УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНОК СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ

А. И. Лиходед (Москва)

Рассматриваются вынужденные периодические колебания однородной изотропной пластинки постоянной толщины со свободными краями. Считается, что пластинка занимает произвольную односвязную область и ограничена контуром с дифференцируемой кривизной. Прием, изложенный в [1, 2], позволяет свести указанную задачу к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Ядра полученного интегрального уравнения выражаются через известные специальные функции. Исследуется вопрос о разрешимости этого уравнения.

§ 1. Пусть пластинка занимает произвольную односвязную область S в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Контур L, ограничивающий область, обладает дифференцируемой кривизной. Начало координат будем считать расположенным внутри области S. Представим амплитуду вынужденных колебаний в виде суммы $w(x, y) = u(x, y) + u_0(x, y)$, где $u_0(x, y)$ — частное решение неоднородного биметагармонического уравнения. Для нахождения неизвестной функции $u(x, y)$ необходимо решить уравнение

$$\triangle\triangle u - \lambda^4 u = 0 \qquad \left(\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{1.1}$$

со следующими граничными условиями[1]:

$$\begin{gathered} M(u) \equiv \sigma\triangle u + (1-\sigma)\left[\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin 2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right] = -M(u_0) \\ Q(u) \equiv \frac{d\triangle u}{dn} + (1-\sigma)\frac{d}{ds}\left[\cos 2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{1}{2}\sin 2\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right] = -Q(u_0) \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь λ — приведенная частота колебаний, θ — угол, составленный внешней нормалью с осью x, σ — коэффициент Пуассона. Первое условие (1.2) означает равенство нулю изгибающего момента на контуре L, второе — равенство нулю перерезывающей силы. Будем искать функцию $u(x, y)$ в виде некоторого потенциала

$$u(x, y) = \int_L [\nu_1(s) F_1(s, x, y) + \nu_2(s) F_2(s, x, y)]\, ds \tag{1.3}$$

Здесь $\nu_1(s)$ и $\nu_2(s)$ — неизвестные плотности; ядра $F_j(s, x, y)$ выражаются так:

$$F_j(s, x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [g_{j,1}(\alpha) e^{\gamma_1(\alpha)} + g_{j,2}(\alpha) e^{\gamma_2(\alpha)}]\, d\alpha \qquad (j = 1, 2) \tag{1.4}$$

$$\gamma_1(\alpha) = i\alpha c_1 - c_2\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}, \qquad \gamma_2(\alpha) = i\alpha c_1 - c_2\sqrt{\alpha^2 - \lambda^2}, \qquad \gamma^* = i\alpha t'\,\overline{(t-z)}$$

$$c_1 = \operatorname{Re}[t'\,\overline{(t-z)}], \qquad c_2 = \operatorname{Im}[t'\,\overline{(t-z)}] \quad (t = \xi + i\eta)$$

t — текущая точка контура, штрих над t означает дифференцирование по дуге s. Радикалы здесь считаются положительными или положительно мнимыми. Нетрудно убедиться, что функция $u(x, y)$ (1.3) удовлетворяет уравнению (1.1). Коэффициенты $g_{i,k}(\alpha)$ подобраны далее таким образом, что при подстановке $u(x, y)$ в граничные условия получаем интегральные уравнения Фредгольма второго рода.

Чтобы облегчить нахождение коэффициентов $g_{i,k}(\alpha)$, выполним некоторые вспомогательные преобразования граничных условий. Продифференцируем первое условие (1.2) по дуге s и сложим его со значением момента $M[w(t_a)]$ в некоторой точке t_a контура L (при одинаковых порядках старших производных в граничных условиях процесс определения коэффициентов $g_{i,k}(\alpha)$ упрощается [2])

$$\frac{dM[w]}{ds} + M[w(t_a)] = 0 \tag{1.5}$$

[1] В случае статического изгиба пластинки краевые условия упрощаются [3, 4].

Так как решение ищется в классе однозначных функций, интегрированием по дуге s вдоль контура L устанавливается эквивалентность условия (1.5) и первого условия (1.2). К граничному условию (1.5) присоединяем второе условие (1.2), и граничные условия будут иметь вид дифференциальных операторов третьего порядка.

Примечание. Отметим два интегральных свойства амплитуды колебаний. Из (1.2)

$$\int_L Q(w)\,ds = \int_L \frac{d\triangle w}{dn}\,ds = 0, \qquad \int_L M(w)\,ds = 0 \tag{1.6}$$

Переходя в (1.6) от контурных интегралов к интегралам по площади и учитывая, что $w(x,y)$ должна удовлетворять уравнению $\triangle\triangle w - \lambda^4 w = p(x, y)$, будем иметь

$$\lambda^4 \iint_S w(x, y)\,dS = -\iint_S p(x, y)\,dS, \qquad \lambda^4 \iint_S zw(x, y)\,dS = -\iint_S zp(x, y)\,dS \tag{1.7}$$

Здесь $p(x, y)$ — амплитуда распределенной нагрузки, поделенная на цилиндрическую жесткость. Первое соотношение (1.7) характеризует амплитуду смещения центра тяжести пластинки, а второе — угол поворота пластинки как жесткого целого. При $\lambda = 0$ из (1.7) получаем необходимые условия существования решения в случае статического изгиба пластинки [4]. Будем считать главный вектор и главный момент (правые части в (1.7)) равными нулю (общий случай сводится к указанному).

Представим функции $F_1(s, x, y)$ и $F_2(s, x, y)$ в виде

$$F_j(s, x, y) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Re}\int_0^D [g_{j,1}e^{\gamma_1(\alpha)} + g_{j,2}e^{\gamma_2(\alpha)}]\,d\alpha + \tag{1.8}$$

$$+\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Re}\int_D^\infty [g_{j,1}e^{\gamma_1(\alpha)} + g_{j,2}e^{\gamma_2(\alpha)}]\,d\alpha \qquad (j = 1, 2)$$

Здесь D — достаточно большое положительное число. Особенности функций $F_j(s, x, y)$ определяются вторыми слагаемыми. Коэффициенты $g_{j,k}$ при больших α имеют разложения

$$g_{11} = i\frac{k_1}{\alpha} + i\frac{k_2}{\alpha^3} + \cdots, \quad g_{1,2} = -i\frac{k_1}{\alpha} + i\frac{k_2}{\alpha^3} + \cdots, \quad g_{21} = -\frac{k_1}{\alpha} - \frac{(1+\sigma)k_2}{2\alpha^3} + \cdots$$

$$g_{22} = \frac{k_1}{\alpha} - \frac{(1+\sigma)k_2}{2\alpha^3} + \cdots, \quad k_1 = \frac{1}{2\lambda^2(1-\sigma)}, \quad k_2 = \frac{1}{2(1-\sigma)^2} \tag{1.9}$$

Для выявления особенностей функций $F_1(s, x, y)$ и $F_2(s, x, y)$ воспользуемся соотношениями

$$\int_D^\infty \frac{e^{\gamma^*(\alpha)}\,d\alpha}{\alpha^3} = \frac{1}{2}\,\overline{t'^2}\,\overline{(z-t)^2}\,\overline{\ln(t-z)} + \cdots, \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\gamma_2(\alpha)}\,d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\lambda^2}} = -i\pi H_0^{(2)}(\lambda r) \tag{1.10}$$

$$\mathrm{Im}\int_D^\infty \frac{e^{\gamma_1(\alpha)}}{\alpha}\,d\alpha = I_0(\lambda r)\,\Phi + \cdots, \quad \mathrm{Im}\int_D^\infty \frac{e^{\gamma_2(\alpha)}}{\alpha}\,d\alpha = J_0(\lambda r)\,\Phi + \cdots, \quad \Phi = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{\eta - y}{\xi - x}$$

$$(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2})$$

Здесь $H_0^{(2)}(\lambda r)$ — функция Ханкеля, $J_0(\lambda r)$ и $I_0(\lambda r)$ — функции Бесселя действительного и мнимого аргументов соответственно. Через многоточие обозначены члены, обладающие непрерывными третьими производными.

На основании разложений (1.9), принимая во внимание (1.10), находим главные части функций $F_1(s, x, y)$ и $F_2(s, x, y)$; обозначим их Γ_1 и Γ_2

$$\Gamma_1 = -\frac{2k_2}{\pi}\left\{\mathrm{Im}\,[\overline{t'^2}\,\overline{(z-t)^2}\,\overline{\ln(t-z)}] + \frac{1-\sigma}{2}\,r^2\Phi\right\}$$

$$\Gamma_2 = -\frac{k_2}{\pi}\left\{(1+\sigma)\,\mathrm{Re}\,[\overline{t'^2}\,\overline{(z-t)^2}\,\overline{\ln(t-z)}] + (1-\sigma)\,r^2\ln r\right\} \tag{1.11}$$

§ 2. Введем комплексную плотность $\omega(t) = \nu_1 + i\nu_2$, тогда главная часть функции $u(x, y)$ (1.3) запишется так:

$$u^*(x, y) = \frac{1}{2}\int_L [\omega(t)(\Gamma_1 - i\Gamma_2) + \overline{\omega(t)}(\Gamma_1 + i\Gamma_2)]\, ds \tag{2.1}$$

Объединяем граничные условия (1.2) в одно следующее комплексное равенство

$$G(u) \equiv M(u) + i\int^s Q(u)\, ds \equiv 2(1-\sigma)\left[\varkappa\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial\bar{t}} - \bar{t}'^2\frac{\partial^2 u}{\partial\bar{t}^2}\right] - 8\int^{\bar{t}}\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial\bar{t}^2}\, d\bar{t} = f(t)$$

$$f(t) = -M(u_0) - i\int^s Q(u_0)\, ds, \qquad \varkappa = \frac{3+\sigma}{1-\sigma} \tag{2.2}$$

Учитывая тот факт, что граничное соотношение (2.2) получается из граничного условия (1.5) и второго условия (1.2) интегрированием по дуге контура s, переходим в представлении (2.1) к новой плотности

$$\Omega(t) = \int_{t_a}^{t} \omega(t)\, dt$$

Выполнив путем обычного интегрирования по частям указанный переход и отбрасывая члены, не содержащие особенностей, приходим к модифицированному представлению для главной части функции $u(x, y)$

$$u^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Im}\left\{\int_L \Omega(t)\,\overline{(t-z)}\left[\ln\left(1-\frac{z}{t}\right) + \varkappa\overline{\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)} - \varkappa\right] dt\right\} \tag{2.3}$$

Будем предполагать, что $\Omega(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на L. Аналитические функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$, отвечающие, согласно формуле Гурса, бигармонической функции $u^*(x, y)$, равны

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \Omega(t)\ln\left(1-\frac{z}{t}\right) dt, \qquad \psi(z) = \chi'(z)$$

$$\chi(z) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\varkappa\int_L \overline{\Omega(t)}(t-z)\left[\ln\left(1-\frac{z}{t}\right) - 1\right]\overline{dt} - \int_L \Omega(t)\,\bar{t}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right) dt\right\} \tag{2.4}$$

Введем функции

$$\Pi_1(\lambda, t, z) = -\frac{2}{\lambda^2}\,[N(\lambda r) + K(\lambda r) + (J_0(\lambda r) - I_0(\lambda r))(i\Phi - \ln t)]$$

$$\Pi_2(\lambda, t, z) = \frac{1}{2}\,[N(\lambda r) - K(\lambda r) + (J_0(\lambda r) + I_0(\lambda r))(i\Phi - \ln t)] \tag{2.5}$$

$$N(\lambda r) = N_0(\lambda r) - J_0(\lambda r)(\ln {}^1\!/_2\lambda + C), \quad K(\lambda r) = K_0(\lambda r) + I_0(\lambda r)(\ln {}^1\!/_2\lambda + C)$$

Здесь $N_0(\lambda r)$ — функция Неймана нулевого порядка, домноженная на ${}^1\!/_2\pi$, $K_0(\lambda r)$ — функция Макдональда, C — постоянная Эйлера. Функции $\Pi_i(\lambda, t, z)$ ($i = 1, 2$) удовлетворяют уравнению (1.1) и могут быть записаны в виде

$$\Pi_1(\lambda, t, z) = r^2\left[\ln\left(1-\frac{z}{t}\right) - 1\right] + P_1(\lambda, t, z)$$

$$\Pi_2(\lambda, t, z) = \ln\left(1-\frac{z}{t}\right) + P_2(\lambda, t, z) \tag{2.6}$$

Здесь $P_1(\lambda, t, z)$ и $P_2(\lambda, t, z)$ — целые функции параметра λ, обращающиеся в нуль при $\lambda = 0$; помимо того, они обладают непрерывными производными по t и z до третьего порядка включительно. Введем, кроме того, две функции

$$E_1(\lambda, t, t_0) = P_1(\lambda, t, t_0) + \varkappa\overline{P_1(\lambda, t, t_0)} - \frac{4}{\lambda^2}\,[N(\lambda\rho_0) + K(\lambda\rho_0)]$$

$$E_2(\lambda, t, t_0) = P_2(\lambda, t, t_0) + \varkappa\overline{P_2(\lambda, t, t_0)} + N(\lambda\rho_0) - K(\lambda\rho_0), \quad \rho_0^2 = (t_0 - \beta)(\overline{t_0} - \overline{\beta}) \tag{2.7}$$

Здесь β — некоторая фиксированная точка плоскости z, не лежащая на L

Учитывая (2.6), нетрудно построить требуемую функцию $u(x, y)$, главная часть которой равна $u^*(x, y)$. Эта функция выглядит так:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left\{ \int_L \Omega(t) \frac{\partial}{\partial z} [\Pi_1(\lambda, t, z) + \varkappa \overline{\Pi_1(\lambda, t, z)}]\, dt - A(\Omega) \frac{\partial V(\lambda\rho)}{\partial z} \right\} -$$

$$- \frac{V(\lambda r_0)}{2\pi i B(\lambda)} \int_L [\Omega(t) h_1(\lambda, t) - \overline{\Omega(t)} h_2(\lambda, t)]\, dt + \frac{8V(\lambda r_0)}{(1-\sigma) B(\lambda)} \int_L \frac{\partial^3 u_0}{\partial t \partial \bar{t}^2} \bar{t}'^2\, dt \tag{2.8}$$

Здесь используются обозначения

$$A(\Omega) = \int_L \Omega(t)\, dt, \qquad B(\lambda) = \frac{8}{1-\sigma} \int_L \frac{\partial^3 V(\lambda r_0)}{\partial t \partial \bar{t}^2} \bar{t}'^2 dt \qquad \left(B(0) = \frac{16\pi i}{1-\sigma}\right)$$

$$V(\lambda r_0) = \frac{4}{\lambda^2} [N(\lambda r_0) + K(\lambda r_0)], \qquad r_0^2 = z\bar{z}, \qquad \rho^2 = (z-\beta)\overline{(z-\beta)}$$

$$h_1(\lambda, t) = \frac{\lambda^4}{4(1-\sigma)} \int_L E_1(\lambda, t, t_0) \bar{t}_0'^2 dt_0, \qquad h_2(\lambda, t) = \frac{4\bar{t}'^2}{1-\sigma} \int_L \frac{\partial^2 \overline{E_2(\lambda, t, t_0)}}{\partial \bar{t}_0^2} \bar{t}_0'^2 dt_0$$

Правая часть (2.8) имеет смысл при всех λ, исключая нули функции $B(\lambda)$.

Используя формулы Сохоцкого — Племеля, находим предельные значения производных $\partial^2 u / \partial z \partial \bar{z}$, $\partial^2 u / \partial \bar{z}^2$ и $\partial^3 u / \partial z \partial \bar{z}^2$ при стремлении z к точке контура t_0. Подставляя их в граничное условие (2.2), приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\varkappa \Omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L [\Omega(t) G_1(\lambda, t, t_0) + \overline{\Omega(t)} G_2(\lambda, t, t_0)]\, dt = f_1(t_0) \tag{2.9}$$

Здесь

$$G_1(\lambda, t, t_0) = \frac{d}{dt} \ln \frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} + \varkappa \frac{\bar{t}'^2 - \bar{t}_0'^2}{\bar{t}-\bar{t}_0} - \varkappa \frac{\partial E_2(\lambda, t, t_0)}{\partial t_0} + \bar{t}_0'^2 \frac{\partial E_2(\lambda, t, t_0)}{\partial \bar{t}_0} +$$

$$+ \frac{\lambda^4}{4(1-\sigma)} \int^{t_0} E_1(\lambda, t, t_0) \bar{t}_0'^2 dt_0 + \frac{G[V(\lambda r_0)]}{(1-\sigma) B(\lambda)} h_1(\lambda, t)$$

$$G_2(\lambda, t, t_0) = \bar{t}_0'^2 \frac{d}{dt} \frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} + \frac{\bar{t}'^2 - \bar{t}_0'^2}{\bar{t}-\bar{t}_0} + \bar{t}'^2 \left[\varkappa \frac{\partial \overline{E_2(\lambda, t, t_0)}}{\partial \bar{t}_0} - \bar{t}_0'^2 \frac{\partial^3 \overline{E_1(\lambda, t, t_0)}}{\partial \bar{t}_0^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{1-\sigma} \int^{t_0} \frac{\partial^2 \overline{E_2(\lambda, t, t_0)}}{\partial \bar{t}_0^2} \bar{t}_0'^2 dt_0 \right] - \frac{G[V(\lambda r_0)]}{(1-\sigma) B(\lambda)} h_2(\lambda, t)$$

$$f_1(t_0) = -\frac{f(t_0)}{1-\sigma} - \frac{G[V(\lambda r_0)]}{(1-\sigma)^2 B(\lambda)} \int_L \frac{\partial^3 u_0}{\partial t \partial \bar{t}^2} \bar{t}'^2 dt$$

Ядра и правая часть полученного уравнения являются непрерывными функциями переменных t и t_0 (как легко видеть, их непрерывность обеспечивается наличием последних двух слагаемых в выражении (2.8)). Покажем теперь, что при $\lambda = 0$ уравнение (2.9) разрешимо единственным образом. Для этого достаточно показать, что соответствующее ему однородное уравнение

$$\varkappa \Omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \Omega(t)\, d \ln \frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} + \frac{\bar{t}_0'^2}{2\pi i} \int_L \overline{\Omega(t)}\, d \frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_L [\varkappa \Omega(t) + \overline{\Omega(t)}] \frac{\bar{t}'^2 - \bar{t}_0'^2}{\bar{t}-\bar{t}_0} dt + R[t_0, A(\Omega)] = 0 \tag{2.10}$$

имеет только тривиальное решение. Через $R[t, A(\Omega)]$ обозначен оператор

$$R[t, A(\Omega)] = \frac{1-\sigma}{2\pi i} \left\{ A(\Omega) \left[\frac{\varkappa}{t_1} - \frac{\bar{t}'^2}{\bar{t}_1} \right] + \overline{A(\Omega)} \left[\frac{1}{\bar{t}_1} - \varkappa \frac{\bar{t}'^2 t_1}{\bar{t}_1^2} \right] \right\}, \quad t_1 = t - \beta$$

Пусть $\Omega_0(t)$ — некоторое решение уравнения (2.10); соответствующие ему функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ (2.4) обозначим через $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$. Тогда уравнение (2.10) можно записать так:

$$\frac{d}{dt}\,[\varkappa\varphi_0(t) - t\overline{\varphi_0'(t)} - \overline{\psi_0(t)}] + R\,[t,\, A(\Omega_0)] = 0 \tag{2.11}$$

Интегрируя соотношение (2.11) вдоль замкнутого контура L по t и учитывая равенства

$$\int_L \left[\frac{\varkappa}{t_1} - \frac{\bar t'^2}{\bar t_1}\right] dt = \frac{2i\delta(\beta)}{1-\sigma}, \qquad \int_L \left[\varkappa\,\frac{\bar t'^2 t_1}{\bar t_1^2} - \frac{1}{\bar t_1}\right] dt = 2\,\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\int_L \frac{dt}{\bar t_1} \tag{2.12}$$

будем иметь

$$i\delta(\beta)\,A(\Omega_0) - (1+\sigma)\overline{A(\Omega_0)}\int_L \frac{dt}{\bar t_1} = 0, \qquad \delta(\beta) = \begin{cases} 4\pi, & \text{если } \beta \text{ в } S \\ 0, & \text{если } \beta \text{ вне } S \end{cases} \tag{2.13}$$

Присоединяя к соотношению (2.13) ему сопряженное, получаем систему однородных линейных уравнений относительно $A(\Omega_0)$ и $\overline{A(\Omega_0)}$. Детерминант указанной системы будет отличен от нуля, если выполнено условие

$$\left|\int_L \frac{\bar t'^2 dt}{t-\beta}\right| \neq \frac{\delta(\beta)}{1+\sigma} \tag{2.14}$$

Интеграл в (2.14) зависит от параметра β, и, очевидно, условию (2.14) всегда можно удовлетворить соответствующим выбором β. При выполнении условия (2.14) имеем $A(\Omega_0) = 0$.

Из вышеприведенных рассуждений ясно, что соотношение (2.11) эквивалентно двум следующим равенствам:

$$\varkappa\varphi_0(t) - t\overline{\varphi_0'(t)} - \overline{\psi_0(t)} = \text{const}, \qquad \int_L \Omega_0(t)\,dt = 0 \tag{2.15}$$

Выполнив интегрирование по частям в функциях $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ и учитывая при этом второе соотношение (2.15), получим

$$\varphi_0(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \Omega_1(t)\left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t}\right)dt, \qquad \Omega_1(t) = \int_{t_a}^{t} \Omega_0(t)\,dt$$
$$\psi_0(z) = \frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L \overline{\Omega_1(t)}\left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t}\right)dt + \frac{1}{2\pi i}\int_L \Omega_0(t)\,\frac{\bar t dt}{t-z} \tag{2.16}$$

Затем, поступая аналогично [5,6], показываем, что $\Omega_1(t) = \text{const}$, и, следовательно, $\Omega_0(t) = 0$ всюду на L. Отсюда на основании теоремы Я. Тамаркина [7] вытекает разрешимость исходного интегрального уравнения (2.9) почти при всех значениях параметра λ.

Поступила 17 XI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Шерман Д. И. О некоторых задачах теории установившихся колебаний. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1945, № 9.
2. Шерман Д. И. О приведении к интегральному уравнению Фредгольма некоторых задач теории стационарных колебаний. Изв. АН АрмССР, 1963, т. 16, № 4.
3. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит. ПММ, 1938, т. 2, вып. 2.
4. Векуа И. Н. Об изгибе пластинки со свободным краем. Сообщ. АН ГрузССР, 1942, т. 3, № 7.
5. Шерман Д. И. К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных на границе смещениях. Докл. АН СССР, 1940, т. 37, № 9.
6. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.
7. Tamarkin J. D. On Fredholm's integral equations whose kernels are analytic in a parameter Ann. Math., 1927, vol. 28, No. 2.