УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОЧАСТОТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

А. П. Проскуряков

(Москва)

1. Рассмотрим квазилинейную автономную систему с двумя степенями свободы вида

$$x_i^{\cdot\cdot} + \omega_i^2 x_i = \mu F_i(x_1, x_2, x_1^{\cdot}, x_2^{\cdot}, \mu) \qquad (i = 1, 2) \tag{1.1}$$

Функции F_i — аналитические от своих аргументов, μ — малый параметр. Предполагается, что частоты ω_1 и ω_2 несоизмеримы.

Как известно [1], система (1.1) может быть получена при помощи линейного преобразования из квазилинейной системы общего вида, порождающая система ($\mu = 0$) которой является консервативной системой с потенциальной энергией в виде определенно положительной квадратичной формы.

Начальные условия принимаются в таком виде [1]:

$$x_1(0) = A_0 + \beta, \qquad x_1^{\cdot}(0) = 0, \qquad x_2(0) = \varphi, \qquad x_2^{\cdot}(0) = \psi \tag{1.2}$$

Величины β, φ и ψ являются функциями от μ, разлагающимися в ряды по целым, а β в некоторых случаях и по дробным степеням этого параметра и обращающимися в нуль при $\mu = 0$. Кроме того, предполагается, что φ и ψ зависят еще от $A_0 + \beta$. Таким образом, имеем

$$\varphi(A_0 + \beta, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[p_n(A_0) + \frac{dp_n}{dA_0}\beta + \cdots\right]\mu^n$$

$$\psi(A_0 + B, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[q_n(A_0) + \frac{dq_n}{dA_0}\beta + \cdots\right]\mu^n$$

Периодическое решение системы (1.1) с периодом $T_1^* = 2\pi / \omega_1 + \alpha^*$ можно представить в виде

$$x_1(t) = (A_0 + \beta)\cos\omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{1n}(t) + \frac{dC_{1n}(t)}{dA_0}\beta + \frac{1}{2}\frac{d^2C_{1n}(t)}{dA_0^2}\beta^2 + \cdots\right]\mu^n$$

$$x_2(t) = \varphi\cos\omega_2 t + \frac{\psi}{\omega_2}\sin\omega_2 t + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{2n}(t) + \frac{dC_{2n}(t)}{dA_0}\beta + \cdots\right]\mu^n \tag{1.3}$$

Функции $C_{in}(t)$ зависят от всех начальных условий и, следовательно, являются сложными функциями от $A_0 + \beta$. Производные от этих функций по A_0 вычисляются с учетом этого обстоятельства. Функции $C_{in}(t)$ при $\beta = 0$ определяются по формулам

$$C_{in}(t) = \frac{1}{\omega_i}\int_0^t H_{in}(t_1)\sin\omega_i(t - t_1)\,dt_1, \qquad H_{in}(t) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}F_i}{d\mu^{n-1}}\right)_{\beta=\mu=0} \tag{1.4}$$

Введем новые функции

$$D_n(t) = C_{2n}(t) + p_n\cos\omega_2 t + \frac{q_n}{\omega_2}\sin\omega_2 t$$

Тогда значения величин $H_{in}(t)$ в раскрытом виде будут

$$H_{i1}(t) = F_i(x_{10}, x_{20}, x_{10}^{\cdot}, x_{20}^{\cdot}, 0)$$

$$H_{i2}(t) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)_0 C_{11}(t) + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right)_0 D_1(t) + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1^{\cdot}}\right)_0 C_{11}^{\cdot}(t) + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_2^{\cdot}}\right)_0 D_1^{\cdot}(t) + \left(\frac{\partial F_i}{\partial \mu}\right)_0$$

и т. д. (1.5)

Значок 0 у производных от функций F_i означает, что в эти производные вместо $x_1, x_2, x_1^{\cdot}, x_2^{\cdot}, \mu$ нужно подставить значения этих величин при $\mu = 0$, т. е. $x_{10}, x_{20}, x_{10}^{\cdot}, x_{20}^{\cdot}, 0$.

Для представления решения в виде рядов по параметру μ с коэффициентами, имеющими не зависящий от μ период $T_1 = 2\pi / \omega_1$, используется преобразование времени t. Чтобы сохранить решение в форме (1.3), коэффициенты этого преобразования должны быть функциями $A_0 + \beta$. Поэтому преобразование возьмем в виде

$$t = \tau \left[1 + \frac{1}{T_1} \sum_{n=1}^{\infty} N_n (A_0 + \beta) \mu^n \right] = h\tau \tag{1.6}$$

Для системы с одной степенью свободы значения коэффициентов N_n при $\beta = 0$ приведены в статье [2]. В данном случае имеем

$$N_1 = \frac{1}{A_0 \omega_1^2} C_{11}^{\cdot}(T_1), \qquad N_2 = \frac{1}{A_0 \omega_1^2} [C_{12}^{\cdot}(T_1) + N_1 C_{11}^{\cdot\cdot}(T_1)] \text{ и т. д.} \tag{1.7}$$

Используя подстановку (1.6), получим

$$x_i(t) = x_i(h\tau) = z_i(\tau), \qquad x^{\cdot}(t) = z_i'(\tau) \frac{1}{h}$$

Система (1.1) переходит в систему

$$z_i'' + h^2 \omega_i^2 z_i = \mu h^2 F_i \left(z_1, z_2, z_1' \frac{1}{h}, z_2' \frac{1}{h}, \mu\right)$$

Эту систему можно записать еще следующим образом

$$z_i'' + \omega_i^2 z_i = \mu \Phi_i (z_1, z_2, z_1', z_2', \mu) \qquad (i = 1, 2) \tag{1.8}$$

Здесь обозначено

$$\Phi_i (z_1, z_2, z_1', z_2', \mu) = h^2 F_i \left(z_1, z_2, z_1' \frac{1}{h}, z_2' \frac{1}{h}, \mu\right) - \frac{h^2 - 1}{\mu} \omega_i^2 z_i \tag{1.9}$$

Решение системы (1.8) можно представить в такой же форме, как и решение системы (1.1)

$$z_1(\tau) = (A_0 + \beta) \cos \omega_1 \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{1n}^*(\tau) + \frac{dC_{1n}^*(\tau)}{dA_0} \beta + \frac{1}{2} \frac{d^2 C_{1n}^*(\tau)}{dA_0^2} \beta^2 + \cdots \right] \mu^n$$

$$z_2(\tau) = \varphi \cos \omega_2 \tau + \frac{\psi}{\omega_2} \sin \omega_2 \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{2n}^*(\tau) + \frac{dC_{2n}^*(\tau)}{dA_0} \beta + \cdots \right] \mu^n \tag{1.10}$$

Введем обозначения

$$D_n^*(\tau) = C_{2n}^*(\tau) + p_n \cos \omega_2 \tau + \frac{q_n}{\omega_2} \sin \omega_2 \tau$$

$$H_{in}^*(\tau) = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d^{n-1} \Phi_i}{d\mu^{n-1}}\right)_{\beta = \mu = 0}$$

Тогда для величин $H_{in}^*(\tau)$ будут иметь место формулы, аналогичные (1.5)

$$H_{i1}^*(\tau) = \Phi_i (z_{10}, z_{20}, z_{10}', z_{20}', 0)$$

$$H_{i2}^*(\tau) = \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial z_1}\right)_0 C_{11}^*(\tau) + \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial z_2}\right)_0 D_1^*(\tau) + \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial z_1'}\right)_0 C_{11}^{*\prime}(\tau) +$$
$$+ \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial z_2'}\right)_0 D_1^{*\prime}(\tau) + \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \mu}\right)_0 \text{ и т. д.}$$

Функции $C_{in}^*(\tau)$ и $C_{in}(\tau)$ связаны между собой соотношениями

$$C_{11}^*(\tau) = C_{11}(\tau) - \frac{1}{T_1} N_1 A_0 \omega_1 \tau \sin \omega_1 \tau$$

$$C_{12}^*(\tau) = C_{12}(\tau) + \frac{1}{T_1} N_1 \tau C_{11}'(\tau) - \frac{1}{T_1} N_2 A_0 \omega_1 \tau \sin \omega_1 \tau - \frac{1}{2} \frac{1}{T_1^2} N_1^2 A_0 \omega_1^2 \tau^2 \cos \omega_1 \tau$$

и т. д. (1.11)

Аналогично, для функций $C_{2n}^*(\tau)$, а также для величин $H_{in}^*(\tau)$ могут быть выписаны соответствующие формулы. Нетрудно показать, что

$$C_{1n}^*(T_1) = M_n \tag{1.12}$$

Значения величин M_n для одной степени свободы приведены в работе [2]. В данном случае имеем

$$M_1 = C_{11}(T_1), \qquad M_2 = C_{12}(T_1) + \frac{1}{2A_0\omega_1^2} C_{11}'^2(T_1) \qquad \text{и т. д.} \tag{1.13}$$

Исходя из начального условия $z_1'(0) = 0$, легко видеть, что

$$C_{1n}^{*\prime}(T_1) = 0 \tag{1.14}$$

Так как это равенство выполняется тождественно, то производные любого порядка от $C_{1n}^{*\prime}(T_1)$ по A_0 также равны нулю.

2. Исследуем устойчивость периодических решений системы (1.8) с периодом T_1 в предположении, что частоты ω_1 и ω_2 несоизмеримы. При этом рассмотрим случаи, когда уравнение, определяющее амплитуду A_0

$$C_{11}^*(T_1) = C_{11}(T_1) = 0 \tag{2.1}$$

имеет не только простые, но и двукратные и трехкратные корни.

Составим уравнения в вариациях для системы (1.8). Имеем

$$y_i'' + \omega_i^2 y_i = \mu \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial z_1} y_1 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_2} y_2 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_1'} y_1' + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_2'} y_2'\right] \qquad (i = 1, 2) \tag{2.2}$$

При этом предполагается, что в функции Φ_i подставлено периодическое решение $z_1(\tau)$ и $z_2(\tau)$ с периодом $T_1 = 2\pi / \omega_1$. Решение уравнений в вариациях будем искать в виде [3]

$$y_1(\tau) = e^{\alpha\tau} u(\tau), \qquad y_2(\tau) = e^{\alpha\tau} v(\tau) \tag{2.3}$$

где $u(\tau)$ и $v(\tau)$ — периодические функции τ с периодом T_1, а α — характеристический показатель. Подставив выражения (2.3) для $y_1(\tau)$ и $y_2(\tau)$ в уравнения (2.2), получим уравнения для определения функций $u(\tau)$ и $v(\tau)$, а также характеристического показателя α

$$u'' + 2\alpha u' + (\alpha^2 + \omega_1^2) u = \mu \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} + \alpha \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1'}\right) u + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1'} u' + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z_2} + \alpha \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_2'}\right) v + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_2'} v'\right]$$

$$v'' + 2\alpha v' + (\alpha^2 + \omega_2^2) v = \mu \left[\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z_1} + \alpha \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_1'}\right) u' + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_1'} u' + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z_2} + \alpha \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_2'}\right) v + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_2'} v'\right] \tag{2.4}$$

Функции $u(\tau)$ и $v(\tau)$, а также характеристический показатель α могут быть разложены в ряды по целым или дробным степеням параметра μ.

Так как частоты порождающей системы равны ω_1 и ω_2, то корни соответствующего этой системе фундаментального уравнения [3] равны $\pm i\omega_1$ и $\pm i\omega_2$. Для периодического решения системы (1.8) с периодом T_1 первые два корня являются критическими, а вторые некритическими.

3. Вычислим характеристический показатель $\alpha^{(1)}$ для критических корней. Заметим, что в разложении этого показателя по μ постоянный член может быть опущен. Это следует из того, что величина

$$e^{\alpha_0\tau} = e^{\pm i\omega_1\tau} = \cos \omega_1\tau \pm i \sin \omega_1\tau$$

является периодической функцией τ периода T_1 и, следовательно, может быть включена в функции $u(\tau)$ и $v(\tau)$.

Рассмотрим сначала случай, когда периодическое решение исходной системы разлагается в степенной ряд по $\mu^{1/2}$. Имеем

$$\alpha^{(1)} = \alpha_{1/2}\mu^{1/2} + \alpha_1\mu + \alpha_{3/2}\mu^{3/2} + \cdots$$

$$u^{(1)}(\tau) = u_0(\tau) + \mu^{1/2} u_{1/2}(\tau) + \mu u_1(\tau) + \cdots \tag{3.1}$$

$$v^{(1)}(\tau) = v_0(\tau) + \mu^{1/2} v_{1/2}(\tau) + \mu v_1(\tau) + \cdots$$

В уравнениях (2.4) полагаем $\mu = 0$. Имеем

$$u_0'' + \omega_1^2 u_0 = 0, \qquad v_0'' + \omega_2^2 v_0 = 0$$

Отсюда

$$u_0(\tau) = P_0 \cos\omega_1\tau + Q_0 \sin\omega_1\tau, \qquad v_0(\tau) = 0 \tag{3.2}$$

В уравнениях (2.4) приравниваем друг другу члены с $\mu^{1/2}$. Имеем

$$u_{1/2}'' + \omega_1^2 u_{1/2} = -2\alpha_{1/2} u_0', \qquad v_{1/2}'' + \omega_2^2 v_{1/2} = 0$$

Из условий периодичности функции $u_{1/2}(\tau)$ следует

$$\alpha_{1/2} = 0 \tag{3.3}$$

причем этот корень двукратный. Таким образом, получаем

$$u_{1/2}(\tau) = P_{1/2} \cos\omega_1\tau + Q_{1/2} \sin\omega_1\tau, \qquad v_{1/2}(\tau) = 0 \tag{3.4}$$

Далее, в уравнениях (2.4) приравниваем члены с μ в первой степени. После некоторых преобразований имеем

$$u_1'' + \omega_1^2 u_1 = P_0 K_1(\tau) + Q_0 L_1(\tau)$$
$$v_1'' + \omega_2^2 v_1 = P_0 \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial A_0}\right)_0 - Q_0 \frac{1}{A_0\omega_1}\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau}\right)_0 \tag{3.5}$$

Здесь

$$K_1(\tau) = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial A_0}\right)_0 + 2\alpha_1\omega_1 \sin\omega_1\tau, \qquad L_1(\tau) = -\frac{1}{A_0\omega_1}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau}\right)_0 - 2\alpha_1\omega_1\cos\omega_1\tau \tag{3.6}$$

Условия периодичности функции $u_1(\tau)$

$$\int_0^{T_1} [P_0 K_1(\tau) + Q_0 L_1(\tau)] \begin{pmatrix}\cos\omega_1\tau \\ \sin\omega_1\tau\end{pmatrix} d\tau = 0$$

приводят к уравнениям

$$P_0\left(\omega_1 \frac{dC_{11}^*}{dA_0} - 2\pi\alpha_1\right) = 0, \qquad Q_0(-2\pi\alpha_1) = 0$$

Возможны два решения этих уравнений

$$\alpha_1 = \frac{1}{T_1}\frac{dC_{11}}{dA_0}, \qquad Q_0 = 0 \tag{3.7}$$

или

$$\alpha_1 = 0, \qquad P_0 = 0 \tag{3.8}$$

Здесь и в дальнейшем отсутствие аргумента у функций C_{in} или у их производных означает, что эти функции или их производные взяты при $\tau = T_1$.

Функция $u_1(\tau)$ определяется формулой

$$u_1(\tau) = P_1\cos\omega_1\tau + Q_1\sin\omega_1\tau + P_0\left[\frac{dC_{11}^*(\tau)}{dA_0} - \alpha_1\tau\cos\omega_1\tau\right] -$$
$$- Q_0\left[\frac{1}{A_0\omega_1} C_{11}^{*\prime}(\tau) + \alpha_1\tau\sin\omega_1\tau\right] \tag{3.9}$$

При этом члены, пропорциональные $\sin\omega_1\tau$ с коэффициентами, не зависящими от τ, которые должны стоять в скобках при P_0 и Q_0, включены в $Q_1\sin\omega_1\tau$.

Общее решение второго уравнения (3.5) будет

$$v_{1*}(\tau) = R_1\cos\omega_2\tau + S_1\sin\omega_2\tau + P_0\frac{dC_{21}^*(\tau)}{dA_0} +$$
$$+ Q_0\frac{1}{A_0\omega_1}\left[\frac{1}{\omega_2}H_{21}^*(0)\sin\omega_2\tau - C_{21}^{*\prime}(\tau)\right]$$

Выбирая произвольные постоянные R_1 и S_1 определенным образом, можно получить периодическое решение с периодом T_1

$$v_1(\tau) = P_0\frac{dD_1^*(\tau)}{dA_0} - Q_0\frac{1}{A_0\omega_1}D_1^{*\prime}(\tau) \tag{3.10}$$

Далее составляем уравнение для $u_{3/2}(\tau)$. После ряда преобразований получим

$$u_{3/2}'' + \omega_1^2 u_{3/2} = P_0 K_{3/2}(\tau) + Q_0 L_{3/2}(\tau) + P_{1/2} K_1(\tau) + Q_{1/2} L_1(\tau)$$

Здесь обозначено

$$K_{3/2}(\tau) = A_{1/2}\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial A_0^2}\right)_0 + 2\alpha_{3/2}\omega_1 \sin \omega_1 \tau \tag{3.11}$$

$$L_{3/2}(\tau) = -\frac{A_{1/2}}{A_0 \omega_1}\left[\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \tau \partial A_0}\right)_0 - \frac{1}{A_0}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau}\right)_0\right] - 2\alpha_{3/2}\omega_1 \cos \omega_1 \tau$$

Условия периодичности приводят к уравнениям

$$P_0\left(A_{1/2}\omega_1 \frac{d^2 C_{11}^*}{dA_0^2} - 2\pi\alpha_{3/2}\right) + P_{1/2}\left(\omega_1 \frac{dC_{11}^*}{dA_0} - 2\pi\alpha_1\right) = 0$$

$$Q_0\left(A_{1/2}\frac{\omega_1}{A_0}\frac{dC_{11}^*}{dA_0} - 2\pi\alpha_{3/2}\right) - Q_{1/2} 2\pi\alpha_1 = 0$$

Если $\alpha_1 = \dfrac{1}{T_1}\dfrac{dC_{11}}{dA_0}$, то $Q_0 = 0$ и, следовательно,

$$\alpha_{3/2} = \frac{1}{T_1} A_{1/2} \frac{d^2 C_{11}}{dA_0^2}, \qquad Q_{1/2} = 0 \tag{3.12}$$

Если $\alpha_1 = 0$, то $P_0 = 0$ и, следовательно,

$$\alpha_{3/2} = \frac{1}{T_1}\frac{A_{1/2}}{A_0}\frac{dC_{11}}{dA_0} = 0, \qquad P_{1/2} = 0 \tag{3.13}$$

так как при $dC_{11} / dA_0 \neq 0$ имеем $A_{1/2} = 0$.

Наконец, составляем уравнение для $u_2(\tau)$. При этом полагаем, что $dC_{11} / dA_0 = 0$ и следовательно, $\alpha_1 = 0$. После весьма громоздких преобразований получим

$$u_2'' + \omega_1^2 u_2 = \sum_{s=0,\, 1/2,\, 1} [P_s K_{2-s}(\tau) + Q_s L_{2-s}(\tau)]$$

Здесь

$$K_2(\tau) = \frac{1}{2} A_{1/2}^2 \left(\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial A_0^3}\right)_0 + A_1 \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial A_0^2}\right)_0 + \frac{\partial H_{12}^*(\tau)}{\partial A_0} + 2\alpha_2 \omega_1 \sin \omega_1 \tau$$

$$L_2(\tau) = -\frac{1}{A_0\omega_1}\left\{\frac{1}{2} A_{1/2}^2 \left[\left(\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \tau \partial A_0^2}\right)_0 - \frac{2}{A_0}\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \tau \partial A_0}\right)_0 + \frac{2}{A_0^2}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau}\right)_0\right] + \right.$$
$$\left. + A_1 \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \tau \partial A_0}\right)_0 - \frac{1}{A_0}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau}\right)_0\right] + \frac{\partial H_{12}^*(\tau)}{\partial \tau}\right\} - 2\alpha_2\omega_1 \cos \omega_1 \tau$$

Условия периодичности приводят к уравнениям

$$P_0\left(\frac{1}{2} A_{1/2}^2 \omega_1 \frac{d^3 C_{11}^*}{dA_0^3} + A_1 \omega_1 \frac{d^2 C_{11}^*}{dA_0^2} + \omega_1 \frac{dC_{12}^*}{dA_0} - 2\pi\alpha_2\right) + \tag{3.14}$$
$$+ P_{1/2}\left(A_{1/2}\omega_1 \frac{d^2 C_{11}^*}{dA_0^2} - 2\pi\alpha_{3/2}\right) = 0$$

$$Q_0\left(\frac{1}{2} A_{1/2}^2 \frac{\omega_1}{A_0}\frac{d^2 C_{11}^*}{dA_0^2} + \frac{\omega_1}{A_0} C_{12}^*(T_1) - 2\pi\alpha_2\right) - Q_{1/2} 2\pi\alpha_{3/2} = 0$$

Для первой ветви характеристического показателя получим

$$\alpha_2 = \frac{1}{T_1}\left(\frac{1}{2} A_{1/2}^2 \frac{d^3 C_{11}}{dA_0^3} + A_1 \frac{d^2 C_{11}}{dA_0^2} + \frac{dM_2}{dA_0}\right) \tag{3.15}$$

Для второй ветви имеем

$$\alpha_2 = \frac{1}{T_1 A_0}\left(\frac{1}{2} A_{1/2}^2 \frac{d^2 C_{11}}{dA_0^2} + M_2\right) = 0 \tag{3.16}$$

так как выражение в скобках равно нулю в силу уравнения [2], из которого определяется коэффициент $A_{1/2}$.

Последующие коэффициенты разложения $\alpha^{(1)}$ не вычислялись. Итак, имеем

$$\alpha^{(1)} = \frac{1}{T_1}\left[\frac{dC_{11}}{dA_0}\mu + A_{1/2}\frac{d^2C_{11}}{dA_0^2}\mu^{3/2} + \left(\frac{1}{2}A_{1/2}^2\frac{d^3C_{11}}{dA_0^3} + A_1\frac{d^2C_{11}}{dA_0^2} + \frac{dM_2}{dA_0}\right)\mu^2 + \cdots\right] \quad (3.17)$$

для первой ветви и $\alpha^{(1)} = 0$ для второй ветви характеристического показателя, отвечающего критическим корням фундаментального уравнения.

4. Для трехкратных корней уравнения (2.1) возможно существование периодических решений системы (1.8) с периодом T_1, которые представляются рядами по целым степеням $\mu^{1/3}$. В этом случае характеристический показатель $\alpha^{(1)}$ и функции $u^{(1)}(\tau)$ и $v^{(1)}(\tau)$ будут также разлагаться в ряды по $\mu^{1/3}$. Например,

$$\alpha^{(1)} = \alpha_{1/3}\mu^{1/3} + \alpha_{2/3}\mu^{2/3} + \alpha_1\mu + \cdots \quad (4.1)$$

Проводя вычисления коэффициентов этого ряда способом, аналогичным предыдущему и учитывая, что в данном случае

$$\frac{dC_{11}}{dA_0} = \frac{d^2C_{11}}{dA_0^2} = 0$$

получим для обоих ветвей характеристического показателя

$$\alpha_{1/3} = \alpha_{2/3} = \alpha_{4/3} = 0 \quad (4.2)$$

Для первой ветви, кроме того, будем иметь

$$\alpha_1 = \frac{1}{T_1}\frac{dC_{11}}{dA_0}, \qquad \alpha_{5/3} = \frac{1}{2T_1}A_{1/3}^2\frac{d^3C_{11}}{dA_0^3}$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{T_1}\left(\frac{1}{6}A_{1/3}^3\frac{d^4C_{11}}{dA_0^4} + A_{1/3}A_{2/3}\frac{d^3C_{11}}{dA_0^3} + \frac{dM_2}{dA_0}\right) \quad (4.3)$$

Последующие коэффициенты $\alpha_{n/3}$ не вычислялись.

5. Перейдем теперь к вычислению характеристического показателя $\alpha^{(2)}$ для некритических корней фундаментального уравнения системы (1.8). Будем рассматривать случай, когда периодическое решение этой системы разлагается в степенной ряд по $\mu^{1/2}$. Тогда

$$\alpha^{(2)} = \alpha_0 + \alpha_{1/2}\mu^{1/2} + \alpha_1\mu + \ldots, \qquad \alpha_0 = \pm i\omega_2 \quad (5.1)$$

Функции $u^{(2)}(\tau)$ и $v^{(2)}(\tau)$ также разлагаются в ряды по $\mu^{1/2}$. Эти функции должны быть периодическими с периодом T_1.

Из уравнений (2.4) при $\mu = 0$ получим

$$u_0'' + 2\alpha_0u_0' + (\omega_1^2 - \omega_2^2)u_0 = 0, \qquad v_0'' + 2\alpha_0v_0' = 0 \quad (5.2)$$

Ищем решение этих уравнений в виде

$$u_0(\tau) = U_0e^{im\tau}, \qquad v_0(\tau) = V_0e^{in\tau}$$

Подставляя эти выражения в (5.2), находим

$$m_1 = \pm(\omega_1 - \omega_2), \quad m_2 = \mp(\omega_1 + \omega_2), \quad n_1 = 0, \quad n_2 = \mp 2\omega_2 \quad (5.3)$$

Таким образом, уравнения (5.2) имеют следующее решение, удовлетворяющее требованиям периодичности:

$$u_0(\tau) = 0, \qquad v_0(\tau) = V_0 \quad (5.4)$$

Рассмотрение системы уравнений для $u_{1/2}(\tau)$ и $v_{1/2}(\tau)$ приводит к следующим результатам:

$$\alpha_{1/2} = 0, \qquad u_{1/2}(\tau) = 0, \qquad v_{1/2}(\tau) = V_{1/2} \quad (5.5)$$

Далее, составляем уравнение для $v_1(\tau)$

$$v_1'' + 2\alpha_0v_1' = \left[-2\alpha_0\alpha_1 + \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_2}\right)_0 + \alpha_0\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_2'}\right)_0\right]v_0 \quad (5.6)$$

Условие периодичности решения $v_1(\tau)$ сводится к отсутствию постоянного члена правой части этого уравнения. Отсюда получаем

$$\alpha_1 = \frac{1}{2T_1}\int_0^{T_1}\left[\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_2'}\right)_0 \mp \frac{i}{\omega_2}\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_2}\right)_0\right]d\tau \qquad (5.7)$$

Очевидно, что это же выражение для α_1 получим, если будем рассматривать периодическое решение, разлагающееся по степеням $\mu^{1/3}$.

6. Для квазилинейной автономной системы с одной степенью свободы исследование устойчивости в случае двукратных и трехкратных корней амплитудного уравнения проведено в работе [4]. В этой работе получены разложения одного из корней характеристического уравнения по степеням $\mu^{1/2}$ и $\mu^{1/3}$. Второй корень для автономной системы равен единице. Характеристические показатели α, используемые в настоящей работе, и корни характеристического уравнения ρ связаны соотношением

$$\alpha = T^{-1}\ln\rho \qquad (T\text{ — период решения}) \qquad (6.1)$$

Полученные в настоящей работе результаты показывают, что для системы с двумя степенями свободы имеются четыре ветви характеристического показателя, из которых в случае несоизмеримых частот одна ветвь вещественная, не равная в общем случае нулю, вторая ветвь нулевая и две ветви — комплексные. Так как функция $x_1(t)$, входящая в решение системы (1.1), имеет такой же вид, как и решение системы с одной степенью свободы, получающейся при отбрасывании второго уравнения (1.1), то и функция $y_1(t)$ из решения уравнений в вариациях для системы (1.1) имеет одинаковый вид с решением уравнения в вариациях для системы с одной степенью свободы. Поэтому первые ветви характеристического показателя у обеих систем имеют одинаковые по форме разложения по целым или дробным степеням малого параметра. Вторые ветви в обоих случаях нулевые.

Знаки вещественных частей характеристических показателей определяются при достаточно малых μ первыми, не равными нулю коэффициентами разложений этих показателей. Тогда одно из условий устойчивости совпадает по форме с соответствующим условием устойчивости для системы с одной степенью свободы, если в этом условии заменить всюду $C_n(T_0)$ на $C_{1n}(T_1)$. Вторым условием устойчивости служит неравенство

$$\int_0^{T_1}\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_2'}\right)_0 d\tau = \int_0^{T_1}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2^{\cdot}}\right)_0 dt < 0 \qquad (6.2)$$

Этот результат легко может быть обобщен на случай автономной квазилинейной системы с n степенями свободы, когда одна из частот порождающей системы несоизмерима ни с одной из других частот. При этом, кроме основного условия устойчивости, аналогичного условию для одной степени свободы, будет существовать $n - 1$ дополнительных условий типа (6.2).

Поступила 13 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Проскуряков А. П. К построению периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
2. Проскуряков А. П. Периодические решения квазилинейных автономных систем с одной степенью свободы в виде рядов по дробным степеням параметра. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
3. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.
4. Проскуряков А. П. Устойчивость периодических решений квазилинейных автономных систем с одной степенью свободы. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.