ОДНА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В. В. Гурецкий, Б. С. Фертман

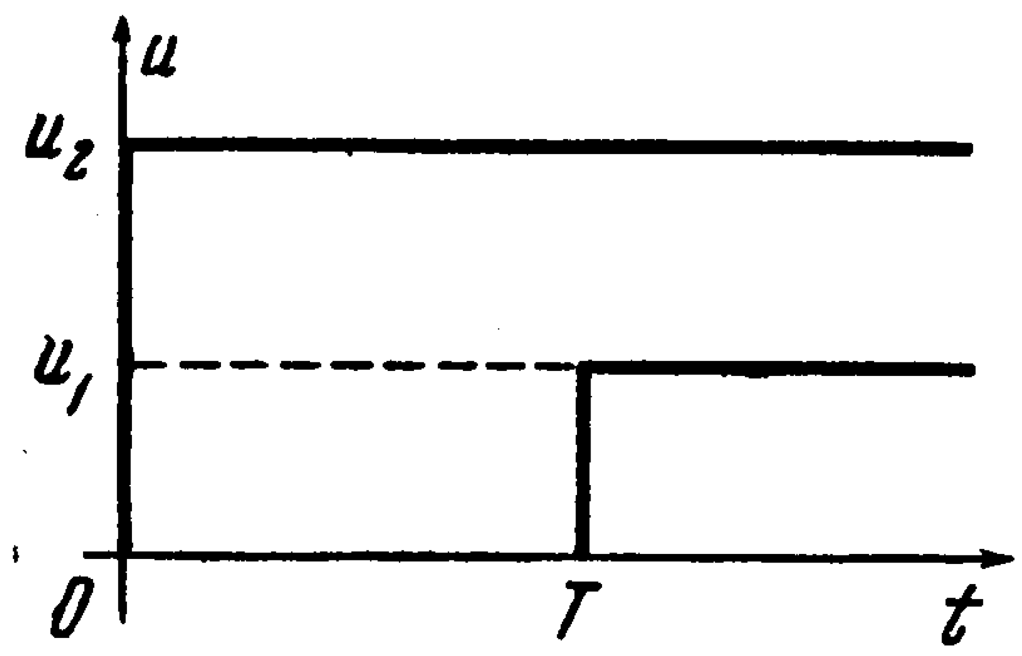
(Ленинград)

1. Рассматривается система управления (фиг. 1)

$$x^{\cdot\cdot} = u(t), \qquad x(0) = x^{\cdot}(0) = 0 \tag{1.1}$$

$$0 \leqslant u(t) \leqslant u_2 \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \qquad u_1 \leqslant u(t) \leqslant u_2 \quad (t > T) \tag{1.2}$$

Момент времени $t = T$ фиксирован. Произвольную кусочно-непрерывную функцию $u(t)$, удовлетворяющую ограничениям (1.2) и имеющую конечное число разрывов первого рода на любом отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, назовем допустимым управлением. Возникает следующая вариационная задача: найти управление $u = u_*(t)$, принадлежащее классу допустимых управлений и обеспечивающее отработку системой заданного значения координаты $x = x_*$ с минимальной скоростью. Искомое управление $u = u_*(t)$ назовем оптимальным.



Фиг. 1

Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(t) = \int_0^t u(t)\,dt \tag{1.3}$$

Заметим, что, в силу (1.2), наибольшая ордината $\varphi(t)$ на произвольном отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ равна

$$\max_t \varphi(t) = \varphi(t_2) \qquad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2) \tag{1.4}$$

Поэтому исходную задачу можно сформулировать в следующем эквивалентном виде: среди всех кривых $\varphi(t)$ с производной $\varphi^{\cdot}(t)$, удовлетворяющей соотношениям

$$0 \leqslant \varphi^{\cdot}(t) \leqslant u_2 \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \qquad u_1 \leqslant \varphi^{\cdot}(t) \leqslant u_2 \quad (t > T) \tag{1.5}$$

выбрать ту кривую $\varphi = \varphi_*(t)$, ордината которой в момент $t = t_*$, определяемый из условия

$$\int_0^{t_*} \varphi_*(t)\,dt = x_* \tag{1.6}$$

принимает наименьшее возможное значение.

Обозначим через Φ множество кривых (1.3), удовлетворяющих условиям (1.5) и (1.6). Выделим из Φ подмножество Ψ непрерывных ломаных $\psi(\tau, t)$, каждая из которых зависит от параметра τ

$$\psi(\tau, t) = \begin{cases} u_2 t & (0 \leqslant t \leqslant \tau) \\ u_2\tau & (\tau \leqslant t \leqslant T) \\ u_2\tau + u_1(t - T) & (T \leqslant t \leqslant t_*) \end{cases} \tag{1.7}$$

где для любого $\tau < T$ момент времени $t = t_*$ определяется из условия

$$\int_0^{t_*} \psi(\tau, t)\,dt = x_* \tag{1.8}$$

Покажем, что при выполнении соотношения

$$t_* \geqslant T \tag{1.9}$$

функция

$$\varphi_*(t) = \int_0^t u_*(t)\,dt \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_*) \tag{1.10}$$

где $u_*(t)$ — оптимальное управление, а момент $t = t_*$ определяется по уравнению

(1.6), принадлежит множеству Ψ. В самом деле, пусть некоторая кривая $\varphi^\circ(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t^\circ \geqslant T$, где

$$\int\limits_0^{t^\circ} \varphi^\circ(t)\,dt = x_* \tag{1.11}$$

будучи решением поставленной задачи, не принадлежит множеству Ψ. Проведем через точку кривой $\varphi^\circ(t)$ с абсциссой $t = t^\circ$ ломаную $\psi\ (\tau_1,\ t)$, параметр которой τ_1 определится единственным образом (фиг. 2). Если при этом $\varphi^\circ(t) \not\equiv \psi\ (\tau_1, t)$, $0 \leqslant t \leqslant t^\circ$, что и будем предполагать, то для ординат рассматриваемых кривых, в силу условий (1.5) и (1.7), выполняются очевидные соотношения

$$\psi(\tau_1, t) \geqslant \varphi^\circ(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant t^\circ), \qquad \int\limits_0^{t^\circ} \psi(\tau_1, t)\,dt > x_* \tag{1.12}$$

Отсюда следует, что может быть построена ломаная $\psi\ (\tau_2,\ t)$, $0 \leqslant t \leqslant t^\circ$, с параметром $\tau_2 < \tau_1$, определяемым из условия

$$\int\limits_0^{t^\circ} \psi(\tau_2, t)\,dt = x_* \tag{1.13}$$

ордината которой при $t = t^\circ$ меньше значения $\varphi^\circ(t^\circ)$, что противоречит принятому условию оптимальности $\varphi^\circ(t)$. Таким образом, исходная вариационная проблема свелась (при выполнении неравенства (1.9)) к задаче нахождения минимума функции

$$\psi\ (\tau,\ t_*) = u_2\tau + u_1(t_* - T) \tag{1.14}$$

переменных τ и t_*, связанных соотношением

$$\chi\ (\tau,\ t_*) = u_2\tau t_* - {}^1/_2 u_2\tau^2 + {}^1/_2 u_1 (t_* - T)^2 - x_* = 0 \tag{1.15}$$

Искомые значения τ и t_* определяются из системы уравнений

$$\partial F / \partial\tau = 0, \qquad \partial F / \partial t_* \tag{1.16}$$

и уравнения (1.15), где

$$F\ (\tau,\ t_*,\ \lambda) = \psi\ (\tau,\ t_*) + \lambda\chi\ (\tau,\ t_*) \tag{1.17}$$

(λ — множитель связи). После выполнения необходимых преобразований получим

$$\tau = \frac{u_1}{u_1 + u_2}T, \qquad t_* = \frac{u_1}{u_1 + u_2}T + \left[\frac{2x_*}{u_1} - \frac{u_2}{u_1 + u_2}T^2\right]^{1/2} \tag{1.18}$$

Из последней формулы следует, что соотношение (1.9) имеет место лишь при выполнении условия

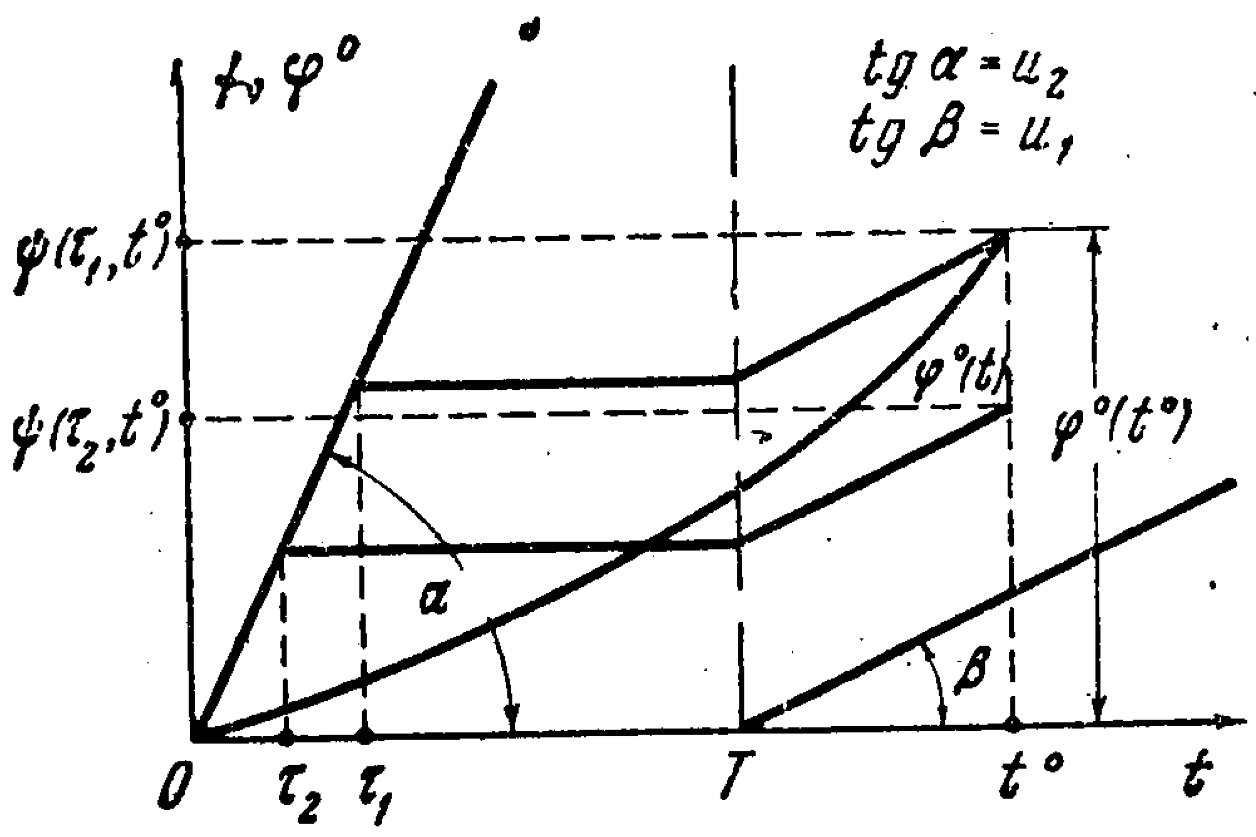
$$\left[\frac{2x_*}{u_1} - \frac{u_2}{u_1 + u_2}T^2\right]^{1/2} \geqslant \frac{u_2}{u_1 + u_2}T \tag{1.19}$$

принимающего после преобразований вид

$$x_* \geqslant \frac{1 + 2u_2 / u_1}{(1 + u_2 / u_1)^2}\,\frac{u_2 T^2}{2} \tag{1.20}$$

При выполнении соотношения (1.20) оптимальное управление $u_*(t)$ имеет следующий закон изменения:

$$u_*(t) = \begin{cases} u_2 & (0 \leqslant t \leqslant \tau) \\ 0 & (\tau < t \leqslant T) \\ u_1 & (T < t \leqslant t_*) \end{cases} \tag{1.21}$$



Фиг. 2

где значения τ и t_* определяются формулами (1.18). Скорость отработки координаты x_* равна

$$\min_u \max_t x^\cdot(t) = \psi(\tau, t_*) = u_1\left[\frac{2x_*}{u_1} - \frac{u_2}{u_1 + u_2}T^2\right]^{1/2} \tag{1.22}$$

Покажем теперь необходимость выполнения соотношения (1.9) для функции (1.10). В самом деле, предположим, что для кривой $\varphi_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, являющейся решением исходной задачи, момент времени $t = t_0$, вычисленный по формуле

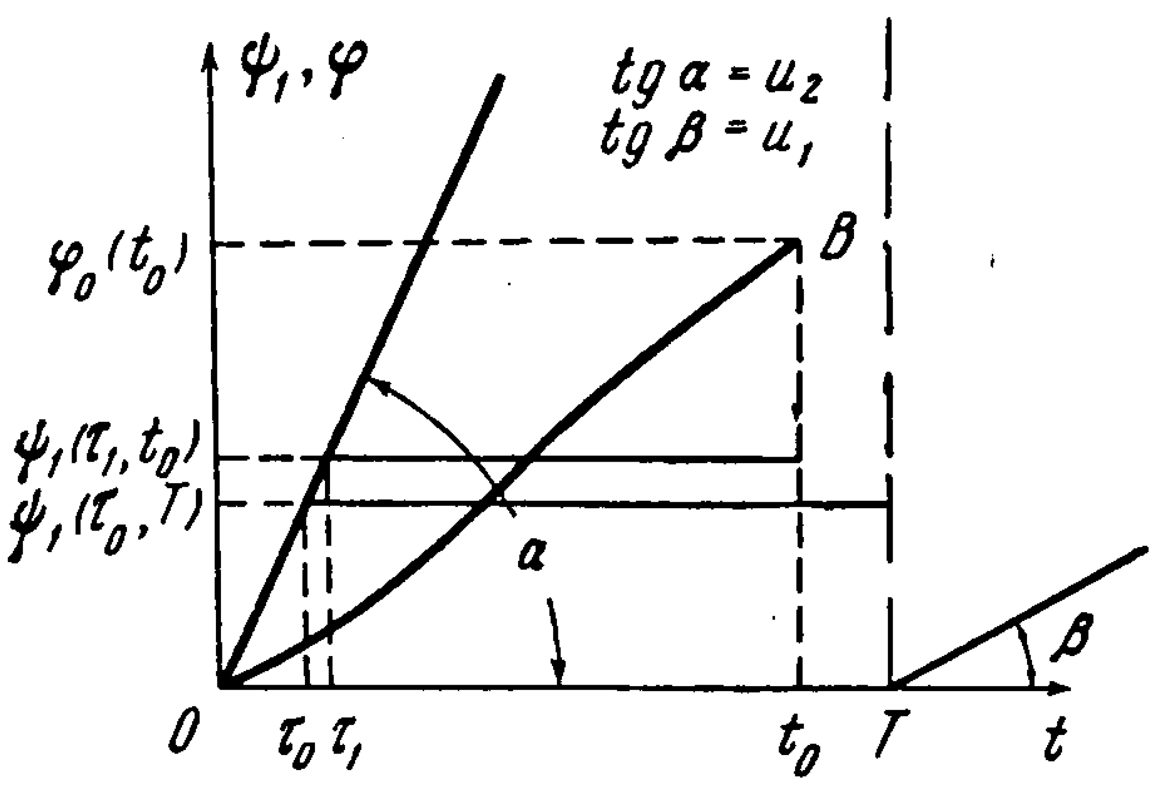
$$\int_0^{t_0} \varphi_0(t)\,dt = x_* \tag{1.23}$$

удовлетворяет неравенству $t_0 < T$. Обозначим через B (фиг. 3) точку кривой $\varphi_0(t)$, соответствующую моменту $t = t_0$, и проведем через B ломаную

$$\psi_0(\tau, t) = \begin{cases} u_2 t & (0 \leqslant t \leqslant \tau) \\ u_2\tau & (\tau \leqslant t \leqslant t_0) \end{cases} \tag{1.24}$$

с параметром $\tau = \tau_1$, определяемым однозначно. Если при этом $\psi_0(\tau_1, t) \not\equiv \varphi_0(t)$, то, в силу (1.5) и (1.24), выполняются соотношения (1.12), в которых $\psi(\tau_1, t)$, $\varphi^0(t)$ и t° следует заменить соответственно на $\psi_0(\tau_1, t)$, $\varphi_0(t)$ и t_0. Следовательно, может быть построена кривая $\psi_0(\tau_2, t)$ с параметром $\tau_2 < \tau_1$, удовлетворяющим уравнению (1.13) (где $\psi(\tau_2, t)$ и t° заменяются на $\psi_0(\tau_2, t)$ и t_0), ордината которой при $t = t_0$ меньше $\psi_0(\tau_1, t_0)$. Более того, в этом случае (а также в случае, если $\psi_0(\tau_1, t) \equiv \varphi_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$) может быть построена ломаная $\psi_0(\tau_0, t)$, параметр которой $\tau_0 < \tau_2$ определяется из условия

$$\int_0^{T} \psi_0(\tau_0, t)\,dt = x_* \tag{1.25}$$



Фиг. 3

Из построения следует, что максимальная ордината

$$\psi_0(\tau_0, T) = u_2\tau_0 \tag{1.26}$$

кривой $\psi_0(\tau_0, t)$ меньше значений $\varphi_0(t_0)$ и $\psi_0(\tau_2, t)$, что противоречит условию оптимальности $\varphi_0(t)$ и одновременно доказывает необходимость выполнения неравенства (1.9). Из сказанного следует также способ построения оптимального управления в случае, когда

$$x_* \leqslant \frac{1 + 2u_2/u_1}{(1 + u_2/u_1)^2}\frac{u_2T^2}{2} \tag{1.27}$$

т. е. когда формулы (1.18) противоречат условию (1.9). Именно, при выполнении соотношения (1.27) оптимальное управление $u = u_*(t)$ определяется функцией $\psi_0(\tau_0, t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, и имеет вид

$$u_*(t) = u_2 \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau_0), \qquad u_*(t) = 0 \quad (\tau_0 < t \leqslant T) \tag{1.28}$$

где момент переключения τ_0 вычисляется по формуле

$$\tau_0 = T - [T^2 - 2x_*/u_2]^{1/2} \tag{1.29}$$

получаемой при подстановке в (1.25) функции $\psi_0(\tau_0, t)$.

Скорость отработки координаты x_* равна

$$\min\nolimits_u \max\nolimits_t x^\circ(t) = u_2\tau_0 = u_2\{T - [T^2 - 2x_*/u_2]^{1/2}\} \tag{1.30}$$

причем отработка координаты x_* происходит в момент $t = T$. Непосредственно проверяется, что при

$$x_* = \frac{1 + 2u_2/u_1}{(1 + u_2/u_1)^2}\frac{u_2T^2}{2} \tag{1.31}$$

значения моментов переключения управления и скорости отработки координаты x_*, вычисляемые по формулам (1.18) и (1.29), (1.22) и (1.30), полностью совпадают.

2. Рассмотрим решение поставленной выше задачи при дополнительном условии неубывания оптимального управления при $t \geqslant 0$. В этом случае введем множество Ψ_1 (фиг. 3) непрерывных ломаных $\psi_1(U, t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_*$, с параметром U

$$\psi_1'(U, t) = \begin{cases} Ut & (0 \leqslant t \leqslant T) \\ UT + u_1(t - T) & (T \leqslant t \leqslant t_*) \end{cases} \tag{2.1}$$

где $0 \leqslant U \leqslant u_2$, а момент t_* определяется из условия

$$\int_0^{t_*} \psi_1(U, t)\, dt = x_* \tag{2.2}$$

Покажем, повторяя рассуждения п. 1, что при выполнении соотношения

$$t_* \geqslant T \tag{2.3}$$

функция (1.10) принадлежит множеству Ψ_1, так что исходная вариационная задача сводится к отысканию минимума функции

$$\psi_1(U, t_*) = UT + u_1(t_* - T) \tag{2.4}$$

переменных U и t_*, связанных соотношением

$$\chi_1(U, t_*) = UTt_* - {}^1/_2 UT^2 + {}^1/_2 u_1 (t_* - T)^2 - x_* = 0 \tag{2.5}$$

вытекающим из (2.2). Опуская промежуточные выкладки, приведем выражения переменных U и t_*, доставляющих минимум функции (2.4)

$$U = {}^1/_2 u_1, \qquad t_* = {}^1/_2 T + [2x_* / u_1 - {}^1/_4 T^2]^{1/2} \tag{2.6}$$

Оптимальное управление имеет при этом следующий вид:

$$u_*(t) = {}^1/_2 u_1 \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \qquad u_*(t) = u_1 \quad (T < t \leqslant t_*) \tag{2.7}$$

Скорость обработки координаты x_* (в момент $t = t_*$) равна

$$\min_u \max_t x^{\cdot}(t) = UT + u_1(t_* - T) = u_1[2x_* / u_1 - {}^1/_4 T^2]^{1/2} \tag{2.8}$$

Из полученных формул следует, что соотношение (2.3) выполняется лишь при условии

$$[2x_* / u_1 - {}^1/_4 T^2]^{1/2} \geqslant {}^1/_2 T \quad \text{или} \quad x_* \geqslant {}^1/_4 u_1 T^2 \tag{2.9}$$

Повторяя аналогичные рассуждения предыдущего п. 1 можно показать необходимость выполнения соотношения (2.3). Отсюда будет следовать, что при

$$x_* \leqslant {}^1/_4 u_1 T^2 \tag{2.10}$$

оптимальное управление $u_*(t)$ приобретает вид

$$u_*(t) = U_0 \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \qquad U_0 = 2(x_* / T^2) \tag{2.11}$$

Здесь значение U_0 определялось условием

$$\int_0^T U_0 t\, dt = x_* \tag{2.12}$$

При этом координата x_* отрабатывается в момент $t = T$ со скоростью

$$\min_u \max_t x^{\cdot}(t) = U_0 T = 2x_* / T \tag{2.13}$$

Непосредственно проверяется, что при выполнении условия

$$x_* = {}^1/_4 u_1 T^2$$

параметры U и U_0 оптимальных управлений, а также скорости отработки координаты x_*, вычисляемые по формулам (2.6), (2.11), (2.8) и (2.13), полностью совпадают.