О ДВИЖЕНИИ ТОНКОГО СЛОЯ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ ПО ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

А. П. Фролов (Москва)

1. Потенциальное движение идеальной невесомой жидкости, распространяющееся по поверхности твердого тела тонким слоем, изучалось в работах [1,2]. Уравнения плоскопараллельного течения слабоискривленной струи тяжелой жидкости рассматриваемого типа имеют вид [3]

$$v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} + v_r \frac{\partial v_s}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - g\frac{dy}{ds}, \qquad -k(s)\, v_s^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + g\frac{dx}{ds}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\partial v_r}{\partial r} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь v_s, v_r — составляющие скорости жидкости по осям вспомогательной криволинейной системы координат s, r, в которой r отсчитывается по нормали к обтекаемой поверхности, а s — длина дуги направляющей L_1 цилиндрической поверхности твердого тела, p, ρ — соответственно давление и плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, направленное против оси y основной прямоугольной системы координат, $x = x(s)$, $y = y(s)$ — уравнения L_1, $k(s)$ — кривизна L_1.

Перенося начало отсчета r на свободную линию тока L_θ, имеем при $r = 0$

$$v_s = v_0(s), \qquad v_r = 0, \qquad p = p_\theta = \text{const} \tag{1.2}$$

На основании интеграла Бернулли при установившемся движении имеем $v_0^2(s) = c_\theta - 2gy(s)$. Толщину струи $h(s)$, измеряемую по нормали к поверхности твердого тела, будем считать малой первого порядка.

Поэтому скорость v_s можно представить в виде

$$v_s(s, r) = v_0(s) + u(s, r) \tag{1.3}$$

где $u(s, r)$ — величина первого порядка малости. Подставим (1.3) во второе уравнение системы (1.1) и, учитывая, что кривизна струи $k(s)$ также является малой первого порядка, опустим члены второго и выше порядка малости

$$k(s)\, v_0^2(s) + g\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

Отсюда, принимая во внимание условия (1.2), получаем давление в струе

$$p = \rho\left[k(s)\, v_0^2(s) + g\frac{dx}{ds}\right] r + p_0 \tag{1.4}$$

Исключая при помощи (1.4) давление p из первого уравнения системы (1.1) и вводя, как обычно, функцию тока $\psi(s, r)$ соотношениями

$$v_s = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \qquad v_r = -\frac{\partial \psi}{\partial s}$$

получим для определения функции тока нелинейное уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r\, \partial s} - \frac{\partial \psi}{\partial s}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{d}{ds}\left[k(s)\, v_0^2(s) + g\frac{dx}{ds}\right] r + g\frac{dy}{ds} = 0 \tag{1.5}$$

В соответствии с (1.3) функцию тока $\psi(s, r)$ можно представить в виде

$$\psi(s, r) = \psi_0(s, r) + \psi_1(s, r) \tag{1.6}$$

где $\psi_\theta = r v_\theta(s)$, а функция $\psi_1(s, r)$ на порядок меньше $\psi_0(s, r)$. Опуская в уравнении (1.5) члены, содержащие произведения производных функции $\psi_1(s, r)$, получим линейное уравнение

$$v_0(s)\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r\, \partial s} + \frac{dv_0}{ds}\frac{\partial \psi_1}{\partial r} - r\frac{dv_0}{ds}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + r\frac{d}{ds}\left[k(s)\, v_0^2(s) + g\frac{dx}{ds}\right] = 0 \tag{1.7}$$

Решением уравнения (1.7), удовлетворяющим условиям (1.2), будет функция

$$\psi_1(s, r) = r^2 f(s), \qquad \frac{df}{ds} = -\frac{1}{2v_0(s)}\frac{d}{ds}\left[k(s)\, v_0^2(s) + g\frac{dx}{ds}\right] \tag{1.8}$$

Таким образом, функция тока слабоискривленной струи тяжелой жидкости с принятой степенью точности имеет вид

$$\psi(s, r) = rv_0(s) - r^2\left(\int \frac{d}{ds}\left[v_0^2(s)\,k(s) + g\frac{dx}{ds}\right]\frac{ds}{2v_0(s)} + c_1\right) \tag{1.9}$$

Для определения постоянной c_1 необходимо задать в начальном сечении $s = s_0$ скорости v_s, v_r и давление p в виде

$$v_r = \alpha r + \beta r^2, \qquad v_s = v_0(s_0) + \delta r, \qquad p = p_0 + \lambda r \qquad (\alpha, \beta, \delta, \lambda - \text{const})$$

где α, β, λ однозначно определяются геометрическими свойствами обтекаемой поверхности в точке $s = s_0$, а $\delta = c_1$. Толщина струи определяется из условия $\psi(s, h) = Q$, где Q — расход жидкости в струе, так как L_1 — линия тока.

2. Используем полученные соотношения при решении задачи об отыскании формы струи тяжелой жидкости по заданному распределению давлений p_1 на линии тока L_1. Определяя толщину струи $h(s)$ в первом приближении [1] по скорости $v_0(s)$, получим из (1.4) уравнение для определения формы струи

$$k(s)\,v_0^2(s) + g\frac{dx}{ds} = \frac{v_0(s)\,\Delta p}{Q} \qquad (\Delta p = p_1 - p_0) \tag{2.1}$$

Пусть p_1 явная функция $y(s)$, т. е. $p_1 = p_1(y)$. Известно [4], что

$$k(s) = \frac{d^2y}{ds^2}\left[1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]^{-1/2}, \qquad dx^2 + dy^2 = ds^2 \tag{2.2}$$

Поэтому, полагая $dy\,/\,ds = B(y)$, из (2.1) получим

$$-(c_0 - 2gy)\frac{d}{dy}\sqrt{1 - B^2} + g\sqrt{1 - B^2} = \frac{\Delta p(y)}{Q}\sqrt{c_0 - 2gy} \tag{2.3}$$

Отсюда

$$1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \frac{J^2(y)}{c_0 - 2gy} \qquad \left(J(y) = \int \frac{\Delta p(y)}{Q}\,dy + c_2\right) \tag{2.4}$$

Исключая при помощи (2.2) длину дуги, получим для отыскания уравнения траектории струи двойную квадратуру

$$x = \int \frac{J(y)\,dy}{[c_0 - 2gy - J^2(y)]^{1/2}} + c_3 \tag{2.5}$$

Постоянные c_2 и c_3 определяются заданием начальной точки $y(x_0)$ и начального наклона струи $y'(x_0)$. Рассмотрим частные случаи.

(а) Пусть $\Delta p = 0$, $p_1 = p_0$. Траекторией свободнопадающей струи будет парабола

$$2gy = (c_0 - c_2^2) - \frac{4g^2(x - c_3)^2}{c_2^2}$$

(б) В случае удара струи тяжелой жидкости о поверхность покоящейся тяжелой жидкости с удельным весом γ, когда на границе струи и покоящейся жидкости наблюдается контактный разрыв скоростей, а давление можно положить равным гидростатическому $\Delta p =$ траектория струи определится квадратурой

$$x = \int \frac{(^1/_2\gamma Q^{-1}y^2 + c_2)\,dy}{[c_0 - 2gy - (^1/_2\,\gamma Q^{-1}y^2 + c_2)^2]^{1/2}} + c_3 \tag{2.6}$$

Поступила 30 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. Приближенный расчет струйного потенциального течения жидкости, распространяющегося по поверхности твердого тела тонким слоем. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2.
2. Volterra V. Sur les jets liquides. J. Math. Pures et Appl. 1932, 9 S., t. 11, No 1.
3. Фролов А. П. Плоская слабоискривленная струя идеальной несжимаемой жидкости, ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
4. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии, Гостехиздат, 1950.