Здесь δ_{ij} — обычный символ Кронекера, а $\delta_{ij}' = \delta_{ij}$ при $i, j \leqslant k$ и равно нулю, если либо i либо j превышают k. Отсюда получаем

$$b^2_j = -\lambda_j'^2$$

В итоге ясно, что при больших диссипативных силах в системе всегда существуют решения с малым затуханием, причем, если диссипация является частичной с рангом $k < h$, но сообщает системе асимптотическую устойчивость, то существует $2(n-k)$ колеблющихся решений с показателями

$$\mu_i = \pm \nu_j i - \frac{s}{2\nu_j^2}\left(\frac{c_{1j}^2}{a_{11}} + \ldots + \frac{c_{kj}^2}{a_{kk}}\right) + O(s) \qquad (j = k+1, \ldots, n)$$

и $2k$ с показателями, приближенно равными

$$\mu_{j1} \approx -a_{jj} / s, \quad \mu_{j2} = -\lambda_j'^2 s + O(s)$$

Первая группа этих показателей отвечает резкому затуханию.

Поступила 19 I 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Некоторые задачи устойчивости движения. Физматгиз, 1959.
2. Пожарицкий Г. К. Об асимптотической устойчивости равновесий и стационарных движений механических систем с частичной диссипацией. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
3. Routh E. J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London, 1930.
4. Уиттекер В. Т. Аналитическая динамика. ОПТИ НКТП СССР, 1937.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

В. Я. Турин (Москва)

В работах [1-4] было определено линейное приближение для системы дифференциальных уравнений $z^\cdot = f(z, t)$ с разрывными правыми частями и были доказаны теоремы об устойчивости непрерывных решений этой системы. Ниже рассматривается устойчивость периодических решений этой системы в критических случаях.

Пусть дана система дифференциальных уравнений в векторной форме

$$z^\cdot = f(z, t) \tag{0.1}$$

Функция $f(z, t)$ задана в $n+1$ мерном криволинейном цилиндре C, осью которого является непрерывная интегральная кривая $z = z^\circ(t)$ системы (0.1). Кроме того, функция $f(z, t)$ является периодической периода τ.

Гиперповерхности (поверхности разрыва)

$$F_\alpha(z, t) = 0, \qquad [F_\alpha(z, t+\tau) = F_\alpha(z, t)] \tag{0.2}$$

рассекают цилиндр C на области H_α, пересекая кривую $z = z^\circ(t)$ в точках M_α при $t = t_\alpha$. Правые части системы (0.1) удовлетворяют следующим условиям.

1. Функции $f_i(z, t)$ непрерывны в каждой области H_α (включая границы) и непрерывно дифференцируемы до порядка N, а при переходе через поверхности (0.2) они и все их частные производные до порядка N испытывают только разрывы первого рода.

2. В угловых областях, заключенных между поверхностями (0.2) и плоскостями $t = t_\alpha$, выполняются условия

$$\begin{gathered}\frac{\partial^m f_i(z, t)}{\partial t^{m_0} \partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_n^{m_n}} - \frac{\partial^m f_i(z^\circ, t)}{\partial t^{m_0} \partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_n^{m_n}} \to \pm \xi_i^{m_0 m_1 \ldots m_n} \\ f_i(z, t) - f_i(z^\circ, t) \to \pm \xi_i \quad \text{при } (z, t) \to M_\alpha\end{gathered} \tag{0.3}$$

Знаки плюс и минус соответствуют значениям $t = t_\alpha + 0$ и $t = t_\alpha - 0$.

3. Поверхности (0.2) непрерывные, а в точках M_α гладкие до порядка N и вдоль интегральной кривой $z = z^\circ(t)$

$$(F_\alpha^{\cdot})_{M_\alpha} \neq 0 \; (F_\alpha^{\cdot})_{M_\alpha}^{+} / (F_\alpha^{\cdot})_{M_\alpha}^{-} \geqslant \Gamma > 0 \qquad \left(F_\alpha^{\cdot} = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_\alpha}{\partial z_i} f_i + \frac{\partial F_\alpha}{\partial t}\right]_{z=z^\circ(t)}\right) \quad (0.4)$$

Введем переменную $x = z - z^\circ(t)$. Система (0.1) примет вид

$$x^{\cdot} = p(x, t), \qquad p(x, t) = f(z^\circ + x, t) - f(z^\circ, t) \quad (0.5)$$

а уравнения поверхностей разрыва будут

$$\Phi_\alpha(x, t) = 0, \qquad \Phi_\alpha(x, t) \equiv F_\alpha(z^\circ + x, t) \quad (0.6)$$

Очевидно, что устойчивость решения $z = z^\circ(t) \equiv z^\circ(t + \tau)$ системы (0.1) эквивалентна устойчивости нулевого решения системы (0.5). Поверхности (0.6) в отличие от (0.2) не будут уже гладкими в точках M_α, а имеют изломы. В пересечении областей H_α и $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_{\alpha+1}$ (в дальнейшем будем эти области называть центральными) система (0.1) может быть записана в виде [1]

$$z_i^{\cdot} = f_i(z^\circ, t) + \sum \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f_i(z^\circ, t)}{\partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_n^{m_n}} (z_1 - z_1^\circ)^{m_1} \ldots (z_n - z_n^\circ)^{m_n} + R_i(z, t) \quad (0.7)$$

Частные производные, входящие в формулу (0.7), непрерывны в каждом интервале $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_{\alpha+1}$, функции $R_i(z, t)$ удовлетворяют условиям (0.8)

$$|R_i(z, t)| < a|x|^{N+1}, \qquad |x| = \sqrt{(z_1 - z_1^\circ)^2 + \ldots + (z_n - z_n^\circ)^2} \qquad (a = \text{const} > 0)$$

Поверхности разрыва с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем N, можно записать в виде (в окрестности точки M_α нижней угловой области)

$$t_\alpha - t = \sum h_\alpha^{m_1 \ldots m_n} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} \quad (0.9)$$

Будем искать приближенное решение уравнения (0.5) в окрестности точки $P(\zeta, t_1)$, расположенной на поверхности разрывов в окрестности точки M_α в нижней угловой области

$$x_i = \zeta_i + \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(t - t_1)^{m+1}}{(m+1)!} \frac{d^m p_i(\zeta, t_1)}{dt^m} + p_i^*(\zeta, t), \qquad \frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial x_j} p_j + \frac{\partial p_i}{\partial t} \quad (0.10)$$

Точка $P(\zeta, t_1)$ лежит на поверхности разрывов, поэтому точностью до малых более высокого чем N порядка

$$t_\alpha - t_1 = \sum h_\alpha^{m_1 \ldots m_n} \zeta_1^{m_1} \ldots \zeta_n^{m_n} = G(\zeta) \quad (0.11)$$

Если теперь в (0.10) считать $t = t_\alpha$ и заменить $t_\alpha - t_1$ по формулам (0.11), то получим

$$x_i = \zeta_i + \sum_{m=0}^{N-1} \frac{G^{m+1}(\zeta)}{(m+1)!} \frac{d^m}{dt^m} p_i[\zeta, t_\alpha - G(\zeta)] + p_i^*(\zeta, t_\alpha) \quad (0.12)$$

Последнее равенство разложим по возрастающим степеням $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ и ограничимся членами порядка не выше N относительно $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$

$$x_i^+ = \sum b_i^{m_1 \ldots m_n} \zeta_1^{m_1} \ldots \zeta_n^{m_n} \quad (0.13)$$

Коэффициенты $b_i^{m_1 \ldots m_n}$ зависят только от тех $h_\alpha^{s_1 \ldots s_n}$ и $\xi_\alpha^{j_1 \ldots j_n}$, у которых $s_1 + \ldots + s_n \leqslant m$, $j_1 + \ldots + j_n \leqslant m$ $(m = m_1 + \ldots + m_n)$. В частности, если $m_1 + \ldots + m_n = 1$, то получим

$$b_i^{0 \ldots 010 \ldots 0} = b_{ij} = \delta_{ij} + \xi_i h_j \quad (\delta_{ij} \text{ — символ Кронеккера}) \quad (0.14)$$

[1] Здесь и в дальнейшем будем считать, если это не будет специально оговорено, что индексы суммирования пробегают всевозможные значения, удовлетворяющие неравенству $1 \leqslant m_1 + \ldots + m_n \leqslant N$.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений

$$x_i^{\cdot} = \sum \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f_i(z^\circ, t)}{\partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_n^{m_n}} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} \tag{0.15}$$

Для этой системы будем искать решение в окрестности точки $P(\zeta, t_1)$, расположенной на поверхности разрывов. Повторяя вычисления, проведенные выше, получим

$$x_i^- = \zeta_i + \sum c_i^{m_1 \ldots m_n} \zeta_1^{m_1} \ldots \zeta_n^{m_n} \qquad (2 \leqslant m_1 + \ldots + m_n \leqslant N) \tag{0.16}$$

Коэффициенты $c_i^{m_1 \ldots m_n}$ вычисляются по тем же правилам, что и $b_i^{m_1 \ldots m_n}$.

Равенство (0.16) обратим с точностью до бесконечно малых порядка не выше N

$$\zeta_i = \sum d_i^{m_1 \ldots m_n} (x_1^-)^{m_1} \ldots (x_n^-)^{m_n} \tag{0.17}$$

Если теперь подставить ζ_i из (0.17) в (0.13) и ограничиться бесконечно малыми порядка не выше N, то (0.13) примет вид

$$\overset{+}{x_i} = \sum l_i^{m_1 \ldots m_n} (x_1^-)^{m_1} \ldots (x_n^-)^{m_n} \quad \text{или} \quad x_\alpha^+ = S_\alpha(x_\alpha^-) \tag{0.18}$$

Совокупность системы (0.15) и условий разрывов (0.18) будем называть системой первого приближения N-го порядка [1].

В частности, при $N = 1$ система (0.15) + (0.18), в силу (0.14), примет вид

$$x_i^{\cdot} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(z^\circ, t)}{\partial z_j} x_j, \qquad x_i^+ = x_i^- + \sum_{j=1}^{n} \xi_i h_j x_j^- \tag{0.19}$$

Эта система первого приближения рассматривалась в работе [2]. Система (0.16) + + (0.18) в дальнейшем будет иметь фундаментальное значение.

§ 1. Если через $X(t)$ обозначить фундаментальную матрицу системы (0.19), то будет справедливо равенство

$$X(t + \tau) = X(t) U \tag{1.1}$$

где U — постоянная неособенная матрица. Применим к (0.5) преобразование

$$x = L(t) y, \qquad L(t) = X(t) e^{-At}, \qquad A = \frac{1}{\tau} \ln U$$

Система (0.5) примет вид

$$y^{\cdot} = q(y, t), \qquad q(y, t) = L^{-1} p - L^{-1} L^{\cdot} y \tag{1.2}$$

Если выбрать матрицу A в жордановой форме, то система (1.2) в центральных областях будет иметь вид

$$y_i^{\cdot} = \lambda_i y_i + \alpha_{i-1} y_{i-1} + \sum_{m=2}^{N} Y_i^{(m)}(y, t) + R_i^*(y, t) \tag{1.3}$$

Здесь $|R_i^*(y, t)| < a_1 |y|^{N+1}$, $Y_i^{(m)}(y, t)$ — формы порядка m относительно переменных $y_1, \ldots, y_n$ с периодическими и разрывными при $t = t_\alpha$ коэффициентами.

Преобразуем систему (1.3) при помощи нелинейного преобразования к такому виду, чтобы члены до порядка N имели постоянные, всюду равные коэффициенты.

Такое преобразование может быть выполнено, если между характеристическими числами матрицы A и периодом τ не существует никаких соотношений вида

$$m_1 \lambda_1 + \ldots + m_n \lambda_n - \lambda_s = \pm 2\pi i \tau^{-1} \tag{1.4}$$

при целых неотрицательных $m_1, \ldots, m_n$.

---

[1] Нетрудно убедиться, что уравнения (0.18) будут справедливы как для нижней, так и для верхней угловых областей.

Предположим, что эти условия выполнены. Будем искать преобразование в виде

$$y_i = u_i + \sum A_i^{m_1\ldots m_n}(t)\, u_1^{m_1} \ldots u_n^{m_n} \qquad (2 \leqslant m_1 + \ldots + m_n \leqslant N) \tag{1.5}$$

где $A_i^{m_1\ldots m_n}(t)$ — периодические функции периода τ, разрывные при $t = t_\alpha$.

В новых переменных система (1.3) примет вид

$$u_i^\cdot = \lambda_i u_i + \alpha_{i-1} u_{i-1} + \sum a_i^{m_1\ldots m_n} u_1^{m_1} \ldots u_n^{m_n} + U_i(u, t)$$
$$(2 \leqslant m_1 + \ldots + m_n \leqslant N) \tag{1.6}$$

Условия разрывов для системы первого приближения порядка N системы (1.3) имеют вид

$$y_i^+ = y_i^- + \sum g_i^{m_1\ldots m_n} (y_1^-)^{m_1} \ldots (y_n^-)^{m_n} \tag{1.7}$$

Разрывы функций $A_i^{m_1\ldots m_n}(t)$ определим так, чтобы условия разрывов системы первого приближения N-го порядка (1.6) имели вид

$$u_i^+ = u^-_i \tag{1.8}$$

с точностью до членов более высокого порядка, чем N.

Покажем, что это можно сделать. Действительно, с точностью до членов порядка N должно выполняться равенство

$$\sum A_i^{m_1\ldots m_n}(t_\alpha + 0)\, u_1^{m_1} \ldots u_n^{m_n} = \sum A_i^{m_1\ldots m_n}(t_\alpha - 0)\, u_1^{m_1} \ldots u_n^{m_n} +$$
$$+ \sum g_i^{m_1\ldots m_n} \Big[u_1 + \sum A_1^{s_1\ldots s_n}(t_\alpha - 0)\, u_1^{s_1} \ldots u_n^{s_n}\Big]^{m_1} \ldots$$
$$\ldots \Big[u_n + \sum A_n^{s_1\ldots s_n}(t_\alpha - 0)\, u_1^{s_1} \ldots u_n^{s_n}\Big] \tag{1.9}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $u_1, \ldots, u_n$, получим искомые условия разрывов. В уравнениях (1.9) величины $A_i^{m_1\ldots m_n}(t_\alpha - 0)$ считаются известными, поэтому $A_i^{m_1\ldots m_n}(t_\alpha + 0)$ определятся однозначно.

Равенство (1.9), как и (1.8), следует понимать не в точном смысле, а с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем N.

Для возможности приведения системы (1.3) к виду (1.6) необходимо [5], чтобы коэффициенты $A_i^{m_1\ldots m_n}(t)$ преобразования (1.5) удовлетворяли уравнениям

$$\frac{d}{dt} A_i^{m_1\ldots m_n} + \Big(\sum_{s=1}^{n} m_s\lambda_s - \lambda_i\Big) A_i^{m_1\ldots m_n} = -a_i^{m_1\ldots m_n} + B_i^{m_1\ldots m_n}(t) \tag{1.10}$$

Здесь $B_i^{m_1\ldots m_n}(t)$ — линейные функции уже вычисленных величин $A_s^{k_1\ldots k_n}(t)$ с периодическими периода τ и разрывными при $t = t_\alpha$ коэффициентами. Будем искать периодическое решение системы (1.10), имеющее разрывы при $t = t_\alpha$, определяемые из (1.9).

Предположим, что все входящие в $B_i^{m_1\ldots m_n}(t)$ коэффициенты преобразования (1.5) вышли периодическими, покажем, что тогда и $A_i^{m_1\ldots m_n}(t)$ можно выбрать периодическим. Действительно, если $m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n - \lambda_i = 0$, то для того чтобы $A_i^{m_1\ldots m_n}(t)$ было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_i^{m_1\ldots m_n} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau B_i^{m_1\ldots m_n}(t)\, dt + \sum_{\alpha=1}^{h} \Delta_\alpha A_i^{m_1\ldots m_n}$$
$$(\Delta_\alpha A_i^{m_1\ldots m_n} = A_i^{m_1\ldots m_n}(t_\alpha + 0) - A_i^{m_1\ldots m_n}(t_\alpha - 0)) \tag{1.11}$$

где h — количество поверхностей разрыва.

Все интегралы существуют, так как разрывы подынтегральных функций — первого рода. Если же $m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n - \lambda_i \neq 0$, то уравнение (1.10) имеет периодическое решение при любом постоянном $a_i^{m_1\ldots m_n}$. Поэтому можно положить $a_i^{m_1\ldots m_n} = 0$.

Таким образом, можно определить последовательно коэффициенты преобразования (1.5). Это преобразование таково, что устойчивость по отношению к переменным y_s эквивалентна устойчивости по отношению к переменным u_j.

Очевидно также, что для членов $U_i(u, t)$ в системе (1.6) справедлива оценка

$$|U_i(u,t)| < a_2 |u|^{N+1} \qquad (|u| = \sqrt{|u_1|^2 + \ldots + |u_n|^2}) \tag{1.12}$$

§ 2. Переходим теперь к исследованию устойчивости решения $z = z^0(t)$. Предположим, что l характеристических чисел матрицы A равны нулю, $2r$ характеристических чисел являются чисто мнимыми

$$\lambda_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, l), \qquad \lambda_{k+l} = \omega_k \sqrt{-1}, \qquad \lambda_{k+l+r} = -\omega_k \sqrt{-1} \quad (k = 1, \ldots, r)$$

Допустим, что между собственными частотами не существует соотношений

$$m_1\omega_1 + \ldots + m_r\omega_r = 0 \qquad \text{при любых целых } m_1, \ldots, m_r \tag{2.1}$$

Кроме того, предположим, что l нулевым характеристическим числам матрицы A соответствуют простые элементарные делители. Остальные характеристические числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части (если действительная часть хотя бы одного из характеристических чисел матрицы A будет положительной, то, как показано в работе [2], решение $z = z^\circ(t)$ будет неустойчивым). Особенностью системы (1.6), к которой приводится система (0.1) в центральных областях, является то, что переменные $u_{l+2r+1}, \ldots, u_n$ из устойчивой части системы входят в критическую часть системы только в члены $U_i(u, t)$ $(i = 1, \ldots, l + 2r)$.

Поэтому более точно критическую часть системы (1.6) можно записать в виде

$$\begin{gathered} u_i^{\boldsymbol\cdot} = \lambda_i u_i + \sum a_i^{m_1 \ldots m_{l+2r} 0 \ldots 0} u_1^{m_1} \ldots u_{l+2r}^{m_{l+2r}} + U_i(u, t) \\ (i = 1, 2, \ldots, l + 2r;\ 2 \leqslant m_1 + \ldots + m_{l+2r} \leqslant N) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Заменим теперь в системе (2.2) переменные, соответствующие чисто мнимым характеристическим числам матрицы A, формулами

$$u_{l+k} = \rho_k e^{i\vartheta_k}, \qquad u_{l+r+k} = \rho_k e^{-i\vartheta_k} \tag{2.3}$$

Тогда система (2.2) примет вид

$$\begin{aligned} u_j^{\boldsymbol\cdot} &= \sum_{m=\nu}^{N} V_j^{(m)}(u_1, \ldots, u_l, \rho_1, \ldots, \rho_r) + V_j(u, \rho, \vartheta, t) \\ \rho_k^{\boldsymbol\cdot} &= \sum_{m=\nu}^{N} R_k^{(m)}(u_1, \ldots, u_l, \rho_1, \ldots, \rho_r) + R_k(u, \rho, \vartheta, t) \\ \vartheta_k^{\boldsymbol\cdot} &= \sum_{m=2}^{N} \theta_k^{(m)}(u_1 \ldots u_l, \rho_1, \ldots, \rho_r) + \theta_k(u, \rho, \vartheta, t) + \omega_k \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь $V_j^{(m)}(u, \rho)$, $R_k^{(m)}(u, \rho)$, $\theta_k^{(m)}(u, \rho)$ — формы порядка m с постоянными действительными коэффициентами (в силу действительности исходной системы (0.1)).

Устойчивая часть системы после преобразования (2.3) примет вид

$$u_i^{\boldsymbol\cdot} = \lambda_i u_i + \alpha_{i-1} u_{i-1} + \sum_{m=2}^{N} U_k^{(m)}(u, \rho, \vartheta) + U_k(u, \rho, \vartheta, t) \tag{2.5}$$

где $U_k^{(m)}(u, \rho, \vartheta)$ — формы порядка m относительно переменных $u_1, \ldots, u_l, \rho_1, \ldots$ $\ldots \rho_r, u_{l+2r+1}, \ldots, u_n$ с периодическими и непрерывными по ϑ коэффициентами.

Как известно [5,6], можно, изменяя только устойчивые переменные по формулам

$$u_i = \zeta_i + \varphi_i(u_1, \ldots, u_l, \rho_1, \ldots, \rho_r, \vartheta_1 \ldots \vartheta_r) \tag{2.6}$$

добиться того, чтобы в разложении правой части устойчивой части системы уравнений при $\zeta_{l+2r+1} = \ldots = \zeta_n = 0$ присутствовали члены из критической части системы в степенях, больших N. После применения преобразования (2.6) система (2.5) примет вид

$$\zeta_i^{\boldsymbol\cdot} = \lambda_i\zeta_i + \alpha_{i-1}\zeta_{i-1} + Z_i(u, \rho, \vartheta, \zeta, t) \tag{2.7}$$

где $Z_i(u, \rho, \vartheta, \zeta, t)$ удовлетворяют при малых $|\rho + u| + |\zeta|$ неравенству

$$|Z_i(u, \rho, \vartheta, \zeta, t)| < \gamma(|\rho + u|^N + |\rho + u||\zeta| + |\zeta|^2) \qquad (\gamma = \text{const} > 0) \tag{2.8}$$

В результате преобразований система (0.1) в центральных областях примет вид

$$\begin{aligned} u_j^{\cdot} &= V_j^{(\nu)}(u, \rho) + V_j(u, \rho, \vartheta, \zeta, t), & \vartheta_k^{\cdot} &= \omega_k + \theta_k(u, \rho, \vartheta, \zeta, t) \\ \rho_k^{\cdot} &= R_k^{(\nu)}(u, \rho) + R_k(u, \rho, \vartheta, \zeta, t), & \zeta_i^{\cdot} &= \lambda_i\zeta_i + \alpha_{i-1}\zeta_{i-1} + Z_i(u, \rho, \vartheta, \zeta, t) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Здесь $V_j(u, \rho, \vartheta, \zeta, t)$ и $R_k(u, \rho, \vartheta, \zeta, t)$ — периодические функции ϑ и t, удовлетворяющие при достаточно малых $|u + \rho| + |\zeta|$ неравенствам

$$\begin{aligned} &|R_j(u, \rho, \vartheta, \zeta, t)| < \alpha(|\rho + u|^{\nu+1} + |\zeta|^2) && (\alpha = \text{const} > 0) \\ &|V_j(u, \rho, \vartheta, \zeta, t)| < \beta_1(|\rho + u|^{\nu+1} + |\zeta|^2) && (\beta_1 = \text{const} > 0) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Можно доказать следующую теорему.

Теорема. Если нулевое решение системы

$$u_j^{\cdot} = V_j^{(\nu)}(u, \rho), \qquad \rho_k^{\cdot} = R_k^{(\nu)}(u, \rho) \tag{2.11}$$

устойчиво асимптотически, то нулевое решение системы (2.9) также устойчиво асимптотически. Действительно, в силу асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.11) существует [7] непрерывно дифференцируемая функция $V_1(u, \rho)$, удовлетворяющая следующим неравенствам

$$\begin{aligned} &b_1|u+\rho|^B \leqslant V_1(u, \rho) \leqslant b_2|u + \rho|^B, && \left|\frac{\partial V_1}{\partial u_j}\right| \leqslant b_4|u + \rho|^{B-1} \\ &\left(\frac{dV_1}{dt}\right)_{(2.11)} \leqslant -b_3|u + \rho|^{B+\nu-1}, && \left|\frac{\partial V_1}{\partial \rho_k}\right| \leqslant b_4|u + \rho|^{B-1} \end{aligned} \tag{2.12}$$

где B, b_1, b_2, b_3, b_4 — положительные постоянные.

Построим функцию $V_2(\zeta)$ для линейной части системы (2.7), удовлетворяющую неравенствам

$$c_1|\zeta|^2 \leqslant V_2(\zeta) \leqslant c_2|\zeta|^2$$

$$\left(\frac{dV_2}{dt}\right)_0 = \sum_{s=l+2r+1}^{n} \frac{\partial V_2}{\partial \zeta_s}(\lambda_s\zeta_s + \alpha_{s-1}\zeta_{s-1}) \leqslant -c_3|\zeta|^2, \qquad \left|\frac{\partial V_2}{\partial \zeta_s}\right| \leqslant c_4|\zeta| \tag{2.13}$$

Проследим теперь за изменением функции

$$V(u, \rho, \zeta) = V_1(u, \rho) + V_2(\zeta) \tag{2.14}$$

вдоль разрывных траекторий системы (2.9), в которые переходят непрерывные траектории системы (0.1) в окрестности решения $z = z^\circ(t)$.

В центральных областях пространства $(u, \rho, \zeta, \vartheta, t)$, в которые отображаются центральные области пространства (x, t), функция $V(u, \rho, \zeta)$ удовлетворяет неравенству

$$V(u, p, \zeta) \leqslant b_2|u + \rho|^B + c_2|\zeta|^2 \tag{2.15}$$

Вычислим теперь $V^{\cdot}$ в силу системы (2.9):

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{(2.9)} = \left(\frac{dV_1}{dt}\right)_{(2.11)} + \left(\frac{dV_2}{dt}\right)_0 + \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial V_1}{\partial \rho_k} R_k + \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial V_1}{\partial u_j} V_j + \sum_{i=l+2r+1}^{n} \frac{\partial V_2}{\partial \zeta_i} Z_i \tag{2.16}$$

В силу оценок (2.12), (2.13), (2.8) и (2.10) получим неравенства

$$\left|\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial V_1}{\partial \rho_k} R_k + \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial V_1}{\partial u_j} V_j\right| \leqslant b_4(\alpha + \beta_1)|u + \rho|^{B-1}(|u + \rho|^{\nu+1} + |\zeta|^2) \tag{2.17}$$

$$\left|\sum_{i=l+2r+1}^{n} \frac{\partial V_2}{\partial \zeta_i} Z_i\right| \leqslant c_4|\zeta|\gamma(|\rho + u|^N + |u + \rho|(|\zeta| + |\zeta|^2) \tag{2.18}$$

Если $N \geqslant B + \nu$ и $|u + \rho| + |\zeta|$ — достаточно малая величина, то для (2.16) получим оценку

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{(2.13)} < -d_1 |u + \rho|^{B+\nu} - d_2 |\zeta|^2 < -\mu^2 (|u + \rho| + |\zeta|)^{B+\nu} \qquad (2.19)$$

где d_1 и d_2 — положительные постоянные.

В силу того что постоянная B в неравенствах (2.12) является достаточно большой [7], из неравенства (2.15) следует

$$V(u, \rho, \zeta) < \mu_1^2 (|u + \rho| + |\zeta|)^2 \qquad (2.20)$$

Сопоставляя неравенства (2.19) и (2.20), получим

$$\frac{dV}{dt} < -\mu^2 (\mu_1^{-2} V)^{1/2(B+\nu)} \qquad (2.21)$$

$$V < V_0 [1 + V_0^{N_1} \beta (t - t_0)]^{-1/N_1}, \qquad \beta = N_1 \mu^2 \mu_1^{-2(N_1+1)}, \qquad N_1 = 1/2 (B + \nu + 1) \quad (2.22)$$

Проследим теперь за изменением $V(u, \rho, \zeta)$ в угловых областях. Поскольку нулевое решение системы (2.11) является по предложению асимптотически устойчивым, то оно будет таковым и для системы

$$u_j^{\cdot} = \sum_{m=\nu}^{N} V_j^{(m)}(u, \rho), \qquad \rho_k^{\cdot} = \sum_{m=\nu}^{N} R_k^{(m)}(u, \rho) \qquad (j = 1, \ldots, l;\ k = 1, \ldots, r)$$

$$\zeta_i^{\cdot} = \lambda_i \zeta_i + \alpha_{i-1} + \zeta_{i-1} + \sum_{m=2}^{N} Z_i^{(m)}(u, \rho, \vartheta, \zeta) \qquad (i = l + 2r + 1, \ldots, n)$$

$$N > (N_1 + 1) B - 1 \qquad (2.23)$$

Непрерывному решению системы (2.23) соответствует разрывное решение системы (0.16) + (0.18) первого приближения N-го порядка.

Если через η обозначить вектор $\eta = u + \rho + \zeta$, то $V(\eta^+) = V(\eta^-)$ при $\eta^+ = \eta^-$. Тогда

$$V(x^+, t_\alpha) = V(x^-, t_\alpha) + o(|x|^{N+1}) \qquad \text{при } x^+ = S(x^-) + o(|x|^N) \qquad (2.24)$$

Обозначим теперь через $M(x_1, t_1)$ точку пересечения траектории системы (0.5) с поверхностью разрыва $\Phi_\alpha(x, t) = 0$, тогда по построению системы первого приближения

$$x = x^+ + o(|x|^N) \qquad (2.25)$$

где x — точка на траектории системы (0.5) при $t = t_\alpha$.

Из сопоставления равенств (2.24), (2.25) следует, что

$$V(x, t_\alpha) = V(x^-, t_\alpha) + o(|x|^{N+1}) \qquad (2.26)$$

Отсюда непосредственно следует

$$-\varkappa < V^{-N_1}(x^-, t_\alpha) - V^{-N_1}(x, t_\alpha) < \varkappa \qquad (2.27)$$

где $\varkappa$ — сколь угодно малое положительное число.

Выберем теперь цилиндр радиуса δ достаточно малым так, чтобы время пребывания траектории в любой угловой области было достаточно малым и чтобы при этом

$$\varkappa < \beta T \qquad (T = \min |t_{\alpha+1} - t_\alpha|) \qquad (2.28)$$

Радиус цилиндра можно выбрать настолько малым, чтобы плоскости $t = t_\alpha^* = 1/2\,[t_{\alpha+1} + t_\alpha]$ внутри цилиндра C не пересекали угловых областей.

Коэффициент возрастания $V(x, t)$ в угловых областях конечен [2]. Обозначим наибольший коэффициент возрастания через Q. Возьмем начальную точку $x_1^* = x(t_1^*)$ внутри цилиндра $V = \delta_1 = \delta / Q$.

При изменении t в пределах $t_1^* \leqslant t \leqslant t_2^*$ функция $V(x, t)$ вдоль интегральной кривой системы (0.5) убывает в центральной области до точки (x_1, t_1) — пересечения кривой с поверхностью разрыва. Далее, в угловой области она может возрастать, однако это возрастание будет компенсироваться скачком функции при $t = t_\alpha$.

Действительно, в силу (2.22)

$$V(x_1, t_1) < V_1 [1 + V_1^{N_1} \beta (t_1 - t_1^*)]^{-1/N_1}, \qquad V_1 = V(x_1^*, t_1^*) \tag{2.29}$$

Далее (2.30)

$$V(x^-, t_\alpha) < V(x_1, t_1) [1 + V^{N_1} (x_1, t_1) \beta (t_\alpha - t_1)]^{-1/N_1} < V_1 [1 + V_1^{N_1} \beta (t_\alpha - t_1^*)]^{-1/N_1}$$

В силу (2.27)

$$V(x, t_\alpha) < V(x^-, t_\alpha) [1 - \varkappa V^{N_1} (x^-, t_\alpha)]^{-1/N_1} \tag{2.31}$$

Сопоставляя (2.31) и (2.30), получим

$$V(x, t_\alpha) < V_1 \{1 + V_1^{N_1} [\beta (t_\alpha - t_1^*) - \varkappa]\}^{-1/N_1}$$

В следующей центральной области функция $V(x, t)$ будет убывать согласно (2.29)

$$V_2 = V(x_2^*, t_2^*) < V_1 \{1 + V_1^{N_1} [\beta (t_2^* - t_1^*) - \varkappa]\}^{-1/N_1} < V_1$$

так как по предположению $\varkappa$ удовлетворяет неравенству (2.28).

Если учесть, что коэффициент возрастания $V(x, t)$ в угловых областях не превосходит Q, то можно заключить, что интегральная кривая в интервале $t_1^* \leqslant t \leqslant t_2^*$ проходит внутри цилиндра $V = \delta$. Повторяя предыдущие выкладки в следующих областях при $t_2^* \leqslant t \leqslant t_3^*, \ldots, t_i^* \leqslant t \leqslant t^*_{i+1}$ и т. д., получим

$$V_{i+1} < V_i \{1 + V_i^{N_1} [\beta (t_{i+1}^* - t_i^*) - \varkappa]\}^{-1/N_1} < V_i [1 + V_i^{N_1} (\beta T - \varkappa)]^{-1/N_1} < V_i \tag{2.32}$$

В силу неравенств (2.32) последовательность $\{V_i\}$ имеет предел.

Допустим, что этот предел отличен от нуля, т. е. $\lim V_i = V > 0$ при $i \to \infty$. Тогда V должно удовлетворять неравенству

$$V \leqslant V [1 + V^{N_1} (\beta T - \varkappa)]^{-1/N_1} \qquad \text{или} \qquad V \leqslant 0$$

Таким образом, доказано, что $\lim V_i = 0$ при $i \to \infty$; отсюда следует асимптотическая устойчивость решения $z = z^\circ(t)$ системы (0.1).

Теорема утверждает, кроме того, что для решения вопроса об устойчивости нужно искать приближение порядка ν, поскольку коэффициенты системы (2.11) зависят только от коэффициентов приближения порядка ν.

В заключение рассмотрим случай, когда матрица A имеет одно характеристическое число, равное нулю, а остальные характеристические числа имеют отрицательные вещественные части. В этом случае система (2.11) будет состоять из одного уравнения

$$u_1^{\cdot} = g u_1^\nu$$

Тогда справедлива теорема: если ν — нечетное число, а $g < 0$, то решение $z = z^\circ(t)$ системы (0.1) устойчиво асимптотически.

Поступила 1 VI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Устойчивость по линейному приближению периодических решений системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. ДАН СССР, 1957, т. 116, № 4.
2. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Устойчивость по линейному приближению периодического решения системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. ПММ, 1957, т. 21, вып. 5.
3. Цыпкин Я. З. Теория релейных систем автоматического регулирования. Гостехиздат, 1955.
4. Ливартовский И. В. Об устойчивости решения системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. ПММ, 1959, т. 23, вып. 3.
5. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат, 1952.
6. Зубов В. И. Методы А. М. Ляпунова и их применение. Изд. Ленингр. ун-та, 1957.
7. Красовский Н. Н. Об устойчивости по первому приближению. ПММ, 1955, т. 19, вып. 5.