Легко также определяется для любого момента времени и форма границ AE и BD области, возмущенной влиянием краев диска или торцов цилиндра. В результате — для каждого момента времени может быть вычислена масса, кинетическая и внутренняя энергия газа, заключенного в одномерной струе.

Результаты расчетов для тонкого диска и для цилиндра с большим удлинением l при показателе адиабаты $\gamma = 5/3$ даны на фиг. 4. Кинетическая энергия (кривые 1,



Фиг. 4

2, 3) и внутренняя (кривые 1', 2', 3') отнесены к полной начальной энергии всего объема газа. Кривые 1 — цилиндр с удлинением $l = 5$, кривые 2 и 3 — диски с отношением диаметра к толщине, равным 7 и 15 соответственно. Безразмерное время t определено в виде

$$t = \frac{c_* t_0}{h} \quad (3.1)$$

где c_* — начальная скорость звука на оси или плоскости симметрии начального объема газа, $2h$ — толщина диска или диаметр цилиндра соответственно. Для диска взято однородное начальное распределение параметров газа в объеме, для цилиндра — распределение, дающее течение со скоростями, пропорциональными координате (так называемое автомоделное) [3-6].

Последнее обусловлено отсутствием аналитического решения для цилиндрического разлета при однородных начальных данных и оправдывается тем фактом [7], что при одномерном разлете в вакуум первоначально покоившихся объемов газа асимптотическое течение лишь незначительно зависит от начальных распределений и определяется полной энергией E , массой газа M и значениями энтропийной функции p / ρ^γ . Как отмечено выше, и как следует из фиг. 4, асимптотический характер одномерного течения достигается очень быстро. Поэтому с хорошей точностью можно заменять течения разлета при однородном начальном распределении параметров течениями при автомоделном начальном распределении, устанавливая соотношения между определяющими параметрами этих течений (характерные плотность, скорость звука, размер), исходя из равенства в них энергии, массы и энтропии.

Для течения с плоскими волнами при $\gamma = 5/3$ эти соотношения будут

$$r_1 = 1.29r_2, \quad c_1 = 1.095c_2, \quad \rho_1 = 1.315\rho_2 \quad (3.2)$$

Для течения с цилиндрической симметрией при $\gamma = 5/3$ получатся соотношения

$$r_1 = 1.228r_2, \quad c_1 = 1.181c_2, \quad \rho_1 = 1.652\rho_2 \quad (3.3)$$

Здесь нижними индексами 2 и 1 отмечены соответствующие параметры однородного распределения и начальные значения параметров на плоскости или оси симметрии объема при автомоделном распределении.

Расчет объемов, занятых одномерной и пространственной частями течения в сочетании с данными фиг. 4, показывает, что средняя плотность вещества и энергии в струях значительно больше, чем в остальной части пространства, занятого газом. Поэтому возникает мысль пренебречь веществом и энергией в пространственной части течения и схематизировать явление как разлет в вакуум одномерной струи, существующей в некоторый момент времени t_0 .

Из данных фиг. 4 следует, что, начиная с некоторого момента времени, кинетическая энергия в струе значительно превосходит внутреннюю энергию газа, энергию давлений. Но тогда расчет последующего расширения] в вакуум таких струй может быть проведен по изложенной выше схеме однородно расширяющихся слоев.

Пусть расчет разлета одномерной струи начинается в момент $T = t_0$ и координаты частиц в этот момент $x = \xi$. Все параметры одномерного течения в момент t_0 могут быть выражены по известным формулам через ξ и t_0 . В последующие моменты $t = T - t_0$, согласно сделанному предположению, скорость частиц в направлении оси Ox неизменна и, следовательно,

$$x = \xi + u(\xi, t_0) t \quad (3.4)$$

Из этого соотношения получится зависимость

$$\xi = \xi(x, t; t_0) \quad (3.5)$$

Поскольку рассматривается разлет в совокупности слоев, составляющих одномерное течение в момент t_0 , то все константы, входящие в решение (2.5), станут функциями ξ и, согласно (3.5), — функциями x и t . Нужно также перейти от безразмер-

ных переменных слоя (2.3) к безразмерным переменным диска

$$t = \frac{c_* t_0}{h}, \quad x = \frac{x_0}{h}, \quad r = \frac{r_0}{h}, \quad v = \frac{v_0}{c_*}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{\rho_*}, \quad c = \frac{c_0}{c_*} \quad (3.6)$$

Наконец, ввиду того что решение (2.5) соответствует не однородному, а автомодельному начальному распределению, нужно учесть множители перехода, следующие из соотношений (3.2), (3.3). Течение разлета в вакуум круглого диска определится системой функций

$$\begin{aligned} \rho(x, r, t) &= \left(\frac{mbr_1}{t + \omega} \right)^3 \frac{1}{R^2} \left[1 - \frac{1}{m^2 c_1^2} \left(\frac{b}{t + \omega} \right)^2 \frac{r^2}{R^2} \right]^{3/2} \\ v(x, r, t) &= \left[\frac{1}{t + \omega} - \frac{3}{\sqrt{2}} \left(\frac{b}{t + \omega} \right)^2 \frac{r_1}{c_1} \frac{\sqrt{R^{4/3} - 1}}{R^{5/3}} \right] r \\ u(x, t) &= \frac{(x - \xi)}{t}, \quad R = R \left(a - \frac{r_1}{c_1} \frac{b^2}{t + \omega} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь a, b, m , согласно (2.9), зависят от k , и, в свою очередь, k, r_1, c_1, ω есть функции $\xi = \xi(x, t; t_0)$ согласно (3.5).

Аналогичное решение для разлета в вакуум круглого цилиндра, полученное на основании (2.14) по схеме однородно расширяющихся слоев, будет:

$$\begin{aligned} \rho(x, r, t) &= \left(\frac{mbr_1}{t + \omega} \right)^3 \frac{1}{R_1} \left[1 - \frac{1}{m^2 c_1^2} \left(\frac{b}{t + \omega} \right)^2 \frac{r^2}{R_1^2} \right]^{3/2} \\ v(x, r, t) &= \left[\frac{1}{t + \omega} - 3 \left(\frac{b}{t + \omega} \right)^2 \frac{r_1}{c_1} \frac{\sqrt{R_1^{2/3} - 1}}{R_1^{4/3}} \right] r \\ u(x, t) &= \frac{x}{t + \omega}, \quad R_1(\tau) = R_1 \left(a - \frac{r_1}{c_1} \frac{b^2}{t + \omega} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Зависимости r_1, c_1, ω и компоненты скорости u от $\xi(x, t; t_0)$ определяются по известным решениям для соответствующих одномерных течений и могут быть значительно упрощены подходящими аппроксимациями.

Выбор моментов t_0 , с которых начинается расчет поперечного разлета струи, ограничен довольно узким диапазоном значений (фиг. 4), для которых, с одной стороны, в одномерной части течения сохранена возможно большая часть общей массы и энергии, и с другой — потенциальная энергия газа достаточно мала по сравнению с его кинетической энергией. Этот диапазон расположен вправо от значения t_* , при котором кинетическая энергия достигает максимума.

Исходя из того, что истинное расширение одномерной струи происходит в область пространственного течения с некоторой плотностью (отброшенной в изложенной схеме), можно ожидать, что решения, получаемые при $t > t_*$, дают оценку снизу для истинного асимптотического распределения плотности газа.

Поступила I XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
2. Никольский А. А. Инвариантное преобразование уравнений движения идеального одноатомного газа и новые классы их точных решений. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
3. Седов Л. И. Об интегрировании уравнений одномерного движения газа. Докл. АН СССР, 1953, т. 90, № 5.
4. Овсянников Л. В. Новое решение уравнений гидродинамики. Докл. АН СССР, 1956, т. 111, № 1.
5. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1957.
6. M i g e l s H., M u l l e n T. F. Expansion of gas clouds and hypersonic jets bounded by a vacuum A. I. A. A. Journ., 1963, vol. 1, No. 3.
7. Фонарев А. С. Нестационарное расширение газа в вакуум при различных законах и длительности выделения энергии. Инж. ж., 1965, № 1.