ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЧАСТИЧНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Г. К. Пожарицкий (Москва)

При помощи теоремы Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского [1] исследуется влияние частичной диссипации на колебания механических систем в окрестности положения равновесия, устойчивого при одних потенциальных силах.

Уточняются и дополняются результаты, полученные в работе [2].

Вычисляются приближенно коэффициенты затухания и частоты системы с малой и большой диссипациями.

1. Рассмотрим линейную механическую систему в окрестности устойчивого положения равновесия в изолированном минимуме потенциальной энергии, подверженную действию диссипативных сил с диссипативной функцией

$$F=-\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{n}\alpha_{ij}x_i^{\cdot}x_j^{\cdot}$$

Здесь α_{ij} — постоянные, F — постоянно отрицательная форма, которая имеет ранг k, вообще говоря, меньший n — числа степеней свободы, т. е. диссипация не является полной.

Пусть $x_1,\ldots,x_n$ — нормальные координаты. Уравнения движения имеют вид

$$x_i^{\cdot\cdot}+\lambda_i^2x_i+(\alpha_{i1}x_1^{\cdot}+\ldots+\alpha_{in}x_n^{\cdot})=0\qquad(i=1,\ldots,n)\tag{1.1}$$

Пусть среди чисел $\lambda_1^2,\ldots,\lambda_n^2$ нет ни одного, равного нулю, и имеется группа равных между собой $\lambda_1^2=\ldots=\lambda_r^2$, и пусть ни одно из остальных чисел не равно λ_1^2. Заметим, что переменные $x_1,\ldots,x_r$ можно подвергнуть любому ортогональному преобразованию, и это преобразование повлияет только на диссипативные коэффициенты.

Пусть

$$F_r=-\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{r}\alpha_{ij}x_i^{\cdot}x_j^{\cdot}$$

часть диссипативной функции, зависящая только от $x_1^{\cdot},\ldots,x_r^{\cdot}$. Приводя ее ортогональным преобразованием к каноническому виду и сохраняя для новых переменных и коэффициентов α'_{ij} старые обозначения, получим

$$F=-\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{m\leqslant r}\alpha_{ii}x_i^{\cdot 2}+2\sum_{i>r,\,j\leqslant r}\alpha_{ij}x_i^{\cdot}x_j^{\cdot}+\sum_{ij=r+1}^{n}\alpha_{ij}x_i^{\cdot}x_j^{\cdot}\Big)$$

Теорема 1.1. Для того чтобы после добавления диссипативных сил изолированное равновесие стало асимптотически устойчивым по отношению к нормальной координате x_k, принадлежащей группе нормальных координат $x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_r$, отвечающих частоте λ_1, необходимо и достаточно, чтобы

$$F_r=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m\leqslant r}\alpha_{ii}x_i^{\cdot 2}$$

— часть диссипативной функции, зависящая только от скоростей $x_1^{\cdot},\ldots,x_r^{\cdot}$, могла обращаться в нуль только при $x_k^{\cdot}=0$. В противном случае координата x_k остается не затронутой диссипацией и будет совершать гармонические колебания с частотой λ_1.

Для того чтобы равновесие было асимптотически устойчивым по отношению ко всем координатам, необходимо и достаточно, чтобы все функции F_r были знакоопределенными по отношению к своим переменным. Для частоты λ_i, имеющей первую кратность, это требование эквивалентно условию $\alpha_{ii}\neq 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть какой-либо коэффициент в каноническом виде F_r равен нулю. Не ограничивая общности, будем считать, что это α_{11}.

Если $\alpha_{11}=0$, то переменная $x_1^{\cdot}$ вообще не входит в диссипативную функцию. Действительно, предположим, что в F входит слагаемое вида $2\alpha_{s1}x_1^{\cdot}x_s^{\cdot}$, где x_s— ка-

кая-либо из скоростей ($s \neq 1$); тогда, полагая равными нулю все скорости, кроме $x_1^{\cdot}$ и $x_s^{\cdot}$, получим

$$-2F = 2\alpha_{s1}x_1^{\cdot} x_s^{\cdot} + \alpha_{ss}x_s^{\cdot 2}$$

Очевидно, что если $\alpha_{s1} \neq 0$, то F может принимать значения любого знака, что противоречит предположению о том, что F — постоянно отрицательная.

Итак, все α_{s1} — нули и $x_1^{\cdot}$ вообще не входит в диссипативную функцию. Это значит, что диссипативные члены вообще не войдут в первое уравнение и координата x_1 не будет затронута диссипацией. Необходимость доказана.

Достаточность. Из теоремы Е. А. Барабашина и Н. Н. Красовского [1], примененной к уравнению

$$\frac{d}{dt}(T - U) = 2F$$

(здесь T — кинетическая энергия, а U — силовая функция), заключаем, что любое возмущенное движение будет при $t \to \infty$ асимптотически стремиться либо к некоторой точке траектории уравнений (1.1), целиком лежащей в области $F = 0$, либо к началу координат ($x_i = x_i^{\cdot} = 0$). На этой траектории обязательно уничтожаются все частные производные $\partial F / \partial x_i^{\cdot}$ и все производные по времени от этих линейных форм, взятые в силу уравнений движения.

Пусть x_1 соответствует корню λ_1 и пусть

$$-\frac{\partial F}{\partial x_1^{\cdot}} = \alpha_{11}x_1^{\cdot} + u_{21}^{\cdot}(\lambda_2) + \ldots + u_{n1}^{\cdot}(\lambda_n)$$

где $u_{21}^{\cdot}(\lambda_2)$ — линейная форма от скоростей $x_j^{\cdot}$, отвечающих корню λ_2, и т. д. Если система (1.1) допускает решения, вдоль которых $F = 0$, то все эти решения должны необходимо лежать в области

$$\frac{\partial F}{\partial x_i^{\cdot}} = 0, \qquad \frac{d}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i^{\cdot}}\right) = 0$$

причем эти последние производные должны быть вычислены в силу уравнений (1.1), в которых положено $dF / dx_i^{\cdot} = 0$. Вычисляя вторую производную от $dF / dx_1^{\cdot}$ в силу уравнений (1.1), получим

$$-\frac{d}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1^{\cdot}}\right) = w_1 = \alpha_{11}\lambda_1^2x_1^{\cdot} + \lambda_2^2u_2^{\cdot} + \ldots + \lambda_n^2u_n^{\cdot} = 0$$

Вычитая из последней строки $\lambda_2^2dF / dx_1^{\cdot}$, получим

$$w_2 = \alpha_{11}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)x_1^{\cdot} + (\lambda_3^2 - \lambda_2^2)u_3^{\cdot} + \ldots + (\lambda_n^2 - \lambda_2^2)u_n^{\cdot} = 0$$

В итоге получим, что форма w_2, не содержащая $u_2^{\cdot}$ и содержащая $x_1^{\cdot}$, существенно ($\alpha_{11}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \neq 0$) должна обращаться в нуль.

Дифференцируя эту форму дважды, в силу уравнений (1.1), имеем

$$w_3 = \alpha_{11}\lambda_1^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)x_1^{\cdot} + \lambda_3^2(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)u_3^{\cdot} + \ldots + \lambda_n^2(\lambda_n^2 - \lambda_2^2)u_n^{\cdot} = 0$$

Вычитая из нее $\lambda_3^2w_2$, получим

$$w_4 = \alpha_{11}(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)x_1^{\cdot} + (\lambda_4^2 - \lambda_2^2)u_4^{\cdot} + \ldots = 0$$

Продолжая этот процесс далее, приходим к выводу, что $x_1^{\cdot} = 0$, а это значит, что $x_1 = 0$ и т. д. Доказательство закончено.

Замечание. Если среди $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ есть нули и равновесие не является изолированным, то, рассуждая по той же схеме, придем к выводу, что все нормальные координаты и скорости, отвечающие ненулевым частотам, будут либо исчезать со временем, либо колебаться.

Для группы переменных, отвечающих $\lambda_1 = 0$, получим

$$\alpha_{11}x_1^{\cdot} = \ldots = \alpha_{mm}x_m^{\cdot} = 0, \qquad x_1 = c_1, \ldots, x_m = c_m$$

Если $m = r$, то движение будет асимптотически приближаться к равновесию $x_1 = c_1, \ldots, x_m = c_m$; если $m < r$, то $x_{m+1} = v_{0,m+1}t + c_{m+1}$ и т. д.

Нетрудно заметить, что если выполняются необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости линейной системы и среди частот нет нулевых, то асимптотическая устойчивость сохранится при добавлении любых членов высшего порядка. Свойства, отмеченные в замечании, могут быть нарушены в нелинейной системе.

2. Предположим, что диссипативная функция содержит малый множитель s и имеет вид $F = sF_1$, а диссипативные силы имеют вид $sdF_1 \,/\, dx_i^{\cdot}$, где $dF_1 \,/\, dx_i^{\cdot}$ сравнимы по величине с потенциальными силами. Пусть теперь $x_1^{\cdot}, \ldots, x_r^{\cdot}$ — переменные, отвечающие частоте λ_1. Будем искать корень характеристического уравнения под видом

$$\mu_1 = \lambda_1 i + a_1 s + b_1 s^2 \qquad (i = \sqrt{-1})$$

Подставляя его в характеристическое уравнение системы (1.1) и вводя δ_{ij} — символ Кронекера, получим

$$\| \delta_{ij} (\mu^2 + \lambda_i^2) + \mu s \alpha_{ij} \| = \Delta = 0$$

отсюда с точностью до порядка s^{2r} имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Lambda_{11} & \ldots & 0 & \alpha_{1r+1}\lambda_1 is & \ldots & \alpha_{1n}\lambda_1 is \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & \Lambda_{rr} & \alpha_{rr+1}\lambda_1 is & \ldots & \alpha_{rn}\lambda_1 is \\ \alpha_{1r+1}\lambda_1 is & \ldots & \alpha_{rr+1}\lambda_1 is & \lambda_{r+1}^2 - \lambda_1^2 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n}\lambda_1 is & \ldots & \alpha_{rn}\lambda_1 is & 0 & \ldots & \lambda_n^2 - \lambda_1^2 \end{vmatrix} = 0$$

где

$$\Lambda_{jj} = (2a_1 + \alpha_{jj})\, \lambda_1 is + k_1 s^2 \qquad (j = 1, \ldots, r); \qquad (k_1 = a_1^2 - a_1\alpha_{11} + 2b_1\lambda_1 i)$$

Выносия из первых r строк множитель $\lambda_1 is$, имеем

$$\Delta = (\lambda_1 is)^r\, (2a_1 + \alpha_{11}) \ldots (2a_1 + \alpha_{rr})\, (\lambda_{r+1}^2 - \lambda_1^2) \ldots (\lambda_n^2 - \lambda_1^2) + O\,(s^r) = 0$$

Отсюда

$$a_1^1 = {}^1\!/_2\, \alpha_{11}, \ldots, a_1^r = {}^1\!/_2\, \alpha_{rr} \tag{2.1}$$

Если среди величины $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{rr}$ нет равных между собой, то аналогичным приемом легко получить для определения k_1 уравнение

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{k_1}{\lambda_1^2} & \alpha_{1,\, r+1} & 0 \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{1,\, r+1} & \lambda_{r+1}^2 - \lambda_1^2 & 0 \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & 0 & 0 \ldots & \lambda_n^2 - \lambda_1^2 \end{vmatrix} = 0$$

Отсюда получим

$$\frac{k_1}{\lambda_1^2} = -\frac{\alpha_{1,\, r+1}^2}{\lambda_{r+1}^2 - \lambda_1^2} - \ldots - \frac{\alpha_{1n}^2}{\lambda_n^2 - \lambda_1^2}$$

Но, с другой стороны,

$$k_1 = a_1^2 - a_1\alpha_{11} + 2b_1\lambda_1 i = -{}^1\!/_4\, \alpha_{11}^2 + 2b_1\lambda_1 i$$

Решая относительно b_1, имеем

$$b_1^{(1,2)} = \pm \frac{i}{2\lambda_1} \left(\frac{\alpha_{11}^2}{4} - \lambda_1^2 \sum_{j=r+1}^{n} \frac{\alpha_{1j}^2}{\lambda_j^2 - \lambda_1^2} \right)$$

и аналогично

$$b_2^{(1,2)} = \pm \frac{i}{2\lambda_1} \left(\frac{\alpha_{22}^2}{4} - \lambda_1^2 \sum_{j=r+1}^{n} \frac{\alpha_{2j}^2}{\lambda_j^2 - \lambda_1^2} \right) \qquad \text{и т. д.}$$

В итоге приходим к выводу, что если среди коэффициентов канонического вида квадратичной формы F_r, отвечающих переменным $x_1^{\cdot}, \ldots, x_r^{\cdot}$ и частоте λ_1, нет равных между собой, то характеристические показатели с точностью до членов порядка s^3 будут иметь вид

$$\mu_j = -\frac{1}{2}\alpha_{jj}s \pm i\left[\lambda_1 + \frac{s^2}{2\lambda_1}\left(\frac{\alpha_{jj}^2}{4} - \sum_{i=r+1}^{n}\frac{\alpha_{ji}^2}{\lambda_i^2-\lambda_1^2}\right)\right]$$

3. Рассмотрим влияние большой диссипации с диссипативной функцией F вида

$$F = \frac{1}{s}F_1 = -\frac{1}{2s}\sum_{ij=1}^{n}\alpha_{ij}x_i^{\cdot}x_j^{\cdot} = -\frac{1}{2s}\sum_{ij=1}^{k<n}\beta_{ij}z^{\cdot}_i z^{\cdot}_j$$

Здесь s — малый множитель, $k<n$ — ранг формы F, которая является определенно отрицательной по отношению к $z_1^{\cdot},\ldots,z_k^{\cdot}$ — линейным формам исходных скоростей. Предположим также, что F делает исходное равновесие асимптотически устойчивым. Пусть $z_1^{\cdot},\ldots,z_k^{\cdot}$ выражаются через канонические импульсы системы

$$z_i^{\cdot} = \theta_{i1}\frac{\partial T}{\partial x_1^{\cdot}} + \ldots + \theta_{in}\frac{\partial T}{\partial x_n^{\cdot}} \qquad (i=1,\ldots,k) \tag{3.1}$$

Рассмотрим замену переменных

$$x_j = \theta_{1j}y_1 + \ldots + \theta_{kj}y_k + \ldots + \theta_{nj}y_n \tag{3.2}$$

где $\theta_{i1},\ldots,\theta_{in}$ $(i\leqslant k)$ взяты из формул (3.1), а остальные θ_{ij} произвольны и связаны только тем условием, чтобы преобразование (3.2) было неособенным. В новых переменных имеют место равенства

$$\frac{\partial T}{\partial y_i^{\cdot}} = \theta_{i1}\frac{\partial T}{\partial x_1^{\cdot}} + \ldots + \theta_{in}\frac{\partial T}{\partial x_n^{\cdot}} = z_i^{\cdot} \qquad (i=1,\ldots,k)$$

Заменяя $y_1^{\cdot},\ldots,y_k^{\cdot}$ через $z_1^{\cdot},\ldots,z_k^{\cdot}$, согласно теореме Рауса [3], получим, что в переменных $z_1^{\cdot},\ldots,z_k^{\cdot}, y_{k+1}^{\cdot},\ldots,y_n^{\cdot}$ кинетическая энергия будет иметь вид

$$T = T_1(z_1^{\cdot},\ldots,z_k^{\cdot}) + T_2(y_{k+1}^{\cdot},\ldots,y_n^{\cdot})$$

и не будет содержать произведений $y_i^{\cdot}z_j^{\cdot}$. Обе квадратичные формы T_1 и T_2 будут определенно положительными функциями входящих в них переменных. Поэтому формы T_1 и F возможно одновременным преобразованием привести к сумме квадратов

$$2T_1 = z_1^{\cdot 2} + \ldots + z_k^{\cdot 2}, \qquad -2sF = a_{11}z_1^{\cdot 2} + \ldots + a_{kk}z_k^2$$

Пусть силовая функция U в переменных $z_1,\ldots,z_k, y_{k+1},\ldots,y_n$ имеет вид

$$U = U_1(z_1,\ldots,z_k) + U_2(z_j, y_i) + U_3(y_{k+1},\ldots,y_n)$$

где U_1 зависит только от переменных $z_1,\ldots,z_k$; U_2 содержит только произведения z_jy_i, а U_3 — только переменные $y_{k+1},\ldots,y_r$. Слагаемое U_3 представляет определенно отрицательную квадратичную форму своих переменных, которая может быть одновременно с T_2 приведена ортогональным преобразованием к сумме квадратов

$$2T_2 = y_{k+1}^{\cdot 2} + \ldots + y_n^{\cdot 2}, \quad 2U_3 = -\nu_{k+1}^2y_{k+1}^2 - \ldots - \nu_n^2y_n^2$$

Сохраняя для всех новых переменных старые обозначения, будем помнить, однако, что все сделанные выводы относятся к коэффициентам системы уравнений, в которой кинетическая энергия T, силовая функция U и диссипативная функция F при помощи линейной замены записаны в специальной форме

$$2T = z_1^{\cdot 2} + \ldots + z_k^{\cdot 2} + y_{k+1}^{\cdot 2} + \ldots + y_n^{\cdot 2}$$

$$2U = -\sum_{ij=1}^{k}c_{ij}z_iz_j - 2\sum_{i>k,\ j\leqslant k}c_{ij}z_jy_i - \nu_{k+1}^2y_{k+1}^2 - \ldots - \nu_n^2y_n^2 \tag{3.3}$$

$$-2sF = a_{11}z_1^{\cdot 2} + \ldots + a_{kk}z_k^{\cdot 2}$$

Прежде чем продолжать исследование, докажем вспомогательную лемму.

Лемма 3.1. Если введенная диссипация сделает равновесие асимптотически устойчивым, то среди коэффициентов $\nu_{k+1}^2,\ldots,\nu_n^2$ не может быть равных между собой

Доказательство. Полагая в формулах (3.3) величины $z_1 = \ldots = z_k = 0$, получим

$$2T^\circ = y_{k+1}^{\cdot 2} + \ldots + y_n^{\cdot 2}, \qquad 2U^\circ = -\nu_{k+1}^2 y_{k+1}^2 - \ldots - \nu_n^2 y_n^2$$

Отсюда видно, что $\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n$ суть главные частоты системы, которая получится из исходной после введения дополнительных связей $z_1 = \ldots = z_k = 0$.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — нормальные координаты исходной системы, а $z_1, \ldots, z_k$ выражаются через $x_1, \ldots, x_n$ по формулам

$$z_i = \gamma_{i1} x_1 + \ldots + \gamma_{in} x_n$$

Дифференцируя эти уравнения один раз по времени, получим

$$z_i^{\cdot} = \gamma_{i1} x_1^{\cdot} + \ldots + \gamma_{in} x_n^{\cdot} \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

Система скоростей $z_1^{\cdot} = \ldots = z_k^{\cdot} = 0$ обращает диссипативную функцию в нуль и следовательно, она эквивалентна системе

$$\begin{aligned} -2s\frac{\partial F}{\partial x_1^{\cdot}} &= \alpha_{11} x_1^{\cdot} + u_{21}^{\cdot}(\lambda_2) + \ldots + u_{n1}^{\cdot}(\lambda_n) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -2s\frac{\partial F}{\partial x_n^{\cdot}} &= u_{1n}^{\cdot}(\lambda_1) + \ldots + u_{nn}^{\cdot}(\lambda_n) = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Формы $u_{ij}^{\cdot}$ уже встречались в первом параграфе. В них через $u_{21}^{\cdot}(\lambda_2)$ обозначена часть первой строки, зависящая от скоростей, отвечающих частоте λ_2, через $u_{31}^{\cdot}(\lambda_2)$ — часть первой строки, отвечающая корню λ_3, и т. д.

Поскольку система $z_1^{\cdot} = \ldots = z_k^{\cdot} = 0$ эквивалентна системе (3.4), то и система $z_1 = \ldots = z_k = 0$ будет эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \alpha_{11} x_1 + u_{21}(\lambda_2) + \ldots + u_{n1}(\lambda_n) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{1n}(\lambda_1) + \ldots + u_{nn}(\lambda_n) &= 0 \end{aligned}$$

которая получится из системы (3.4), если в ней скорости $x_1^{\cdot}, \ldots, x_n^{\cdot}$ заменить на координаты $x_1, \ldots, x_n$. Накладывая на механическую систему связь

$$v_1 = \alpha_{11} x_1 + u_{21}(\lambda_2) + \ldots + u_{n1}(\lambda_w) = 0$$

в силу известной теоремы [4], получим, что после наложения связи $v_1 = 0$ частоты стесненной системы либо разделят частоты исходной, либо, в случае наличия кратных частот, часть из них сохранится. Причем, если сумма коэффициентов формы $u_{21}(\lambda_2)$ и т. д. отлична от нуля, то кратность корня λ_2 уменьшится, по меньшей мере, на 1. В силу указанного свойства, очевидно, что если частота λ_k сохраняется в новой системе, то ее кратность либо уменьшается, либо остается неизменной, и невозможен случай, когда кратность хотя бы одной сохранившейся частоты повысится, как и случай совпадения двух или нескольких вновь появившихся частот.

Поскольку условия леммы предполагают асимптотическую устойчивость, то из теоремы первого параграфа необходимо следует, что $\alpha_{11} > 0$, так как $-2sF_r = \alpha_{11} x_1^{\cdot 2} + \ldots + \alpha_{rr} x_r^{\cdot 2}$ определенно положительная. Следовательно, после наложения связи $v_1 = 0$ кратность частоты λ_1 понизится не меньше чем на 1. Поскольку $v_1 = 0$ вообще не задевает координат $x_2, \ldots, x_r$, то ясно, что система будет иметь частоту λ_1 кратности $r - 1$, и поэтому понижение кратности корня λ_1 в точности равно 1. Накладывая связь $v_2 = 0$ и замечая, что уравнение $v_2 = 0$ не содержит $x_1, x_3, \ldots, x_r$, а только x_2 с коэффициентом $\alpha_{22} > 0$, получим понижение кратности еще на 1 и т. д.

В конце концов система потеряет корень λ_1. Точно так же докажем, что она необходимо потеряет все корни (в том смысле, что все частоты будут новыми), и придем к выводу, что в системе с дополнительными связями $z_1 = \ldots = z_k = 0$ нет кратных главных частот и, следовательно, $\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n$ все различны.

Запишем теперь уравнения движения

$$\begin{aligned} z_i^{\cdot\cdot} + s^{-1} a_{ii} z_i^{\cdot} + c_{i1} z_1 + \ldots + c_{ik} z_k + c_{ik+1} y_{k+1} + \ldots + c_{in} y_n &= 0 \qquad (i = 1, \ldots, k) \\ y_j^{\cdot\cdot} + \nu_j^2 y_j + c_{j1} z_1 + \ldots + c_{jk} z_k &= 0 \qquad (j = k+1, \ldots, n) \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$
\frac{1}{s^r}\begin{vmatrix}
M_{11} & \ldots & sc_{1k} & sc_{1k+1} & \ldots & sc_{1n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
sc_{1k} & \ldots & M_{kk} & sc_{k,\,k+1} & \ldots & sc_{kn} \\
c_{1,\,k+1} & \ldots & c_{k,\,k+1} & \mu^2+\nu_{k+1}^2 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
c_{1n} & \ldots & c_{kn} & 0 & \ldots & \mu^2+\nu_n^2
\end{vmatrix} = 0
$$

$$
M_{ii} = s\mu^2 + a_{ij}\mu + sc_{ii} \quad (i = 1, 2, \ldots, k)
$$

Разыскивая корень уравнения под видом

$$
\mu_n = \pm\,\nu_n i + a_{1n}s + a_{2n}s^2 + O(s^3)
$$

получим уравнение для определенности a_{1n}

$$
\begin{vmatrix}
\nu_n i a_{11} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{1n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \ldots & \nu_n i a_{kk} & 0 & \ldots & 0 & c_{kn} \\
c_{k+1,\,1} & c_{k+1,\,2} & \ldots & c_{k+1,\,k} & \nu_{k+1}^2-\nu_n^2 & \ldots & 0 & c_{k+1,\,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
c_{n-1,\,1} & c_{n-1,\,2} & \ldots & c_{n-1,\,k} & 0 & \ldots & \nu_{n-1}^2-\nu_n^2 & c_{n-1,\,n} \\
c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nk} & 0 & \ldots & 0 & 2\nu_n i a_{n1}
\end{vmatrix} = 0
$$

В столбцах с номерами от $k+1$ до $h-1$ включительно содержится только один, не равный нулю элемент $\nu_{k+1}^2 - \nu_n^2$ и т. д., поэтому их можно вычеркнуть вместе с соответствующими строками. Умножим теперь последнюю строку на $1 / \nu_n i$, и затем первый столбец, умноженный на $c_{1n} / \nu_n a_{11} i$, вычтем из последнего, второй столбец умножим на $c_{2n} / \nu_n a_{11} i$ и вычтем из последнего и т. д. В итоге получим

$$
a_{1n} = -\frac{1}{2\nu_n^2}\left(\frac{c_{1n}^2}{a_{11}} + \frac{c_{2n}^2}{a_{22}} + \ldots + \frac{c_{kn}^2}{a_{kk}}\right)
$$

И, аналогично,

$$
a_{1j} = -\frac{1}{2\nu_j^2}\left(\frac{c_{ij}^2}{a_{11}} + \ldots + \frac{c_{kj}^2}{a_{kk}}\right)
$$

Вычисление a_{2j} — коэффициентов при s^2 в разложении пар корней с номерами $k+1, \ldots, n$ — показывает, что все они будут чисто мнимые. Однако формулы для них достаточно громоздки, и приводить их, по-видимому, нецелесообразно. Остальные пары корней характеристического уравнения будем разыскивать под видом

$$
\mu_j = b_{1j} / s + b_{2j}s + O(s^2)
$$

Подставляя μ_j в уравнение, легко получим

$$
b_{1j}^{\,1} = -a_{jj}, \qquad b_{1j}^{\,2} = 0
$$

Для отыскания b_{2j} вернемся к исходным переменным $x_1, \ldots, x_n$ и приведем силовую и диссипативную функции

$$
2U = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2, \qquad -2Fs = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i^{\bullet} x_j^{\bullet}
$$

одновременным ортогональным преобразованием к виду

$$
2U = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' x_i'^2, \qquad -2Fs = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}' x_i^{\bullet\prime 2}
$$

Пусть в этих переменных кинетическая энергия T имеет вид

$$
2T = \sum A_{ij} x_i^{\bullet\prime} x_j^{\bullet\prime}
$$

После этих преобразований характеристическое уравнение системы запишется в форме

$$
\| \mu^2 A_{ij} + \delta_{ij}\lambda_i'^2 + \delta_{ij}\mu / s \| = 0
$$

Здесь δ_{ij} — обычный символ Кронекера, а $\delta_{ij}' = \delta_{ij}$ при $i, j \leqslant k$ и равно нулю, если либо i либо j превышают k. Отсюда получаем

$$b^2_j = -\lambda_j'^2$$

В итоге ясно, что при больших диссипативных силах в системе всегда существуют решения с малым затуханием, причем, если диссипация является частичной с рангом $k < h$, но сообщает системе асимптотическую устойчивость, то существует $2(n-k)$ колеблющихся решений с показателями

$$\mu_i = \pm \nu_j i - \frac{s}{2\nu_j^2}\left(\frac{c_{1j}^2}{a_{11}} + \ldots + \frac{c_{kj}^2}{a_{kk}}\right) + O(s) \qquad (j = k+1, \ldots, n)$$

и $2k$ с показателями, приближенно равными

$$\mu_{j1} \approx -a_{jj} / s, \quad \mu_{j2} = -\lambda_j'^2 s + O(s)$$

Первая группа этих показателей отвечает резкому затуханию.

Поступила 19 I 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Некоторые задачи устойчивости движения. Физматгиз, 1959.
2. Пожарицкий Г. К. Об асимптотической устойчивости равновесий и стационарных движений механических систем с частичной диссипацией. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
3. Routh E. J. The advanced part of a treatise on the dynamies of a system of rigid bodies. London, 1930.
4. Уиттекер В. Т. Аналитическая динамика. ОПТИ НКТП СССР, 1937.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

В. Я. Турин (Москва)

В работах [1-4] было определено линейное приближение для системы дифференциальных уравнений $z^\cdot = f(z, t)$ с разрывными правыми частями и были доказаны теоремы об устойчивости непрерывных решений этой системы. Ниже рассматривается устойчивость периодических решений этой системы в критических случаях.

Пусть дана система дифференциальных уравнений в векторной форме

$$z^\cdot = f(z, t) \tag{0.1}$$

Функция $f(z, t)$ задана в $n+1$ мерном криволинейном цилиндре C, осью которого является непрерывная интегральная кривая $z = z^\circ(t)$ системы (0.1). Кроме того, функция $f(z, t)$ является периодической периода τ.

Гиперповерхности (поверхности разрыва)

$$F_\alpha(z, t) = 0, \qquad [F_\alpha(z, t+\tau) = F_\alpha(z, t)] \tag{0.2}$$

рассекают цилиндр C на области H_α, пересекая кривую $z = z^\circ(t)$ в точках M_α при $t = t_\alpha$. Правые части системы (0.1) удовлетворяют следующим условиям.

1. Функции $f_i(z, t)$ непрерывны в каждой области H_α (включая границы) и непрерывно дифференцируемы до порядка N, а при переходе через поверхности (0.2) они и все их частные производные до порядка N испытывают только разрывы первого рода.

2. В угловых областях, заключенных между поверхностями (0.2) и плоскостями $t = t_\alpha$, выполняются условия

$$\begin{gathered}\frac{\partial^m f_i(z, t)}{\partial t^{m_0}\partial z_1^{m_1}\ldots\partial z_n^{m_n}} - \frac{\partial^m f_i(z^\circ, t)}{\partial t^{m_0}\partial z_1^{m_1}\ldots\partial z_n^{m_n}} \to \pm \xi_i^{m_0 m_1 \ldots m_n} \\ f_i(z, t) - f_i(z^\circ, t) \to \pm \xi_i \quad \text{при } (z, t) \to M_\alpha\end{gathered} \tag{0.3}$$

Знаки плюс и минус соответствуют значениям $t = t_\alpha + 0$ и $t = t_\alpha - 0$.