Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

ПРИМЕНЕНИЕ СИМВОЛИЧЕСКОГО МЕТОДА К ВЫВОДУ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПЛИТ

В. К. Прокопов

(Ленинград)

Излагается метод получения дифференциальных уравнений и краевых условий в задачах растяжения и изгиба плиты постоянной толщины; он основан на использовании предложенной в 1936 г. А И. Лурье [1] символической записи решений дифференциальных уравнений теории упругости для слоя. Эти решения имеют следующий вид

$$u = cu_0 - \frac{mz}{2(m-2)} s\partial_1\vartheta_0 + su_0' - \frac{m}{4(m-1)} \lambda\partial_1\vartheta_0'$$

$$v = cv_0 - \frac{mz}{2(m-2)} s\partial_2\vartheta_0 + sv_0' - \frac{m}{4(m-1)} \lambda\partial_2\vartheta_0' \qquad (0.1)$$

$$w = sw_0' + \frac{m}{2(m-2)} \lambda\triangle\vartheta_0 + cw_0 - \frac{mz}{4(m-1)} s\vartheta_0'$$

Здесь

$$\vartheta_0 = \partial_1 u_0 + \partial_2 v_0 + w_0', \qquad \vartheta_0' = \partial_1 u_0' + \partial_2 v_0' - \triangle w_0$$
$$\triangle = D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \qquad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y} \qquad (0.2)$$

m — число Пуассона.

Символами c, s, λ обозначены операторы дифференцирования

$$c = \cos zD = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n} \triangle^n}{(2n)!}, \quad s = \frac{\sin zD}{D} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1} \triangle^n}{(2n+1)!}$$
$$\lambda = \frac{s - zc}{\triangle} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+3} \triangle^n}{(2n+1)!\,(2n+3)} \qquad (0.3)$$

Формулы (0.1) представляют собой ряды по степеням координаты z, записанные в компактной форме; такая символическая запись весьма удобна при производстве промежуточных вычислений; входящие сюда величины u_0, v_0, w_0, u_0', v_0', w_0' зависят от координат x, y и являются основными неизвестными, подлежащими дальнейшему определению. Для этих функций ($u_0, \ldots, w_0'$) А. И. Лурье в другой работе [2] получил системы дифференциальных уравнений бесконечного порядка; вопрос о краевых условиях для них, однако, не рассматривался. Очевидно, что подстановка символических решений (0.1) в принцип минимума потенциальной энергии должна привести как к дифференциальным уравнениям, так и к краевым условиям, выраженным в виде рядов по степеням толщины плиты.

Анализ формул (0.1) показывает, что перемещения толстой плиты распадаются на две группы, распределяющиеся симметрично и кососимметрично относительно срединной плоскости плиты; первая группа характеризуется функциями u_0, v_0, w_0' и соответствует задаче растяжения плиты; вторая — определяется величинами u_0', v_0', w_0 и относится к задаче изгиба. Такое распадение будет иметь место и для плиты переменной толщины, при условии, что ее срединная плоскость является одновременно и плоскостью симметрии. Это дает возможность изучить каждую из указанных выше задач отдельно, что несколько сокращает объем производимых вычислений.

Из формул (0.1) легко получить выражения для напряжений; приведем некоторые из них (μ — модуль сдвига):

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x}{\mu} &= 2c\left(\partial_1 u_0 + \frac{\vartheta_0}{m-2}\right) - \frac{mz}{m-2} s\partial_1^2\vartheta_0 + s\left(2\partial_1 u_0' + \frac{\vartheta_0'}{m-1}\right) - \frac{m\lambda\partial_1^2\vartheta_0'}{2(m-1)} \\ \frac{\sigma_z}{\mu} &= 2c\left(w_0' + \frac{\vartheta_0}{m-2}\right) + \frac{mzs\triangle\vartheta_0}{m-2} - s\left[2\triangle w_0 + \frac{(m-2)\vartheta_0''}{2(m-1)}\right] - \frac{mzc\vartheta_0'}{2(m-1)} \\ \frac{\tau_{xy}}{\mu} &= c(\partial_1 v_0 + \partial_2 u_0) - \frac{mzs\partial_1\partial_2\vartheta_0}{m-2} + s(\partial_1 v_0' + \partial_2 u_0') - \frac{m\lambda\partial_1\partial_2\vartheta_0'}{2(m-1)} \\ \frac{\tau_{zx}}{\mu} &= s(\partial_1 w_0' - \triangle u_0) - \frac{mzc\partial_1\vartheta_0}{m-2} + c(u_0' + \partial_1 w_0') - \frac{mzs\partial_1\vartheta_0'}{2(m-1)} \end{aligned} \tag{0.4}$$

Выражения σ_y и τ_{yz} получаются из σ_x и τ_{zx} заменой u_0, u_0', ∂_1 на v_0, v_0', ∂_2.

§ 1. Вариация потенциальной энергии растяжения плиты.

Вариация потенциальной энергии единицы объема $\delta\pi$ определяется формулой

$$\delta\pi = \sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx} \tag{1.1}$$

В соответствии со сказанным ранее, оставим в формулах (0.1) и (0.4) только функции u_0, v_0, w_0', характеризующие деформацию растяжения. Вычисляем по перемещениям (0.1) деформации и варьируем их; тогда

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_x &= c\partial_1\delta u_0 - \frac{mzs}{2(m-2)}\partial_1^2\delta\vartheta_0, \qquad \delta\gamma_{xy} = c(\partial_1\delta v_0 + \partial_2\delta u_0) - \frac{mzs}{2(m-2)}\partial_1\partial_2\delta\vartheta_0 \\ \delta\varepsilon_z &= c\delta w_0' + \frac{mzs}{2(m-2)}\triangle\delta\vartheta_0, \qquad \delta\gamma_{zx} = s(\partial_1\delta w_0' - \triangle\delta u_0) - \frac{mzs}{m-2}\partial_1\delta\vartheta_0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Вариации $\delta\varepsilon_y$ и $\delta\gamma_{yz}$ получаются из вариаций $\delta\varepsilon_x$ и $\delta\gamma_{zx}$ соответствующей заменой букв.

Подставляем в формулу (1.1) напряжения (0.4), обусловленные величинами u_0, v_0, w_0', и вариации деформаций (1.2); получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta\pi_1}{\mu} &= 2(c\partial_1 u_0\cdot c\partial_1\delta u_0 + c\partial_2 v_0\cdot c\partial_2\delta v_0 + cw_0'\cdot c\delta w_0') + \\ &+ c(\partial_1 v_0 + \partial_2 u_0)\cdot c\delta(\partial_1 v_0 + \partial_2 u_0) + \frac{m^2z^2}{(m-2)^2}(c\partial_1\vartheta_0\cdot c\partial_1\delta\vartheta_0 + c\partial_2\vartheta_0\cdot c\partial_2\delta\vartheta_0) + \\ &+ \left\{\frac{2}{m-2}c\vartheta_0\cdot c\delta\vartheta_0\right\} + \frac{mz}{m-2}\delta\,[c\partial_1\vartheta_0\cdot s(\triangle u_0 - \partial_1 w_0') + c\partial_2\vartheta_0\cdot s(\triangle v_0 - \partial_2 w_0') + \\ &+ cw_0'\cdot s\triangle\vartheta_0 - \partial_1 c(u_0\cdot\partial_1 + v_0\cdot\partial_2)s\partial_1\vartheta_0 - \partial_2 c(u_0\cdot\partial_1 + v_0\cdot\partial_2)s\partial_2\vartheta_0] + \\ &+ s(\triangle u_0 - \partial_1 w_0')\cdot s\delta(\triangle u_0 - \partial_1 w_0') + s(\triangle v_0 - \partial_2 w_0')\cdot s\delta(\triangle v_0 - \partial_2 w_0') + \\ &+ \frac{m^2z^2}{2(m-2)^2}(s\partial_1^2\vartheta_0\cdot s\partial_1^2\delta\vartheta_0 + 2s\partial_1\partial_2\vartheta_0\cdot s\partial_1\partial_2\delta\vartheta_0 + s\partial_2^2\vartheta_0\cdot s\partial_2^2\delta\vartheta_0 + s\triangle\vartheta_0\cdot s\triangle\delta\vartheta_0) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Точки в формуле (1.3) имеют существенное значение: кроме знака умножения, каждая точка означает окончание действия предыдущего оператора — после точки действует последующий оператор над другой функцией.

Проинтегрируем вариацию $\delta\pi_1$ по площади плиты Ω; результат будет состоять из двойных интегралов, содержащих вариации основных переменных (δu_0, δv_0, $\delta w_0'$) под знаками операторов. Для вывода дифференциальных уравнений теории толстых плит потребуется так преобразовать ...йные интегралы, чтобы в них оказались не операторы от вариаций, а сами вариации δu_0, δv_0, $\delta w_0'$. Такое преобразование оказывается возможным совершить при помощи формулы, обобщающей известную формулу Грина на бесконечные операторы [3]; эта формула такова:

$$\iint\limits_{(\Omega)} [U \cdot \Psi(\triangle) V - \Psi(\triangle) U \cdot V]\, dx\, dy = \sum_{k=1}^{\infty} \oint\limits_{(L)} \{\Psi_k(\triangle) U, V\}\, ds \qquad (1.4)$$

Здесь L — контур, окружающий область Ω, $\Psi_k(\triangle)$ — k-й сниженный оператор от оператора $\Psi(\triangle)$. Операция снижения оператора

$$\Psi(\triangle) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \triangle^r = a_0 + a_1\triangle + a_2\triangle^2 + \ldots$$

состоит в отбрасывании первых k его членов с одновременным понижением порядка оставшихся лаплассианов на то же число; таким образом, k-й сниженный оператор представляется рядом

$$\Psi_k(\triangle) = \sum_{r=k}^{\infty} a_r \triangle^{r-k} = a_k + a_{k+1}\triangle + a_{k+2}\triangle^2 + \ldots$$

Под знаком контурного интеграла (1.4) стоит фигурная скобка (ее можно назвать скобкой Грина) — это сокращенное обозначение операций над парой функций, заключенных внутри скобки; смысл этого обозначения раскрывается выражением

$$\{A_k, B\} = A_k \cdot \frac{\partial \triangle^{k-1} B}{\partial n} - \frac{\partial A_k}{\partial n} \cdot \triangle^{k-1} B \qquad (1.5)$$

Преобразование вариации потенциальной энергии при помощи формулы (1.4) приводит к сниженным операторам c_k, s_k, λ_k, которые представляются рядами

$$c_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k} z^{2n+2k}}{(2n+2k)!} \triangle^n, \qquad s_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k} z^{2n+2k+1}}{(2n+2k+1)!} \triangle^n$$
$$\lambda_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k} z^{2n+2k+3} \triangle^n}{(2n+2k+1)!\,(2n+2k+3)} \qquad (1.6)$$

После применения к интегралу $\iint \delta\pi_1 dx dy$ обобщенной формулы Грина (1.4) интегралы по площади Ω будут содержать лишь операторы ∂_1 и ∂_2 от вариаций δu_0, δv_0, $\delta w_0'$; для получения последних в чистом виде достаточно будет использовать обычные формулы интегрирования по частям

$$\iint\limits_{(\Omega)} U \cdot \partial_1 V dx\, dy = \oint\limits_{(L)} U \cdot V n_x ds - \iint\limits_{(\Omega)} \partial_1 U \cdot V dx\, dy$$
$$\iint\limits_{(\Omega)} U \cdot \partial_2 V dx\, dy = \oint\limits_{(L)} U \cdot V n_y ds - \iint\limits_{(\Omega)} \partial_2 U \cdot V dx\, dy \qquad (1.7)$$

Здесь n_x, n_y — косинусы углов, составляемых нормалью к контуру L с осями x, y.

Рассмотрим, например, преобразование слагаемого в фигурных скобках, входящего в состав вариации потенциальной энергии (1.3); отбрасывая несущественный множитель $2/(m-2)$, согласно формуле (1.4), имеем

$$\iint\limits_{(\Omega)} c\vartheta_0 \cdot c\delta\vartheta_0\, dx\, dy = \iint\limits_{(\Omega)} c^2\vartheta_0 \cdot \delta\vartheta_0\, dx\, dy + \sum_{k=1}^{\infty} \oint\limits_{(L)} \{c_k c\vartheta_0, \delta\vartheta_0\}\, ds \qquad (1.8)$$

Полученный результат (1.8) содержит двойной интеграл с вариацией $\delta\vartheta_0$, который еще надо преобразовать при помощи формул (1.7)

$$\iint\limits_{(\Omega)} c^2\vartheta_0\cdot\delta\vartheta_0\,dx\,dy = \iint\limits_{(\Omega)} c^2\vartheta_2\cdot(\partial_1\delta u_0+\partial_2\delta v_0+\delta w_0')\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{(\Omega)} (c^2\vartheta_0\cdot\delta w_0' - c^2\partial_1\vartheta_0\cdot\delta u_0 - c^2\partial_2\vartheta_0\cdot\delta v_0)\,dx\,dy + \oint\limits_{(L)} c^2\vartheta_0\cdot(n_x\delta u_0+n_y\delta v_0)\,ds \tag{1.9}$$

Подставляя интеграл (1.9) в соотношение (1.8), получаем окончательно

$$\iint\limits_{(\Omega)} c\vartheta_0\cdot c\delta\vartheta_0\,dx\,dy = \oint\limits_{(L)} c^2\vartheta_0\cdot\delta u_{n0}\,ds +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\oint\limits_{(L)}\{c_k c\vartheta_0,\ \delta\vartheta_0\}\,ds + \iint\limits_{(\Omega)}(c^2\vartheta_0\cdot\delta w_0' - c^2\partial_1\vartheta_0\cdot\delta u_0 - c^2\partial_2\vartheta_0\cdot\delta v_0)\,dx\,dy \tag{1.10}$$

Здесь введено еще естественное обозначение величины $\delta u_{n0} = n_x\delta u_0 + n_y\delta v_0$, получающейся при варьировании перемещения u_{n0}, нормального к контуру L, ограничивающему срединную плоскость плиты; нормальное и касательное к контуру L перемещения срединной плоскости плиты определяются соотношениями

$$u_{n0} = n_x u_0 + n_y v_0, \qquad u_{s0} = n_x v_0 - n_y u_0 \tag{1.11}$$

Вариации величин (1.11) будут иметь место в преобразованном выражении для вариации потенциальной энергии, проинтегрированной по площади плиты.

Проделывая, аналогично преобразованиям (1.8) — (1.10), выкладки с остальными слагаемыми выражения (1.3) (всего таких слагаемых в формуле (1.3) содержится сорок), получим проинтегрированную по площади плиты вариацию потенциальной энергии деформации растяжения

$$\frac{1}{\mu}\iint\limits_{(\Omega)}\delta\pi_1\,dx\,dy = \oint\limits_{(L)}\Big(\frac{\partial l^{01}}{\partial n}\cdot\delta u_0 + \frac{\partial l^{02}}{\partial n}\cdot\delta v_0 + l^{00}\cdot\delta w_0' + l^{03}\cdot\delta u_{n0} +$$

$$+ l^{04}\cdot\delta u_{s0} + l^{10}\cdot\delta\vartheta_0 + \frac{\partial l^{11}}{\partial n}\cdot\partial_1\delta\vartheta_0 + \frac{\partial l^{12}}{\partial n}\cdot\partial_2\delta\vartheta_0\Big)\,ds +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\oint\limits_{(L)}[\{g_k^{01},\ \delta u_0\} + \{g_k^{02},\ \delta v_0\} + \{g_k^{00},\ \delta w_0'\} + \{g_k^{11},\ \partial_1\delta u_0\} +$$

$$+\{g_k^{12},\ \partial_2\delta v_0\} + \{g_k^{10},\ \delta(\partial_1 v_0+\partial_2 u_0)\} + \{g_k^{21},\ \partial_1\delta w_0'\} + \{g_k^{22},\ \partial_2\delta w_0'\} +$$

$$+\{g_k^{20},\ \delta\vartheta_0\} + \{g_k^{31},\ \partial_1\delta\vartheta_0\} + \{g_k^{32},\ \partial_2\delta\vartheta_0\} + \{g_k^{41},\ \partial_1^2\delta\vartheta_0\} + \{g_k^{42},\ \partial_2^2\delta\vartheta_0\} +$$

$$+\{[g_k^{40},\ \partial_1\partial_2\delta\vartheta_0\}]\,ds + \iint\limits_{(\Omega)}(l^{(1)}\cdot\delta u_0 + l^{(2)}\cdot\delta v_0 + l^{(0)}\cdot\delta w_0')\,dx\,dy \tag{1.12}$$

Функции $l^{(j)}$, l^{ij} и g_k^{ij}, входящие в выражение вариации потенциальной энергии (1.12), определяются формулами

$$l^{(0)} = 2\Big(c^2 - s^2\triangle + \frac{2mz}{m-2}cs\triangle\Big)w_0' + \Big[s^2\triangle + \frac{2c^2}{m-2} - \frac{m^2z^2}{(m-2)^2}(c^2-s^2\triangle)\triangle\Big]\vartheta_0$$

$$l^{(1)} = (c^2 - s^2\triangle)(\partial_1 w_0' - \triangle u_0) - \frac{4mz}{m-2}cs\triangle\partial_1 w_0' +$$

$$+\frac{m}{m-2}\Big[4zcs\triangle - c^2 + \frac{mz^2}{m-2}(c^2-s^2\triangle)\triangle\Big]\partial_1\vartheta_0 \tag{1.13}$$

$$l^{00} = \frac{\partial s^2 w_0'}{\partial n} - n_x s^2\triangle u_0 - n_y s^2\triangle v_0 - \frac{mz}{m-2}\frac{\partial cs\vartheta_0}{\partial n}$$

$$l^{01} = 2c^2u_0 - \frac{mz}{m-2}cs\partial_1\vartheta_0, \qquad l^{04} = c^2(\partial_2 u_0 - \partial_1 u_0)$$

$$l^{03}=\frac{4mz}{m-2}cs\triangle w_0'+\frac{2}{m-2}\left[c^2-mzcs\triangle-\frac{m^2z^2}{2(m-2)}(c^2-s^2\triangle)\triangle\right]\vartheta_0 \tag{1.14}$$

$$l^{10}=\frac{m^2z^2}{(m-2)^2}\frac{\partial}{\partial n}\left(c^2-\frac{s^2\triangle}{2}\right)\vartheta_0+\frac{2mz}{m-2}\left(n_xcs\triangle u_0+n_ycs\triangle v_0-\frac{1}{2}\frac{\partial csw_0'}{\partial n}\right)$$

$$l^{11}=\frac{m^2z^2}{2(m-2)^2}s^2\partial_1\vartheta_0-\frac{mz}{m-2}csu_0$$

$$g_k^{01}=s_{k-1}j^1,\qquad g_k^{00}=2c_kg,\qquad g_k^{11}=2c_k\partial_1g^1,\qquad g_k^{10}=c_k(\partial_2g^1+\partial_1g^2)$$

$$g_k^{21}=-s_kj^1,\qquad g_k^{20}=\frac{2c_kc\vartheta_0+mzs_{k-1}g}{m-2},\qquad g_k^{31}=\frac{mz}{m-2}c_kj^1 \tag{1.15}$$

$$g_k^{41}=-\frac{mz}{m-2}s_k\partial_1g^1,\qquad g_k^{40}=-\frac{mz}{m-2}s_k(\partial_2g^1+\partial_1g^2)$$

$$g=cw_0'+\frac{mzs\triangle\vartheta_0}{2(m-2)},\qquad g^1=cu_0-\frac{mzs\partial_1\vartheta_0}{2(m-2)} \tag{1.16}$$

$$j^1=s(\triangle u_0-\partial_1w_0')+\frac{mzc\partial_1\vartheta_0}{m-2}$$

Формулы для $l^{(2)}$, l^{02}, l^{12}, g_k^{02}, g_k^{12}, g_k^{22}, g_k^{32}, g_k^{42}, g^2, j^2 получаются из выражений для $l^{(1)}$, l^{01}, l^{11}, g_k^{01}, g_k^{11}, g_k^{21}, g_k^{31}, g_k^{41}, g^1, j^1 заменой u_0, ∂_1 на v_0, ∂_2.

Следующее действие заключается в интегрировании выражений (1.12) по координате z (в пределах толщины плиты $2h$); при этом потребуется вычислять интегралы от произведений операторов c, s, λ, а также на сниженные операторы c_k, s_k, λ_k, s_{k-1} и т. д. Интегралы первого типа представляют собой интегралы от произведений тригонометрических функций на полиномы и вычисляются обычным порядком. Введем следующие обозначения:

$$C=\cos hD,\qquad S=\frac{\sin hD}{D},\qquad \Lambda=\frac{S-hC}{\triangle} \tag{1.17}$$

Тогда интегралы первого типа выразятся через операторы (1,17) и толщину плиты; например:

$$\int_{-h}^{h}c^2\,dz=h+CS,\qquad 2\int_{-h}^{h}zcs\,dz=hS^2+C\Lambda=E$$
$$\int_{-h}^{h}s^2\,dz=hS^2-C\Lambda,\qquad \int_{-h}^{h}(c^2-s^2\triangle)\,dz=2CS \tag{1.18}$$

Сложнее обстоит дело с интегралами, содержащими произведения сниженных операторов на обычные; эти интегралы приходится представлять рядами по степеням величины h. Рассмотрим, например, интеграл

$$I_k=\int_{-h}^{h}c_kc\,dz=2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+s+k}h^{2n+2s+2k+1}\triangle^{n+s}}{(2n+2s+2k+1)(2n+2k)!\,(2s)!}$$

Обозначим $n+s=r$ и будем суммировать по индексам r и s; группируя должным образом слагаемые, получим:

$$I_k=2\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+k}h^{2r+2k+1}\triangle^r}{2r+2k+1}\sum_{s=0}^{r}\frac{1}{(2r-2s+2k)!\,(2s)!}=$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r+k}B_{r+k,k}^{(0)}\frac{h^{2r+2k+1}}{2r+2k+1}\triangle^r \tag{1.19}$$

Так как интегралы типа I_k суммируются впоследствии по индексу снижения k, просуммируем формулу (1.19); имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}I_k=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r+k}B_{r+k,k}^{(0)}\frac{h^{2r+2k+1}}{2r+2k+1}\triangle^r$$

Обозначая $r + k = p$, суммируя по k и по p и группируя соответственно слагаемые, получаем верхнюю строку соотношений (1.20)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-h}^{h} c_k c\,dz &= \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p h^{2p+1}}{2p+1}\sum_{k=1}^{p} B_{pk}^{(0)}\Delta^{p-k}\\
\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-h}^{h} s_{k-1} s\,dz &= -\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p h^{2p+1}}{2p+1}\sum_{k=1}^{p} A_{pk}^{(-1)}\Delta^{p-k}\\
\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-h}^{h} z s_{k-1} c\,dz &= -\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p h^{2p+1}}{2p+1}\sum_{k=1}^{p} B_{pk}^{(-1)}\Delta^{p-k}\\
\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-h}^{h} s_k s\,dz &= \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p h^{2p+3}}{2p+3}\sum_{k=1}^{p} A_{pk}^{(1)}\Delta^{p-k}\\
\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-h}^{h} z s_k c\,dz &= \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p h^{2p+3}}{2p+3}\sum_{k=1}^{p} B_{pk}^{(1)}\Delta^{p-k}\\
\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-h}^{h} z c_k s\,dz &= \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p h^{2p+3}}{2p+3}\sum_{k=1}^{p} A_{pk}^{(0)}\Delta^{p-k}\\
\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-h}^{h} z^2 c_k c\,dz &= \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p h^{2p+3}}{2p+3}\sum_{k=1}^{p} B_{pk}^{(0)}\Delta^{p-k}\\
\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-h}^{h} z^2 s_{k-1} s\,dz &= -\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p h^{2p+3}}{2p+3}\sum_{k=1}^{p} A_{pk}^{(-1)}\Delta^{p-k}\\
\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-h}^{h} z^2 s_k s\,dz &= \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p h^{2p+5}}{2p+5}\sum_{k=1}^{p} A_{pk}^{(1)}\Delta^{p-k}
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

Трехиндексные числа $A_{pk}^{(n)}$ и $B_{pk}^{(n)}$, входящие в состав операторов (1.20), определяются выражениями

$$
A_{pk}^{(n)} = \sum_{s=0}^{p-k}\frac{2}{(2p-2s+n)!\,(2s+1)!}, \qquad B_{pk}^{(n)} = \sum_{s=0}^{p-k}\frac{2}{(2p-2s+n)!\,(2s)!} \tag{1.21}
$$

Значения чисел $A_{pk}^{(n)}$ и $B_{pk}^{(n)}$ для $n = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ при некоторых величинах индексов p и k приведены в таблицах.

Таблица значений чисел $A_{pk}^{(n)}$

p	k	$n=-2$	$n=-1$	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
1	1	2	2	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{60}$
2	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{180}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{315}$
2	2	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{360}$	$\frac{1}{2520}$
3	1	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{168}$	$\frac{73}{60480}$	$\frac{191}{907200}$
3	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{180}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{315}$	$\frac{31}{60480}$	$\frac{13}{181440}$
3	3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{360}$	$\frac{1}{2520}$	$\frac{1}{20160}$	$\frac{1}{181440}$

Таблица значений чисел $B_{pk}^{(n)}$

p	k	$n=-2$	$n=-1$	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
1	1	2	2	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{60}$
2	1	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{11}{60}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{11}{[illegible]}$
2	2	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{360}$	$\frac{[illegible]}{2520}$
3	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{31}{360}$	$\frac{19}{840}$	$\frac{[illegible]}{[illegible]}$	$\frac{163}{181440}$
3	2	$\frac{7}{12}$	$\frac{11}{60}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{11}{1260}$	$\frac{[illegible]}{20160}$	$\frac{37}{181440}$
3	3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{360}$	$\frac{1}{2520}$	$\frac{1}{20160}$	$\frac{1}{181440}$

Вычисляем

$$L^{ij}=\int_{-h}^{h} l^{ij}\,dz$$

используя формулы (1.18), имеем

$$L^{00}=\frac{\partial}{\partial n}\left[(hS^2-C\Lambda)\,w_0'-\frac{m}{2(m-2)}E\vartheta_0\right]+(n_xCSu_0+n_yCSv_0)-hu_{n0}\qquad(1.22)$$

$$L^{01}=\ 2(h+CS)\,u_0-\frac{m}{2(m-2)}E\partial_1\vartheta_0,\quad L^{04}=(h+CS)\,(\partial_2u_0-\partial_1v_0)$$

$$L^{03}=\frac{2m}{m-2}E\triangle w_0'+\frac{4hC^2}{m-2}\,\vartheta_0+\frac{2}{(m-2)^2}\,[2\,(m-1)\,E-m^2h^2CS]\,\triangle\vartheta_0$$

$$L^{10}=\frac{m}{m-2}(n_xE\triangle u_0+n_yE\triangle v_0)+\frac{m}{2(m-2)}\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{mh^2}{m-2}\left(\frac{h}{3}+3CS\right)\vartheta_0-\right.$$
$$\left.-E\left(w_0'+\frac{3m\vartheta_0}{2(m-2)}\right)\right]$$

$$L^{11}=\frac{m^2}{4(m-2)^2}\left[\frac{2}{3}h^2(h-3CS)+E\right]\frac{\partial_1\vartheta_0}{\triangle}-\frac{mEu_0}{2(m-2)}$$

Учитывая формулы (1.17), (1.18) и вводя обозначения для оператора

$$H=(m-2)\,hC^2-mh^2CS\triangle\qquad(1.23)$$

подсчитываем $L^{(i)}=\int_{-h}^{h} l^{(i)}\,dz$; получаем

$$L^{(1)}=2CS\,(\partial_1w_0'-\triangle u_0)-\frac{2mE\triangle}{m-2}\partial_1w_0'-\frac{2m\,(E\triangle+H)}{(m-2)^2}\,\partial_1\vartheta_0$$
$$L^{(0)}=2CS\,(2w_0'-\vartheta_0)-\frac{2mE\triangle}{m-2}\,w_0'+\frac{2m\,[(m-1)\,E\triangle+H]}{(m-2)^2}\,(\vartheta_0+w_0')\qquad(1.24)$$

Выражения для величин L^{02}, L^{12} и $L^{(2)}$ получаются из формул для L^{01}, L^{11} и $L^{(1)}$ заменой букв u_0, ∂_1 буквами v_0, ∂_2.

Найдем теперь вариацию потенциальной энергии всей плиты при ее растяжении

$$\delta\Pi_1=\int_{-h}^{h} dz\iint_{(\Omega)}\delta\pi_1\,dx\,dy$$

для чего проинтегрируем по толщине $2h$ выражение (1.12); при этом используем введенный только что аппарат — формулы (1.20), (1.22), (1.24); после вычислений получим

$$\frac{\delta\Pi_1}{\mu}=\iint\limits_{(\Omega)}(L^{(1)}\cdot\delta u_0+L^{(2)}\cdot\delta v_0+L^{(0)}\cdot\delta w_0')\,dx\,dy+\oint\limits_{(L)}\Bigl(\frac{\partial L^{01}}{\partial n}\cdot\delta u_0+\frac{\partial L^{02}}{\partial n}\cdot\delta v_0+$$

$$+L^{00}\cdot\delta w_0'+L^{03}\cdot\delta u_{n0}+L^{04}\cdot\delta u_{s0}+L^{10}\cdot\delta\vartheta_0+\frac{\partial L^{11}}{\partial n}\cdot\delta\partial_1\vartheta_0+\frac{\partial L^{12}}{\partial n}\cdot\delta\partial_2\vartheta_0\Bigr)ds+$$

$$+\oint\limits_{(L)}\Bigl\{\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p h^{2p+1}}{2p+1}\sum_{k=1}^{p}\Bigl[A_{pk}^{(-1)}\Phi_{pk}^{1}+2B_{pk}^{(0)}\Phi_{pk}^{2}-\frac{m}{m-2}B_{pk}^{(-1)}\Phi_{pk}^{3}\Bigr]+ \tag{1.25}$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p h^{2p+3}}{2p+3}\sum_{k=1}^{p}\Bigl[A_{pk}^{(1)}\Phi_{pk}^{4}+\frac{m}{m-2}(A_{pk}^{(0)}\Phi_{pk}^{5}-B_{pk}^{(1)}\Phi_{pk}^{6})+$$

$$+\frac{m^2}{(m-2)^2}(B_{pk}^{(0)}\Phi_{pk}^{7}-A_{pk}^{(-1)}\Phi_{pk}^{8})\Bigr]+\frac{m^2}{(m-2)^2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p h^{2p+5}}{2p+5}\sum_{k=1}^{p}A_{pk}^{(1)}\Phi_{pk}^{9}\Bigr\}ds$$

Здесь величины Φ_{pk}^{j} выражаются при помощи видоизмененных скобок Грина:

$$[A,B]=\triangle^{p-k}A\cdot\frac{\partial\triangle^{k-1}B}{\partial n}-\frac{\partial\triangle^{p-k}A}{\partial n}\cdot\triangle^{k-1}B \tag{1.26}$$

Таким образом, Φ_{pk}^{j} выражаются скобками

$$\Phi_{pk}^{1}=[\partial_1 w_0'-\triangle u_0,\ \delta u_0]+[\partial_2 w_0'-\triangle v_0,\ \delta v_0],\qquad \Phi_{pk}^{7}=[\partial_1\vartheta_0,\ \partial_1\delta\vartheta_0]+[\partial_2\vartheta_0,\ \partial_2\delta\vartheta_0]$$

$$\Phi_{pk}^{2}=[\partial_1 u_0,\ \partial_1\delta u_0]+{}^1/_2\,[(\partial_1 v_0+\partial_2 u_0),\ \delta(\partial_1 v_0+\partial_2 u_0)]+[\partial_2 v_0,\ \partial_2\delta v_0]+[w_0',\ \delta w_0']+$$

$$+\frac{1}{m-2}[\vartheta_0,\ \delta\vartheta_0],\quad \Phi_{pk}^{3}=[\partial_1\vartheta_0,\ \delta u_0]+[\partial_2\vartheta_0,\ \delta v_0]+[w_0',\ \delta\vartheta_0]$$

$$\Phi_{pk}^{4}=[\partial_1 w_0'-\triangle u_0,\ \partial_1\delta w_0']+[\partial_2 w_0'-\triangle v_0,\ \partial_2\delta w_0'],\qquad \Phi_{pk}^{8}={}^1/_2\,[\triangle\vartheta_0,\ \delta\vartheta_0]$$

$$\Phi_{pk}^{5}=[\triangle u_0-\partial_1 w_0',\ \partial_1\delta\vartheta_0]+[\triangle v_0-\partial_2 w_0',\ \partial_2\delta\vartheta_0]+[\triangle\vartheta_0,\ \delta w_0']-[\partial_1^2\vartheta_0,\ \partial_1\delta u_0]-$$

$$-[\partial_1\partial_2\vartheta_0,\ \delta(\partial_1 v_0+\partial_2 u_0)]-[\partial_2^2\vartheta_0,\ \partial_2\delta v_0],\qquad \Phi_{pk}^{6}=[\partial_1\vartheta_0,\ \delta\partial_1 w_0']+$$

$$+[\partial_2\vartheta_0,\ \partial_2\delta w_0']+[\partial_1 u_0,\ \partial_1^2\delta\vartheta_0]+[\partial_1 v_0+\partial_2 u_0,\ \partial_1\partial_2\delta\vartheta_0]+[\partial_2 v_0,\ \partial_2^2\delta\vartheta_0]$$

$$\Phi_{pk}^{9}=[\partial_1^2\vartheta_0,\ \partial_1^2\delta\vartheta_0]+2[\partial_1\partial_2\vartheta_0,\ \partial_1\partial_2\delta\vartheta_0]+[\partial_2^2\vartheta_0,\ \partial_2^2\delta\vartheta_0] \tag{1.27}$$

§ 2. Вариация потенциальной энергии изгиба плиты.

Деформация изгиба плиты характеризуется величинами u_0', v_0', w_0; вычисляя по перемещениям (0.1) вариации деформаций, соответствующие изгибу, получим

$$\delta\varepsilon_x=s\partial_1\delta u_0'-\frac{m\lambda\partial_1^2}{4(m-1)}\delta\vartheta_0',\quad \delta\gamma_{xy}=s(\partial_1\delta v_0'+\partial_2\delta u_0')-\frac{m\lambda\partial_1\partial_2}{2(m-1)}\delta\vartheta_0' \tag{2.1}$$

$$\delta\varepsilon_z=-s\triangle\delta w_0-\frac{m(s+zc)}{4(m-1)}\delta\vartheta_0',\qquad \delta\gamma_{zx}=c(\delta u_0'+\partial_1\delta w_0)-\frac{mzs}{2(m-1)}\partial_1\delta\vartheta_0'$$

Вариации $\delta\varepsilon_y$ и $\delta\gamma_{yz}$ получаются из вариаций $\delta\varepsilon_x$ и $\delta\gamma_{zx}$ соответствующей заменой букв. Напряжения изгиба, обусловленные величинами u_0', v_0', w_0, из формул (0.5) и вариации деформаций (2.1) подставим в выражение (1.1); тогда

$$\frac{\delta\pi_2}{\mu}=2(s\partial_1 u_0'\cdot s\partial_1\delta u_0'+s\partial_2 v_0'\cdot s\partial_2\delta v_0'+s\triangle w_0\cdot s\triangle\delta w_0)+\frac{m\delta(s\triangle w_0\cdot s\vartheta_0')}{2(m-1)}+$$

$$+s(\partial_1 v_0'+\partial_2 u_0')\cdot s\delta(\partial_1 v_0'+\partial_2 u_0')+\frac{m^2+6m-8}{8(m-1)^2}s\vartheta_0'\cdot s\delta\vartheta_0'+$$

$$+\frac{m^2z^2}{4(m-1)^2}(s\partial_1\vartheta_0'\cdot s\partial_1\delta\vartheta_0'+s\partial_2\vartheta_0'\cdot s\partial_2\delta\vartheta_0')+\frac{m(m-2)z}{8(m-1)^2}s\vartheta_0'\cdot c\delta\vartheta_0'-$$
$$-\frac{mz}{2(m-1)}\delta\,[c(u_0'+\partial_1w_0)\cdot s\partial_1\vartheta_0'+c(v_0'+\partial_2w_0)\cdot s\partial_2\vartheta_0'-c\vartheta_0'\cdot s\triangle w_0]+$$
$$+c(u_0'+\partial_1w_0)\cdot c\delta(u_0'+\partial_1w_0)+c(v_0'+\partial_2w_0)\cdot c\delta(v_0'+\partial_2w_0)+$$
$$+\frac{m^2zc\vartheta_0'}{8(m-1)^2}\cdot(s+zc)\,\delta\vartheta_0'-\frac{m}{2(m-1)}\delta\,[\partial_1s(u_0'\cdot\partial_1+v_0'\cdot\partial_2)\,\partial_1\lambda\vartheta_0'+$$
$$+\partial_2s(u_0'\cdot\partial_1+v_0'\cdot\partial_2)\,\partial_2\lambda\vartheta_0']-\frac{ms\vartheta_0'}{4(m-1)^2}\cdot\lambda\triangle\delta\vartheta_0'+ \tag{2.2}$$
$$+\frac{m^2}{8(m-1)^2}(\lambda\partial_1{}^2\vartheta_0'\cdot\lambda\partial_1{}^2\delta\vartheta_0'+2\lambda\partial_1\partial_2\vartheta_0'\cdot\lambda\partial_1\partial_2\delta\vartheta_0'+\lambda\partial_2{}^2\vartheta_0'\cdot\lambda\partial_2{}^2\delta\vartheta_0')$$

Интегрируя вариацию потенциальной энергии единицы объема (2.2) по площади плиты Ω и преобразуя полученные при этом интегралы (их всего будет сорок шесть) при помощи обобщенной формулы Грина (1.4) и формул интегрирования по частям (1.7), получаем после всех вычислений

$$\frac{1}{\mu}\iint_{(\Omega)}\delta\pi_2\,dx\,dy=\oint_{(L)}\Big(\frac{\partial k^{01}}{\partial n}\cdot\delta u_0'+\frac{\partial k^{02}}{\partial n}\cdot\delta v_0'+k^{00}\cdot\delta w_0+k^{03}\cdot\delta\omega_0+$$
$$+k^{04}\cdot\delta u_{s0}'+k^{10}\cdot\delta\vartheta_0'+\frac{\partial k^{11}}{\partial n}\cdot\delta\partial_1\vartheta_0'+\frac{\partial k^{12}}{\partial n}\cdot\delta\partial_2\vartheta_0'\Big)\,ds+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\oint_{(L)}[\{f_k{}^{01},\ \delta(u_0'+\partial_1w_0)\}+\{f_k{}^{02},\ \delta(v_0'+\partial_2w_0)\}+\{f_k{}^{00},\ \delta w_0\}+\{f_k{}^{11},\ \partial_1\delta u_0'\}+$$
$$+\{f_k{}^{12},\ \partial_2\delta v_0'\}+\{f_k{}^{10},\ \delta(\partial_1v_0'+\partial_2u_0')\}+\{f_k{}^{20},\ \delta\vartheta_0'\}+\{f_k{}^{31},\ \partial_1\delta\vartheta_0'\}+\{f_k{}^{32},\ \partial_2\delta\vartheta_0'\}+$$
$$+\{f_k{}^{41},\ \partial_1{}^2\delta\vartheta_0'\}+\{f_k{}^{42},\ \partial_2{}^2\delta\vartheta_0'\}+\{f_k{}^{40},\ \partial_1\partial_2\delta\vartheta_0'\}]\,ds+$$
$$+\iint_{(\Omega)}(k^{(1)}\cdot\delta u_0'+k^{(2)}\cdot\delta v_0'+k^{(0)}\cdot\delta w_0)\,dx\,dy \tag{2.3}$$

В соотношении (2.3) содержатся вариации величин

$$\omega_0=n_xu_0'+n_yv_0'-\frac{\partial w_0}{\partial n},\qquad u_{s0}'=n_xv_0'-n_yu_0' \tag{2.4}$$

Функции $k^{(j)}$, k^{ij} и $f_k{}^{ij}$, входящие в выражение вариации потенциальной энергии (2.3), определяются формулами

$$k^{(1)}=(c^2-s^2\triangle)(u_0'+\partial_1w_0)-\frac{2mz}{m-1}cs\triangle\partial_1w_0- \tag{2.5}$$
$$-\frac{m}{4(m-1)^2}[(m-2)s^2+8(m-1)zcs+mz^2(c^2-s^2\triangle)]\ \partial_1\vartheta_0'$$
$$k^{(0)}=-2\Big(c^2-s^2\triangle+\frac{mz}{m-1}cs\triangle\Big)\triangle w_0+$$
$$+\frac{1}{4(m-1)^2}[(3m^2-6m+4)s^2\triangle-4(m-1)^2c^2-m^2z^2(c^2-s^2\triangle)\triangle]\,\vartheta_0'$$

$$k^{00}=n_xc^2u_0'+n_yc^2v_0'+\frac{\partial}{\partial n}\Big[c^2w_0-\frac{mzcs\vartheta_0'}{2(m-1)}+k^{03}\Big],\qquad k^{01}=2s^2u_0'-\frac{m\lambda s\partial_1\vartheta_0'}{2(m-1)}$$
$$k^{03}=\frac{2mzcs\triangle w_0}{m-1}+\frac{1}{4(m-1)^2}[4m(m-1)zcs-(m-2)^2s^2+m^2z^2(c^2-s^2\triangle)]\,\vartheta_0'$$
$$k^{04}=s^2(\partial_2u_0'-\partial_1v_0'),\qquad k^{11}=\frac{m\lambda}{2(m-1)}\Big[\frac{m\lambda\partial_1\vartheta_0'}{4(m-1)}-su_0'\Big] \tag{2.6}$$
$$k^{10}=\frac{m}{2(m-1)}[n_x(\lambda\triangle-zc)su_0'+n_y(\lambda\triangle-zc)sv_0']-\frac{mz}{2(m-1)}\frac{\partial csw_0}{\partial n}+$$
$$+\frac{m^2}{4(m-1)^2}\frac{\partial}{\partial n}\Big(z^2s^2-\frac{\lambda^2\triangle}{2}\Big)\vartheta_0'$$

$$f_k^{01} = c_k\varphi^1, \quad f_k^{00} = 2s_{k-1}f, \quad f_k^{11} = 2s_{k-1}\partial_1 f^1, \quad f_k^{10} = s_k(\partial_2 f^1 + \partial_1 f^2)$$

$$f_k^{20} = \frac{m}{2(m-1)}(s_k + zc_k)f + \frac{m-2}{2(m-1)^2}s_k s\vartheta_0', \quad f_k^{31} = -\frac{mzs_k\varphi^1}{2(m-1)} \tag{2.7}$$

$$f_k^{41} = -\frac{m\lambda_k\partial_1 f^1}{2(m-1)}, \quad f_k^{40} = -\frac{m\lambda_k}{2(m-1)}(\partial_2 f^1 + \partial_1 f^2)$$

Здесь (2.8)

$$f = s\triangle w_0 + \frac{m(s+zc)}{4(m-1)}\vartheta_0', \quad f^1 = su_0' - \frac{m\lambda\partial_1\vartheta_0'}{4(m-1)}, \quad \varphi^1 = c(u_0' + \partial_1 w_0) - \frac{mzs\partial_1\vartheta_0'}{2(m-1)}$$

Формулы для $k^{(2)}$, k^{02}, k^{12}, f_k^{02}, f_k^{12}, f_k^{32}, f_k^{42}, f^2 и φ^2 получаются из выражений (2.5) — (2.8) заменой букв.

При интегрировании выражения (2.3) по толщине плиты для последующих преобразований, наряду с формулами (1.20), приходится использовать аналогичные соотношения, содержащие операторы λ и λ_k. Этим соотношениям можно придать такую форму:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-h}^{h} s_k\lambda dz &= \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p h^{2p+5}}{2p+5}\sum_{k=1}^{p} C_{pk}\triangle^{p-k}\\
\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-h}^{h} \lambda_k s dz &= \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p h^{2p+5}}{2p+5}\sum_{k=1}^{p} D_{pk}\triangle^{p-k}\\
\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-h}^{h} \lambda_k\lambda dz &= \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p h^{2p+7}}{2p+7}\sum_{k=1}^{p} F_{pk}\triangle^{p-k}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Вывод соотношений (2.9) производится по той же схеме, что и формул (1.20); коэффициенты C_{pk}, D_{pk} и F_{pk} выражаются через трехиндексные числа (1.21)

$$\begin{aligned}
C_{pk} &= B_{p+1,k}^{(1)} - A_{p+1,k}^{(1)}, \quad & E_{pk} &= A_{pk}^{(0)} + A_{pk}^{(1)} + B_{pk}^{(0)} + B_{pk}^{(1)}\\
D_{pk} &= A_{pk}^{(2)} - A_{pk}^{(3)}, \quad & F_{pk} &= B_{p+1,k}^{(2)} - A_{p+1,k}^{(2)} - B_{p+1,k}^{(3)} + A_{p+1,k}^{(3)}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Вычисляем далее операторы

$$K^{ij} = \int_{-h}^{h} k^{ij}dz, \qquad K^{(j)} = \int_{-h}^{h} k^{(j)}dz$$

используя при этом интегралы типа (1.18). Получаем

$$\begin{aligned}
K^{01} &= 2(hS^2 - C\Lambda)u_0' - \frac{m(hS^2 - 3C\Lambda)}{4(m-1)\triangle}\partial_1\vartheta_0', \quad K^{04} = (hS^2 - C\Lambda)(\partial_2 u_0' - \partial_1 v_0')\\
K^{00} &= h\left(n_x u_0' + n_y v_0' + \frac{\partial w_0}{\partial n}\right) + n_x CSu_0' + n_y CSv_0' + \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial n}\left[CSw_0 - \frac{mE\vartheta_0'}{4(m-1)} + K^{03}\right]\\
K^{03} &= \frac{mE\triangle w_0}{m-1} + \frac{1}{2(m-1)^2}[(m-1)(m-2)E - (m-2)^2 hS^2 + m^2h^2CS]\vartheta_0'\\
K^{10} &= -\frac{m}{4(m-1)}\frac{\partial Ew_0}{\partial n} - \frac{m}{m-1}(n_x C\Lambda u_0' + n_y C\Lambda v_0') + \\
&\qquad + \frac{m^2}{8(m-1)^2}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{h^3}{3} + \frac{7}{2}E - 2hS^2 - 3h^2CS\right)\frac{\vartheta_0'}{\triangle}\\
K^{11} &= \frac{m^2}{8(m-1)^2}\left(\frac{h^2}{3} - \frac{5}{2}E + 2hS^2 + h^2CS\right)\frac{\partial_1\vartheta_0'}{\triangle^2} - \frac{m(hS^2 - 3C\Lambda)}{4(m-1)\triangle}u_0'
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$K^{(1)} = 2CS(u_0' + \partial_1 w_0) - \frac{mE\triangle}{m-1}\partial_1 w_0 - \frac{m(E+F)}{2(m-1)}\partial_1\vartheta_0'$$
$$K^{(0)} = -2CS(\vartheta_0' + 2\triangle w_0) - \frac{mE\triangle^2}{m-1}w_0 - \frac{m(E-F)}{2(m-1)}\triangle\vartheta_0' \qquad (2.12)$$
$$F = \frac{mh^2CS + (m-2)hS^2}{m-1} \qquad (2.13)$$

Формулы для величин K^{02}, K^{12}, $K^{(2)}$ получаются из формул для K^{01}, K^{11}, $K^{(1)}$ заменой букв u_0', ∂_1 буквами v_0', ∂_2. Вариация потенциальной энергии изгиба всей плиты при ее изгибе получается интегрированием по толщине выражения (2.3). Имеем

$$\frac{\delta\Pi_2}{\mu} = \iint\limits_{(\Omega)} (K^{(1)}\cdot\delta u_0' + K^{(2)}\cdot\delta v_0' + K^{(0)}\cdot\delta w_0)\,dx\,dy +$$
$$+\oint\limits_{(L)}\left(\frac{\partial K^{01}}{\partial n}\cdot\delta u_0' + \frac{\partial K^{02}}{\partial n}\cdot\delta v_0' + K^{00}\cdot\delta w_0 + K^{03}\cdot\delta\omega_0 + K^{04}\cdot\delta u_{s0}' + K^{10}\cdot\delta\vartheta_0' +\right.$$
$$\left.+\frac{\partial K^{11}}{\partial n}\cdot\delta\partial_1\vartheta_0' + \frac{\partial K^{12}}{\partial n}\cdot\delta\partial_2\vartheta_0'\right)ds + \oint\limits_{(L)}\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p h^{2p+1}}{2p+1}\sum_{k=1}^{p}\left[B_{pk}^{(0)}\Psi_{pk}^{1} -\right.\right.$$
$$\left. -2A_{pk}^{(-1)}\Psi_{pk}^{2} - \frac{m}{2(m-1)}(A_{pk}^{(-1)} + B_{pk}^{(-1)})\Psi_{pk}^{3}\right] + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p h^{2p+3}}{2p+3}\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{p}\left[A_{pk}^{(1)}\Psi_{pk}^{4} + \frac{m}{2(m-1)}(A_{pk}^{(0)}\Psi_{pk}^{5} - B_{pk}^{(1)}\Psi_{pk}^{6}) + \frac{m^2E_{pk}}{8(m-1)^2}\Psi_{pk}^{7}\right] +$$
$$+\frac{m}{2(m-1)}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p h^{2p+5}}{2p+5}\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{m}{2(m-1)}A_{pk}^{(1)}\Psi_{pk}^{8} - C_{pk}\Psi_{pk}^{9} - D_{pk}\Psi_{pk}^{10}\right] +$$
$$\left.+\frac{m^2}{8(m-1)^2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p h^{2p+7}}{2p+7}\sum_{k=1}^{p}F_{pk}\Psi_{pk}^{11}\right\}ds \qquad (2.14)$$

Функции Ψ_{pk}^{j} определены при помощи видоизмененных скобок Грина (1.26) следующими соотношениями: (2.15)

$$\Psi_{pk}^{0} = [\triangle w_0, \delta\vartheta_0'], \qquad \Psi_{pk}^{1} = [u_0' + \partial_1 w_0, \delta(u_0' + \partial_1 w_0)] + [v_0' + \partial_2 w_0, \delta(v_0' + \partial_2 w_0)]$$
$$\Psi_{pk}^{2} = [\triangle w_0, \delta w_0], \qquad \Psi_{pk}^{3} = [\vartheta_0', \delta w_0], \qquad \Psi_{pk}^{7} = [\vartheta_0', \delta\vartheta_0']$$
$$\Psi_{pk}^{4} = 2[\partial_1 u_0', \delta\partial_1 u_0'] + [\partial_1 v_0' + \partial_2 u_0', \delta(\partial_1 v_0' + \partial_2 u_0')] + 2[\partial_2 v_0', \delta\partial_2 v_0'] +$$
$$+\frac{m}{2(m-1)}\Psi_{pk}^{0} + \frac{m-2}{2(m-1)^2}\Psi_{pk}^{7}, \qquad \Psi_{pk}^{8} = [\partial_1\vartheta_0', \delta\partial_1\vartheta_0'] + [\partial_2\vartheta_0', \delta\partial_2\vartheta_0']$$
$$\Psi_{pk}^{5} = \Psi_{pk}^{0} - [\partial_1\vartheta_0', \delta(u_0' + \partial_1 w_0)] - [\partial_2\vartheta_0', \delta(v_0' + \partial_2 w_0)]$$
$$\Psi_{pk}^{6} = [u_0' + \partial_1 w_0, \delta\partial_1\vartheta_0'] + [v_0' + \partial_2 w_0, \delta\partial_2\vartheta_0']$$
$$\Psi_{pk}^{11} = [\partial_1^2\vartheta_0', \delta\partial_1^2\vartheta_0'] + 2[\partial_1\partial_2\vartheta_0', \delta\partial_1\partial_2\vartheta_0'] + [\partial_2^2\vartheta_0', \delta\partial_2^2\vartheta_0']$$
$$\Psi_{pk}^{9} = [\partial_1^2\vartheta_0', \delta\partial_1 u_0'] + [\partial_1\partial_2\vartheta_0', \delta(\partial_2 u_0' + \partial_1 v_0')] + [\partial_2^2\vartheta_0', \delta\partial_2 v_0']$$
$$\Psi_{pk}^{10} = [\partial_1 u_0', \delta\partial_1^2\vartheta_0'] + [\partial_2 u_0' + \partial_1 v_0', \delta\partial_1\partial_2\vartheta_0'] + [\partial_2 v_0', \delta\partial_2^2\vartheta_0']$$

§ 3. Элементарная работа внешних сил, приложенных к плите. Учтем прежде всего работу сил, приложенных к торцам плиты; элементарная работа этих сил

$$\delta A' = \iint\limits_{(\Omega)} (\mathbf{p}^+\cdot\delta\mathbf{u}^+ + \mathbf{p}^-\cdot\delta\mathbf{u}^-)\,dx\,dy \qquad (3.1)$$

Здесь через $\mathbf{p}^+$ обозначен вектор внешних сил, приходящийся на единицу площади торца $z = h$; вектор $\mathbf{p}^-$ действует на торце $z = -h$; $\mathbf{u}^+$ и $\mathbf{u}^-$ векторы,—перемещений точек торцов $z = \pm h$. Раскрывая скалярные произведения в (3.1), имеем

$$\mathbf{p}^+\cdot\delta\mathbf{u}^+ + \mathbf{p}^-\cdot\delta\mathbf{u}^- = p_x{}^+\delta u^+ + p^+{}_y\delta v^+ + p^+{}_z\delta w^+ + p_x{}^-\delta u^- + p_y{}^-\delta v^- + p_z{}^-\delta w^-$$

Значения вариаций перемещений на торцах легко получить варьированием формул (0.1) и подстановкой вместо ε значений $+h$ или $-h$; так, например,

$$\delta u^+ = C\delta u_0 - \frac{mhS}{2(m-2)}\partial_1\delta\vartheta_0 + S\delta u_0' - \frac{m\Lambda}{4(m-1)}\partial_1\delta\vartheta_0' \tag{3.2}$$

Входящие в формулу (3.2) операторы C, S, Λ были определены ранее (1.17).

Очевидно, что задаче растяжения плиты соответствуют комбинации торцевых нагрузок, представляемые формулами

$$p_x{}^+ + p_x{}^- = \eta_x, \qquad p_y{}^+ + p_y{}^- = \eta_y, \qquad p_z{}^+ - p_z{}^- = \zeta \tag{3.3}$$

тогда как задаче изгиба соответствуют

$$p_x{}^+ - p_x{}^- = t_x, \qquad p_y{}^+ - p_y{}^- = t_y, \qquad p_z{}^+ + p_z{}^- = p \tag{3.4}$$

Введем, кроме того, дифференциальные комбинации от нагрузок

$$\partial_1\eta_x + \partial_2\eta_y = \eta^*, \qquad \partial_1 t_x + \partial_2 t_y = t^* \tag{3.5}$$

Тогда, подставляя вариации торцевых перемещений (формулы типа (3.2)) в элементарную работу (3.1) и учитывая обозначения (3.3) и (3.4), получим раздельные выражения для элементарной работы торцевых сил в задаче растяжения (δA_1) и в задаче изгиба (δA_2) толстой плиты

$$\begin{aligned}\delta A_1 = \iint\limits_{(\Omega)} \Big[\eta_x\cdot C\delta u_0 + \eta_y\cdot C\delta v_0 + \zeta\cdot S\delta w_0' -\\ - \frac{m}{2(m-2)}(\eta_x\cdot hS\partial_1 + \eta_y\cdot hS\partial_2 - \zeta\cdot\Lambda\triangle)\,\delta\vartheta_0\Big]\,dx\,dy\\ \delta A_2 = \iint\limits_{(\Omega)} \Big[t_x\cdot S\delta u_0' + t_y\cdot S\delta v_0' + p\cdot C\delta w_0 -\\ - \frac{m}{4(m-1)}(t_x\cdot\Lambda\partial_1 + t_y\cdot\Lambda\partial_2 + p\cdot hS)\,\delta\vartheta_0'\Big]\,dx\,dy\end{aligned} \tag{3.6}$$

Выражения (3.6) преобразуем при помощи (1.4) и формул (1.7); опуская вычисления и применяя обозначения (1.5), (1.11), (2.4) и (3.5), приводим результат

$$\begin{aligned}\delta A_1 = \iint\limits_{(\Omega)} [(C\eta_x - \delta_1\Xi)\cdot\delta u_0 + (C\eta_y - \partial_2\Xi)\cdot\delta v_0 + (S\zeta + \Xi)\cdot\delta w_0']\,dx\,dy +\\ + \sum_{k=1}^{\infty}\oint\limits_{(L)} [\{C_k\eta_x, \delta u_0\} + \{C_k\eta_y, \delta v_0\} + \{S_k\zeta, \delta w_0'\} +\\ + \frac{m}{2(m-2)}(\{\Lambda_{k-1}\zeta, \delta\vartheta_0\} - h\{S_k\eta_x, \delta\partial_1\vartheta_0\} - h\{S_k\eta_y, \delta\partial_2\vartheta_0\})]\,ds +\\ + \oint\limits_{(L)} \Big[\Xi\cdot\delta u_{n0} - \frac{mh}{2(m-2)}(n_x S\eta_x + n_y S\eta_y)\cdot\delta\vartheta_0\Big]\,ds\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\delta A_2 = \iint\limits_{(\Omega)} [(St_x - \partial_1\Theta)\cdot\delta u_0' + (St_y - \delta_2\Theta)\cdot\delta v_0' + (Cp - \triangle\Theta)\cdot\delta w_0]\,dx\,dy +\\ + \sum_{k=1}^{\infty}\oint\limits_{(L)} \Big[\{S_k t_x, \delta u_0'\} + \{S_k t_y, \delta v_0'\} + \{C_k p, \delta w_0\} -\\ - \frac{m}{4(m-1)}(\{\Lambda_k t_x, \delta\partial_1\vartheta_0'\} + \{\Lambda_k t_y, \delta\partial_2\vartheta_0'\} + \{hS_k p, \delta\vartheta_0'\})\Big]\,ds +\\ + \oint\limits_{(L)} \Big[\Theta\delta\omega_0 + \frac{\partial\Theta}{\partial n}\cdot\delta w_0 - \frac{m}{4(m-1)}(n_x\Lambda t_x + n_y\Lambda t_y)\cdot\delta\vartheta_0'\Big]\,ds\end{aligned} \tag{3.8}$$

Здесь для краткости введены величины Ξ и Θ, представляющие собой дифференциальные операции над торцевой нагрузкой

$$\Xi = \frac{m}{2(m-2)}(hS\eta^* + \Lambda\triangle\zeta), \qquad \Theta = \frac{m}{4(m-1)}(\Lambda t^* - hSp) \tag{3.9}$$

Отметим, кстати, что без ущерба общности можно считать торцевую нагрузку $\mathbf{p}$ отсутствующей, так как задачу о равновесии толстой плиты (как при изгибе, так и при растяжении) всегда можно считать составленной из двух задач: 1) задачи о равновесии бесконечного слоя, нагруженного торцевой нагрузкой, решение которой является известным [4], и 2) задачи о равновесии толстой плиты, нагруженной по боковой поверхности при нулевой нагрузке на торцах. Таким образом, задача о напряженном состоянии толстой плиты сводится фактически к отысканию однородных решений, соответствующих отсутствию торцевой нагрузки [5]. Получение же формул (3.7), (3.8) преследовало лишь цель дать единообразный подход к нагрузкам любого вида, действующим на плиту.

Переходим к вычислению элементарной работы внешних сил, приложенных к боковой поверхности плиты. Обозначим вектор поверхностной нагрузки на единицу площади через $\mathbf{q}_n$; тогда элементарная работа поверхностных сил будет равна

$$\delta A'' = \int_{-h}^{h} dz \oint_{(L)} \mathbf{q}_n \cdot \delta\mathbf{u}\, ds = \int_{-h}^{h} dz \oint_{(L)} (q_{nx}\delta u + q_{ny}\delta v + q_{nz}\delta w)\, ds \tag{3.10}$$

Варьируем u, v, w; результат согласно формулам (0.1), подставляем в соотношение (3.10); далее, меняем порядок интегрирования и отделяем части элементарной работы поверхностных сил, соответствующие задачам растяжения δA_3 и изгиба δA_4. Имеем

$$\delta A_3 = \oint_{(L)} \Big\{ \int_{-h}^{h} q_{nx} c dz\, \delta u_0 + \int_{-h}^{h} q_{ny} c dz\, \delta v_0 + \int_{-h}^{h} q_{nz} s dz\, \delta w_0' -$$
$$- \frac{m}{2(m-2)} \Big(\int_{-h}^{h} q_{nx} sz\, dz \delta\partial_1\vartheta_0 + \int_{-h}^{h} q_{ny} sz\, dz\delta\partial_2\vartheta_0 - \int_{-h}^{h} q_{nz}\lambda \triangle dz \delta\vartheta_0 \Big) \Big\} ds \tag{3.11}$$

$$\delta A_4 = \oint_{(L)} \Big\{ \int_{-h}^{h} q_{nx} s dz\, \delta u_0' + \int_{-h}^{h} q_{ny} s dz\, \delta v_0' + \int_{-h}^{h} q_{nz}\, c dz\, \delta w_0 -$$
$$- \frac{m}{4(m-1)} \Big(\int_{-h}^{h} q_{nx}\, \lambda dz\, \delta\partial_1\vartheta_0' + \int_{-h}^{h} q_{ny} \lambda dz\, \delta\partial_2\vartheta_0' + \int_{-h}^{h} q_{nz} s z dz \delta\vartheta_0' \Big) \Big\} ds \tag{3.12}$$

Для фактического вычисления интегралов, стоящих в выражениях (3.11), (3.12), можно разложить нагрузку $\mathbf{q}_n = \mathbf{q}_n(z)$ в ряд по степеням z; после проведения соответствующих выкладок формулы для δA_3, δA_4 представятся рядами по степеням толщины плиты.

Другой путь состоит во введении статических и сверхстатических характеристик распределения внешних усилий, приложенных вдоль боковой поверхности плиты

$$R_x = \int_{-h}^{h} q_{nx} dz, \qquad R_y = \int_{-h}^{h} q_{ny} dz, \qquad Q = \int_{-h}^{h} q_{nz} dz$$
$$M_x = -\int_{-h}^{h} q_{ny} z dz, \qquad M_y = \int_{-h}^{h} q_{nx} z dz, \qquad W = \int_{-h}^{h} q_{nz} z dz \tag{3.13}$$
$$R_x^{(2n)} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_{-h}^{h} q_{nx} z^{2n}\, dz, \qquad R_y^{(2n)} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_{-h}^{h} q_{ny} z^{2n}\, dz$$

$$M_x^{(2n+1)} = -\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_{-h}^{h} q_{ny} z^{2n+1}\,dz, \qquad M_y^{(2n+1)} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_{-h}^{h} q_{nx} z^{2n+1}\,dz \quad (3.14)$$

$$Q^{(2n)} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_{-h}^{h} q_{nz} z^{2n}\,dz, \qquad W^{(2n+1)} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_{-h}^{h} q_{nz} z^{2n+1}\,dz$$

Здесь R_x, R_y — проекции главного вектора боковой нагрузки на оси x, y; Q — перерезывающая сила; M_x, M_y — моменты относительно осей x и y. Далее идут сверхстатические характеристики: W — бисила; поливекторы $R_x^{(2n)}$ $R_y^{(2n)}$, полимоменты $M_x^{(2n+1)}$, $M_y^{(2n+1)}$, перерезывающие силы $Q^{(2n)}$ и, наконец, полисилы (полибисилы) $W^{(2n+1)}$ различных порядков. Возвращая операторам c, s, λ их первоначальный смысл (0.3) и используя обозначения (3.13), (3.14), получаем

$$\delta A_3 = \oint_{(L)} \Big\{R_x\delta u_0 + R_y\delta v_0 + W\delta w_0' + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[R_x^{(2n)}\cdot\delta\left(\Delta^n u_0 + \frac{nm}{m-2}\,\partial_1\Delta^{n+1}\vartheta_0\right) +$$
$$+ R_y^{(2n)}\,\delta\left(\Delta^n v_0 + \frac{nm}{m-2}\,\partial_2\Delta^{n-1}\vartheta_0\right) + W^{(2n+1)}\,\delta\left(\Delta^n w_0' - \frac{nm}{m-2}\Delta^n\vartheta_0\right)\Big]\Big\}\,ds \quad (3.15)$$

$$\delta A_4 = \oint_{(L)} \Big\{M_y\cdot\delta u_0' - M_x\cdot\delta v_0' + Q\delta w_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[M_y^{(2n+1)}\cdot\delta\left(\Delta^n u_0' + \frac{nm}{2m-2}\,\partial_1\Delta^{n-1}\vartheta_0'\right) -$$
$$- M_x^{(2n+1)}\delta\left(\Delta^n v_0' + \frac{nm}{2m-2}\,\partial_2\Delta^{n-1}\vartheta_0'\right) + Q^{(2n)}\cdot\delta\left(\Delta^n w_0 + \frac{nm}{2m-2}\Delta^{n-1}\vartheta_0'\right)\Big]\Big\}\,ds \quad (3.16)$$

§ 4. Дифференциальные уравнения теории толстых плит. Для получения дифференциальных уравнений (и краевых условий) надо приравнять нулю вариацию потенциальной энергии всей системы, в которую входят вариация потенциальной энергии деформации плиты и вариация потенциальной энергии внешних сил; последняя равна элементарной работе этих сил, взятой с противоположным знаком. Задачи растяжения-сжатия и изгиба плиты можно рассматривать раздельно; из принципа минимума потенциальной энергии для каждой из этих задач имеем

$$\delta\Pi_1 - \delta A_1 - \delta A_3 = 0, \qquad \delta\Pi_2 - \delta A_2 - \delta A_4 = 0 \quad (4.1)$$

Входящие сюда величины определяются выражениями (1.25), (3.7), (3.14), (2.14), (3.8) и (3.15). Формулы (4.1) содержат двойные интегралы по области плиты (Ω) и бесконечный ряд контурных интегралов. Приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях δu_0, δv_0, $\delta w_0'$, $\delta u_0'$, $\delta v_0'$ и δw_0 в двойных интегралах, получим дифференциальные уравнения задачи растяжения L и изгиба K плиты

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= \frac{1}{\mu}(C\eta_x - \partial_1\Xi), & K^{(1)} &= \frac{1}{\mu}(St_x - \partial_1\Theta) \\ L^{(2)} &= \frac{1}{\mu}(C\eta_y - \partial_2\Xi), & K^{(2)} &= \frac{1}{\mu}(St_y - \partial_2\Theta) \\ -L^{(0)} &= \frac{1}{\mu}(-S\zeta - \Xi), & -K^{(0)} &= \frac{1}{\mu}(-Cp + \Delta\Theta) \end{aligned} \quad (4.2)$$

В последних уравнениях систем (4.2) изменены знаки.

А. И. Лурье получил иным путем [2] дифференциальные уравнения равновесия слоя. Введем матрицы-столбцы (векторы)

$$u = \begin{Vmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0' \end{Vmatrix}, \quad w = \begin{Vmatrix} u_0' \\ v_0' \\ w_0 \end{Vmatrix}, \quad \eta = \begin{Vmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ -\zeta \end{Vmatrix}, \quad t = \begin{Vmatrix} t_x \\ t_y \\ -p \end{Vmatrix} \quad (4.3)$$

и квадратные матрицы $a = \| a_{kl} \|$, $\alpha = \| \alpha_{kl} \|$ с элементами

$$
\begin{aligned}
a_{kk} &= -2\left(S\triangle + \frac{mhC}{m-2}\partial_k^2\right), \quad a_{kl} = -\frac{2mhC}{m-2}\partial_k\partial_l, \quad a_{k3} = 2\partial_k\left(S - \frac{mhC}{m-2}\right) \\
a_{3k} &= -\frac{2\partial_k}{m-2}(2C + mhS\triangle), \quad a_{33} = -\frac{2}{m-2}[2(m-1)C + mhS\triangle]
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{kk} &= 2C - \frac{mhS}{m-1}\partial_k^2, \quad \alpha_{kl} = -\frac{mhS}{m-1}\partial_k\partial_l, \quad \alpha_{k3} = \partial_k\left(2C + \frac{mhS\triangle}{m-1}\right) \\
\alpha_{3k} &= \frac{\partial_k}{m-1}[(m-2)S + mhC], \quad \alpha_{33} = \frac{\triangle}{m-1}[(3m-2)S - mhC]
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

причем k, $l = 1, 2$. Тогда уравнения А. И. Лурье можно написать в виде

$$
au = \frac{1}{\mu}\eta, \qquad \alpha w = \frac{1}{\mu}t \tag{4.6}
$$

Матрицы a и α преобразуют векторы u, w (с точностью до множителя $1/\mu$) в векторы напряжений на торцах плиты. Определители матриц a и α дают операторы разрешающих уравнений для функций напряжений А. И. Лурье [2,4]; эти определители суть

$$
|a| = -\frac{16m}{m-2}(CS + h)S\triangle^2, \qquad |\alpha| = \frac{8m}{m-1}(CS - h)C\triangle \tag{4.7}
$$

Наряду с матрицами a и α, введем матрицы b и β, преобразующие векторы u и w в перемещения торцов плиты; элементы этих матриц таковы:

$$
\begin{aligned}
b_{kk} &= C - \frac{mhS\partial_k^2}{2(m-2)}, \quad b_{kl} = -\frac{mhS\partial_k\partial_l}{2(m-2)}, \quad b_{k3} = -\frac{mhS\partial_k}{2(m-2)} \\
b_{3k} &= \frac{m\Lambda\triangle\partial_k}{2(m-2)}, \quad b_{33} = S + \frac{m\Lambda\triangle}{2(m-2)}
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_{kk} &= S - \frac{m\Lambda\partial_k^2}{4(m-1)}, \quad \beta_{kl} = -\frac{m\Lambda\partial_k\partial_l}{4(m-1)}, \quad \beta_{k3} = \frac{m\Lambda\triangle\partial_k}{4(m-1)} \\
\beta_{3k} &= -\frac{mhS\partial_k}{4(m-1)}, \quad \beta_{33} = C + \frac{mhS\triangle}{4(m-1)}
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

Определители матриц b и β дадут операторы разрешающих уравнений для функций перемещений в задачах о слое или плите, при задании на торцах $z = \pm h$ перемещений; эти определители имеют следующие значения:

$$
|b| = \frac{C}{2(m-2)}[(3m-4)CS - mh], \qquad |\beta| = \frac{S}{4(m-1)}[(3m-4)CS + mh] \tag{4.10}
$$

Уравнения (4.2) можно получить из уравнений А. И. Лурье (4.6) умножением их слева на транспонированные матрицы b^* и β^*; получаемые при этом матрицы

$$
e = b^*a, \qquad \varepsilon = \beta^*\alpha \tag{4.11}
$$

в отличие от матриц a, α, b, β оказываются симметричными. Их элементы не выписываются, так как из них составлены левые части уравнений (4.2), определяемые (1.24) и (2.22). Определители матриц e и ε получаются перемножением первых определителей (4.7) и (4.10) или вторых определителей (4.7) на (4.10). Так как матрицы b и β невырожденные [1], то имеет место

[1] Вырождение матриц b и β соответствует отсутствию перемещений при $z = \pm h$, т. е. жесткой заделке торцов; этот случай в работе не рассматривается.

полное соответствие между уравнениями А. И. Лурье (4.6) и уравнениями (4.9), полученными здесь. В дальнейшем будем исходить из уравнений А. И. Лурье как более простых.

Возвращая операторам C и S в (4.4) и (4.5) их первоначальный смысл рядов по степеням толщины плиты, перепишем системы (4.6) в виде

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n h^{2n+1}}{(2n+1)!}\triangle^n\left[\partial_1 w_0'-\triangle u_0-(2n+1)\frac{m\partial_1\vartheta_0}{m-2}\right]=\frac{\eta_x}{2\mu}\\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n h^{2n}}{(2n)!}\triangle^n\left[\frac{2nm-1}{m-1}\vartheta_0-w_0'\right]=-\frac{\zeta}{4\mu}\end{gathered}\qquad(4.12)$$

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n h^{2n}}{(2n)!}\triangle^n\left[\partial_1 w_0+u_0'+\frac{nm\partial_1\vartheta_0'}{(m-1)\triangle}\right]=\frac{t_x}{2\mu}\\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n h^{2n+1}}{(2n+1)!}\triangle^n\left[\triangle w_0+\frac{nm+m-1}{2(m-1)}\vartheta_0'\right]=-\frac{p}{4\mu}\end{gathered}\qquad(4.13)$$

Здесь опущены вторые уравнения систем (4.12) и (4.13); они получаются из первых уравнений этих систем заменой букв ∂_1, u_0, η_x, u_0', t_x буквами ∂_2, v_0, η_y, v_0', t_y.

Из уравнений (4.12) при $n=0$ и отсутствии торцевых усилий следуют известные уравнения плоской задачи, выраженные в перемещениях u_0, v_0 (w_0' легко исключается). Следующее приближение ($n=0$ и $n=1$) дает уточнение плоской задачи и приводит к пентагармонической системе дифференциальных уравнений, требующей постановки пяти краевых условий. Для системы (4.13) сохранение только первых слагаемых ($n=0$) вообще ничего не дает[1]. Сохраняя по два члена ряда в уравнениях (4.13), придем, после исключения поворотов u_0' и v_0', к бигармоническому уравнению теории тонких плит. Получение уточненной теории изгиба требует сохранения в суммах (4.13) большего числа слагаемых.

§ 5. Краевые условия теории толстых плит. Соотношения (4.1) наряду с дифференциальными уравнениями доставляют и краевые условия в виде бесконечного ряда контурных интегралов. Ограничиваясь определенной степенью h, можно получить граничные условия для системы дифференциальных уравнений, соответствующей выбранному приближению. Можно, кроме того, высказать и некоторые общие соображения по поводу краевых условий в теории толстых плит.

Из формул (3.13) — (3.16) вытекают очевидные соображения по поводу постановки силовых условий на краю толстой плиты: надо требовать как равенства статических характеристик (главного вектора и главного момента) внешних поверхностных сил статическим характеристикам напряжений σ_n, τ_{ns}, τ_{nz}, так и сверхстатической эквивалентности, характеризуемой бисилами, поливекторами, полимоментами, бисилами и перерезывающими силами высших порядков. В частности, на незагруженном,

[1] Все перемещения (u_0', v_0', w_0) из системы исключаются, оставляя условие равновесия внешних сил

$$\partial_1 t_x + \partial_2 t_y + p/h = 0$$

свободном краю плиты интегральные характеристики (3.13) и (3.14) от напряжений σ_n, τ_{ns}, τ_{nz} надо приравнять нулю.

Соответственным образом, заделанный край плиты должен характеризоваться (в задаче растяжения плиты) условиями

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0' = 0, \quad \triangle^n u_0 + \frac{mn}{m-2}\partial_1 \triangle^{n-1} \vartheta_0 = 0$$
$$\triangle^n v_0 + \frac{nm}{m-2}\partial_2 \triangle^{n-1}\vartheta_0 = 0, \ \triangle^n w_0' - \frac{nm}{m-2}\triangle^n \vartheta_0 = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5.1}$$

так как при наличии отличных от нуля силовых факторов вариации этих величин в выражении элементарной работы (3.15) обращаются в нуль.

Для задачи изгиба плиты условиями жесткой заделки края будут

$$u_0' = 0, \quad v_0' = 0, \quad w_0 = 0, \quad \triangle^n u_0' + \frac{nm}{2(m-1)}\partial_1 \triangle^{n-1}\vartheta_0' = 0$$
$$\triangle^n v_0' + \frac{nm}{2(m-1)}\partial_2 \triangle^{n-1}\vartheta_0' = 0, \ \triangle^n w_0 + \frac{nm}{2(m-1)}\triangle^{n-1}\vartheta_0' = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5.2}$$

Заметим еще, что при окончательном установлении краевых условий для конкретного приближения (ряды контурных интегралов обрываются на определенной степени h) необходимо учесть также уравнения связи между вариациями δu_0, δv_0, $\delta w_0'$, $\delta u_0'$, $\delta v_0'$, δw_0 и их производными; таковые получаются варьированием уравнений (4.12), (4.13), укороченных до определенной степени h. Учет величин первого порядка относительно h в контурных интегралах (1.25) и (3.15) [1], входящих в состав первого соотношения (4.1), приводит к краевым условиям плоской задачи

$$\oint_{(L)} \left\{ \left[4\mu h \left(\frac{\partial u_{n0}}{\partial n} - u_{s0}\frac{\partial \alpha}{\partial n} + \frac{\vartheta_0}{m-2} \right) - R_n \right] \cdot \delta u_{n0} + \right.$$
$$\left. + \left[2\mu h \left(\frac{\partial u_{n0}}{\partial s} + u_{n0}\frac{\partial \alpha}{\partial n} + \frac{\partial u_{s0}}{\partial n} - u_{s0}\frac{\partial \alpha}{\partial s} \right) - R_s \right] \cdot \delta u_{s0} \right\} ds = 0 \tag{5.3}$$

Здесь R_s, R_n — проекции главного вектора контурных сил на касательную и нормаль к контуру, u_{n0}, u_{s0} определены по (1.11), а через α обозначен угол, составляемый нормалью с осью x.

Для получения краевых условий теории тонких плит сохраняем в контурных интегралах (2.14) величины порядка h и h^3; тогда, обозначая эти интегралы звездочкой, имеем

$$\frac{\delta \Pi_2^*}{\mu} = 2h \oint_{(L)} \left(n_x u_0' + n_y v_0' + \frac{\partial w_0}{\partial n} \right) \cdot \delta w_0 ds + \frac{2h^3}{3} \oint_{(L)} \left\{ 2\frac{\partial u_0'}{\partial n} \cdot \delta u_0' + 2\frac{\partial v_0'}{\partial n} \cdot \delta v_0' + \right.$$
$$+ \frac{2m\Delta w_0 + (m+1)\vartheta_0'}{m-1} \cdot \delta u_{n0}' + (\partial_2 u_0' - \partial_1 v_0') \cdot \delta u_{s0}' - \tag{5.4}$$
$$- \frac{m}{2(m-1)} \left(n_x u_0' + n_y v_0' + \frac{\partial w_0}{\partial n} \right) \cdot \delta \vartheta_0' - \frac{(\vartheta_0' + 2\triangle w_0)}{m-1} \cdot \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial n} \right) -$$
$$\left. - \left[n_x \triangle u_0' + n_y \triangle v_0' + \frac{m-3}{m-1} \cdot \frac{\partial \triangle w_0}{\partial n} + \frac{m-2}{2(m-1)} \frac{\partial \vartheta_0'}{\partial n} \right] \delta w_0 \right\} ds$$

[1] Сравнительный порядок интегральных характеристик нагрузки на боковой поверхности легко усматривается из формул (3.13), (3.14).

Но из уравнений равновесия (4.13) следует при указанной степени точности (полагаем для простоты $t_x = t_y = 0$), что

$$n_x u_0' + n_y v_0' + \frac{\partial w_0}{\partial n} = \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial \Delta w_0}{\partial n} + n_x \Delta u_0' + n_y \Delta v_0' + \frac{m}{m-1}\frac{\partial \vartheta_0'}{\partial n}\right)$$

$$u_0' + \partial_1 w_0 = O(h^2), \qquad v_0' + \partial_2 w_0 = O(h^2), \qquad \vartheta_0' + 2\Delta w_0 = O(h^2) \qquad (5.5)$$

Подстановка (5.5) в (5.4) приводит к выражению

$$\delta\Pi_2{}^* = \frac{4}{3}\mu h^3 \oint\limits_{(L)} \left\{\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial w_0}{\partial s}\right) + \frac{\partial w_0}{\partial n}\frac{\partial \alpha}{\partial n}\right]\cdot\delta\left(\frac{\partial w_0}{\partial s}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{m}{m-1}\cdot\frac{\partial \Delta w_0}{\partial n}\cdot\delta w_0 + \left[\frac{\Delta w_0}{m-1} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial n^2} - \frac{\partial w_0}{\partial s}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial n}\right]\cdot\delta\left(\frac{\partial w_0}{\partial n}\right)\right\} ds \qquad (5.6)$$

Введем теперь изгибающий и крутящий моменты на контуре плиты

$$G = M_s = n_x M_y - n_y M_x, \qquad H = -M_n = -n_x M_x - n_y M_y$$

а также коэффициент Пуассона $\nu = 1/m$ и жесткость плиты

$$D = \frac{4\mu h^3 m}{3(m-1)}$$

Тогда, подставляя (5.6) и (3.16) во второе соотношение (4.1) и учитывая, что

$$\Delta w_0 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} + \frac{\partial w_0}{\partial n}\frac{\partial \alpha}{\partial s} - \frac{\partial w_0}{\partial s}\frac{\partial \alpha}{\partial n}$$

получим краевые условия теории тонких плит

$$\oint\limits_{(L)} \left\{\left[D(1-\nu)\left(\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial w_0}{\partial s}\right) + \frac{\partial w_0}{\partial n}\frac{\partial \alpha}{\partial n}\right) + H\right]\cdot\delta\left(\frac{\partial w_0}{\partial s}\right) - \left(D\frac{\partial \Delta w_0}{\partial n} + Q\right)\delta w_0 + \right.$$

$$\left. + \left[D\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial n^2} - \frac{\partial w_0}{\partial s}\frac{\partial \alpha}{\partial n} + \nu\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} + \frac{\partial w_0}{\partial n}\frac{\partial \alpha}{\partial s}\right)\right) + G\right]\delta\left(\frac{\partial w_0}{\partial n}\right)\right\} ds = 0 \qquad (5.7)$$

Таким образом, получены краевые условия Пуассона; обычным приемом, интегрируя слагаемые с $\delta(\partial w_0/\partial s)$ по частям, можно из (5.7) получить и условия Кирхгофа.

Поступила 13 III 65

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. К задаче о равновесии пластины переменной толщины. Тр. Ленингр. индустр. ин-та, 1936, № 6, стр. 57.
2. Лурье А. И. К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. 6, вып. 2—3, стр. 151.
3. Прокопов В. К. Обобщение формулы Грина. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1, стр. 128.
4. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1955, стр. 146.
5. Аксентян О. К., Ворович И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6, стр. 1057.