

К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ ПЕРЕХОДА К ЗАДАЧЕ КОШИ

И. И. Ворович, В. Ф. Зиналова

(Ростов-на-Дону)

Решение нелинейных задач устойчивости оболочек производится в настоящее время в основном при помощи прямых методов. Однако их использование в высоких приближениях сильно затруднено из-за громоздкости получаемых при этом конечномерных уравнений. В работе используется метод перехода к задаче Коши, дающий возможность при использовании ЭЦВМ получать численное значение любого функционала от решения, если задача решается прямым методом в высоких приближениях.

Применение метода иллюстрируется задачей о действии равномерного давления и сосредоточенной нагрузки на сферический купол.

Данный метод можно трактовать как разновидность шагового метода, использованного ранее в [1, 2]. Даются некоторые рекомендации по развитию метода.

1. Запишем уравнения деформированного состояния оболочки символически в виде

$$A_i(u, v, w, p) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

Здесь u, v, w — перемещения, p — параметр нагрузки. Допустим, что требуется определить некоторый функционал $\Phi(u, v, w)$, который в конечном итоге будет функцией параметра нагрузки p . При приближенном решении системы (1.1) каким-нибудь прямым методом приходим к некоторой системе конечномерных, в общем случае, трансцендентных уравнений. Так, например, при использовании метода Бубнова — Галёркина вектор перемещений \mathbf{a} аппроксимируется агрегатами вида

$$\mathbf{a}_n = \sum_{k=1}^n C_{nk} \mathbf{b}_k \quad (1.2)$$

Здесь C_{nk} — некоторые постоянные, а \mathbf{b}_k — полная в данной задаче система векторов. Процедура Бубнова — Галёркина дает для определения C_{nk} систему уравнений вида

$$B_r(C_{nk}, p) = 0 \quad (r = 1, \dots, n) \quad (1.3)$$

В этом же приближении искомый функционал Φ можно считать функцией параметров C_{nk} . Для определения C_{nk} и функционала Φ используем идею перехода к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, высказанную в [3-6], несколько видоизменяя ее в связи с тем, что необходимо главным образом определить значения функционала Φ . Ниже будут даны также некоторые практические рекомендации по использованию этого приема.

Допустим, что известно решение системы (1.3) при некотором значении p_0 и, следовательно, известно значение функционала Φ_0 . Продифференцируем систему (1.3) по параметру p ; получим

$$\frac{\partial B_r}{\partial p} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial B_r}{\partial C_{nk}} \frac{dC_{nk}}{dp} = 0 \quad (r = 1, \dots, n) \quad (1.4)$$

Присоединим к системе (1.4) уравнение

$$\frac{d\Phi}{dp} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial C_{nk}} \frac{dC_{nk}}{dp} = 0 \quad (1.5)$$

Систему (1.4,5) можно рассматривать как систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно Φ, C_{nk} . Используя начальные данные, можно решить для этой системы задачу Коши и найти решение на достаточно широком диапазоне изменения параметра p . Интегрирование системы (1.4,5) можно производить любым численным методом, например, методом Рунге — Кутты. Некоторое неудобство при этом получается вследствие того, что система (1.4,5) не разрешена относительно производных. Однако эта трудность легко обходится. Препятствиям к использованию данного приема могут служить следующие обстоятельства.

1. Обращение в ∞ какой-либо из производных $dC_{nk}/dp, d\Phi/dp$.
2. Наличие особых точек на кривых $C_{nk}(p), \Phi(p)$.

Первое препятствие можно обойти, если вместо p использовать новую независимую переменную, например Φ . При этом система (1.4,5) примет вид

$$\frac{\partial B_r}{\partial p} \frac{dp}{d\Phi} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial B_r}{\partial C_{nk}} \frac{dC_{nk}}{d\Phi} = 0 \quad (1.6)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial C_{nk}} \frac{dC_{nk}}{d\Phi} - 1 = 0 \quad (1.7)$$

Использование систем (1.4,5) и (1.6,7) дает возможность, вообще говоря, пройти всю кривую $\Phi - p$, если на ней нет особых точек.

При этом в программе можно предусмотреть автоматический переход от одной системы к другой на тех участках, где использование одной из них оказывается нерациональным. Такой переход можно осуществлять, ориентируясь, например, на величину $d\Phi/dp$, используя при этом $|d\Phi/dp| < 1$ систему (1.4,5), а при $|d\Phi/dp| > 1$ — систему (1.6,7). Можно, однако, избежать перехода от одной системы к другой, если ввести некий комплексный параметр σ , определяемый соотношением

$$\sigma = \int_0^p \left[1 + \left(\frac{d\Phi}{dp} \right)^2 \right]^{1/2} dp \quad (1.8)$$

Параметр σ есть длина дуги кривой $\Phi = \Phi(p)$; соответствующая система будет иметь вид

$$\frac{\partial B_r}{\partial p} \frac{dp}{d\sigma} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial B_r}{\partial C_{nk}} \frac{dC_{nk}}{d\sigma} = 0, \quad \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial C_{nk}} \frac{dC_{nk}}{d\sigma} = \frac{d\Phi}{d\sigma}, \quad \frac{dp}{d\sigma} = \left[1 - \left(\frac{d\Phi}{d\sigma} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.9)$$

Система (1.9) уже не содержит производных, которые могли бы обратиться в ∞ , и потому она может быть проинтегрирована до сколь угодно больших значений параметра σ , если по пути интегрирования не встретится особая точка. В случае особой точки требуется предварительно исследовать характер этой точки и уже после этого наметить способы ее обо-

да. Этот же прием можно использовать и в случае, если система (1.3) зависит не от одного параметра p , а от нескольких, например двух

$$B_r(C_{nk}, p_1, p_2) = 0 \quad (r = 1, \dots, n) \quad (1.10)$$

Продифференцируем последовательно систему (1.10) по p_1, p_2 . В результате получим

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial B_r}{\partial C_{nk}} \frac{\partial^2 C_{nk}}{\partial p_1 \partial p_2} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 B_r}{\partial C_{nk} \partial C_{nl}} \frac{\partial C_{nk}}{\partial p_1} \frac{\partial C_{nl}}{\partial p_2} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 B_r}{\partial p_1 \partial C_{nk}} \frac{\partial C_{nk}}{\partial p_2} + \frac{\partial^2 B_r}{\partial p_1 \partial p_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_1 \partial p_2} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial C_{nk}} \frac{\partial^2 C_{nk}}{\partial p_1 \partial p_2} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial C_{nk} \partial C_{nl}} \frac{\partial C_{nk}}{\partial p_1} \frac{\partial C_{nl}}{\partial p_2} = 0 \quad (1.12)$$

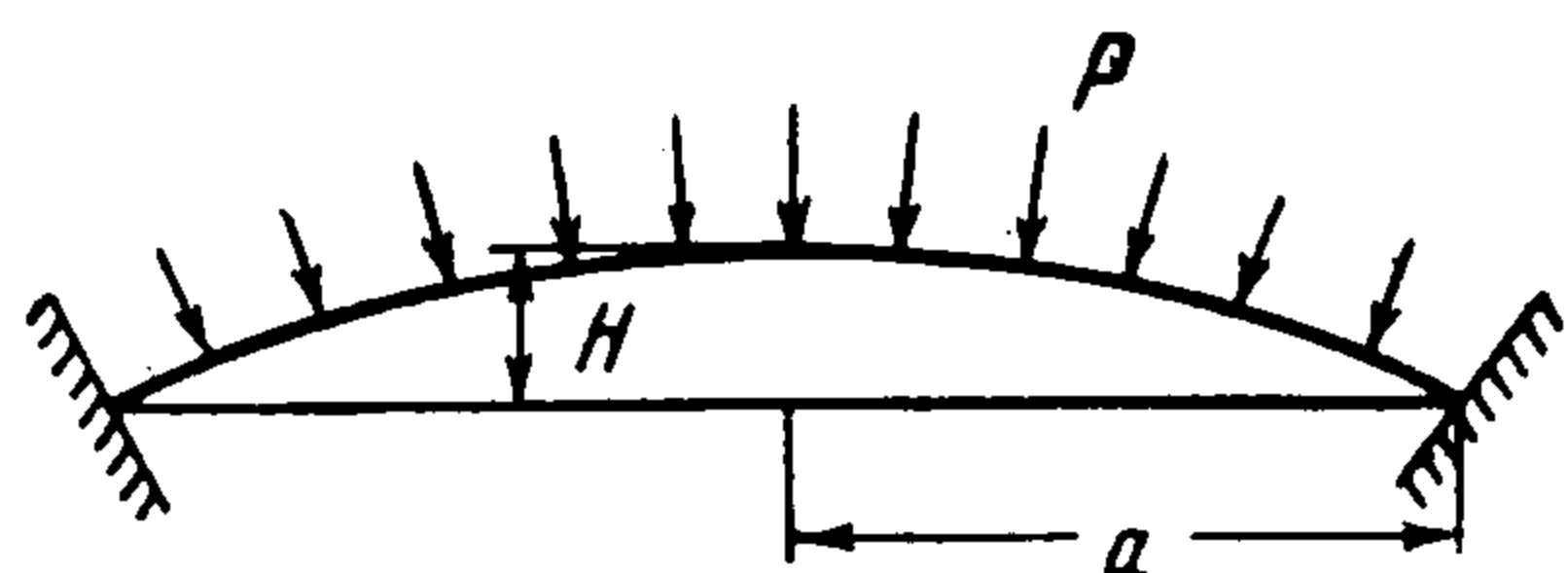
Систему (1.11,12) можно рассматривать как систему в частных производных относительно C_{nk} и Φ . Если к ней присоединить некоторые краевые условия, то, решая ее, можно найти Φ и C_{nk} как функции p_1 и p_2 . Если известны значения C_{nk} и Φ на осях $p_1 = 0$ и $p_2 = 0$, то в этом случае для системы (1.11,12) получается задача Гурса. Решая ее каким-либо численным методом, например методом конечных разностей, можно найти корни системы (1.10) как функции p_1 и p_2 .

2. Применим вышеуказанные соображения к исследованию нелинейной системы уравнений, описывающих осесимметричную деформацию сферического купола. Уравнения задачи можно взять в виде [1]

$$\rho \psi'' + \psi' - \frac{\psi}{\rho} = \theta \left(\frac{2H}{h} \rho + \frac{1}{2} \theta \right) \quad \left(\psi = -\frac{T_1 a^2 \rho}{E h^3}, \theta = \frac{a}{h} \theta_1 \right) \quad (2.1)$$

$$\rho \theta'' + \theta' - \frac{\theta}{\rho} = -12(1 - \mu^2) \psi \left(\frac{2H}{h} \rho + \theta \right) + 6(1 - \mu^2) p_0 \rho^2 \left(p_0 = \frac{\rho a^4}{E h^4} \right) \quad (2.2)$$

Здесь ρ — безразмерный радиус, T_1 — радиальное усилие, h — толщина оболочки, θ_1 — угол поворота сечения. Остальные обозначения даны на фиг. 1.



Фиг. 1

Систему (2.1,2) будем рассматривать с граничными условиями, соответствующими глухой заделке

$$\theta = 0, \quad \left| \psi' - \mu \frac{\psi}{\rho} \right| = 0 \quad \text{при } \rho = 1 \quad (2.3)$$

Допустим, что необходимо определить кривую нагружения купола, т. е. найти зависимость p_0 от осевого перемещения в центре f_1 . Легко видеть, что f_1 определяется соотношением

$$f_1 = h f, \quad f = \int_1^0 \theta d\rho \quad (2.4)$$

Таким образом, роль функционала Φ играет интеграл, стоящий в правой части (2.4). Решая задачу методом Бубнова — Галёркина, положим

$$\theta = \sum_{k=1}^n C_{nk} (\rho^{2k+1} - \rho^{2k-1}) \quad (2.5)$$

Из уравнения (2.1) с учетом граничных условий (2.3) определяем ψ в виде

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{\lambda}{4} \sum_{k=1}^n C_{nk} \left[\frac{1}{(k+2)(k+1)} \left(\rho^{2k+3} - \frac{2k+3-\mu}{1-\mu} \rho \right) - \frac{1}{(k+1)k} \times \right. \\ & \times \left. \left(\rho^{2k+1} - \frac{2k+1-\mu}{1-\mu} \rho \right) \right] + \frac{1}{8} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n C_{nk} C_{nl} \left[\frac{1}{(k+l+2)(k+l+1)} \times \right. \\ & \times \left(\rho^{2k+2l+3} - \frac{2k+2l+3-\mu}{1-\mu} \rho \right) - \\ & - \frac{2}{(k+l+1)(k+l)} \left(\rho^{2k+2l+1} - \frac{2k+2l+1-\mu}{1-\mu} \rho \right) + \\ & \left. + \frac{1}{(k+l)(k+l-1)} \left(\rho^{2k+2l-1} - \frac{2k+2l-1-\mu}{1-\mu} \rho \right) \right] \quad \left(\lambda = \frac{2H}{h} \right) \quad (2.6) \end{aligned}$$

Подставим (2.5,6) в левую часть (2.2) и потребуем, чтобы получившееся выражение было ортогонально $(\rho^{2r+1} - \rho^{2r-1})$ ($r = 1, 2, \dots, n$). Таким образом, относительно C_{nk} получаем следующую систему

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (A_{kr}^{(1)} + \lambda^2 A_{kr}^{(2)}) C_{nk} + \lambda \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n A_{klr} C_{nk} C_{nl} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n A_{klmr} C_{nk} C_{nl} C_{nm} = \\ = p_0 A_r \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (2.7) \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты $A_{kr}^{(1)}$, $A_{kr}^{(2)}$, A_{klr} и A_{klmr} даются формулами

$$\begin{aligned} A_{kr}^{(1)} = & - \frac{4kr}{(1-\mu^2)} \prod_{i=-1}^1 \frac{1}{k+r+i}, \quad A_{kr}^{(2)} = - \frac{3}{1-\mu} \prod_{i=1}^2 \frac{1}{k+i} \prod_{i=1}^2 \frac{1}{r+i} - \\ & - 3[r^2 + k^2 + 3kr + 6(r+k) + 7] \prod_{i=1}^2 \frac{1}{r+i} \prod_{i=1}^2 \frac{1}{k+i} \prod_{i=1}^3 \frac{1}{r+k+i} \\ A_{klr} = & \frac{3}{1-\mu} \left(\prod_{i=0}^2 \frac{1}{k+l+i} \prod_{i=1}^2 \frac{1}{r+i} + 2 \prod_{i=0}^2 \frac{1}{r+l+i} \prod_{i=1}^2 \frac{1}{k+i} \right) + \\ & + 3 \left[\prod_{i=1}^2 \frac{1}{r+i} \left(\prod_{i=1}^3 \frac{1}{k+l+r+i} - \prod_{i=0}^2 \frac{1}{r+l+i} \right) - \right. \\ & - \left. \prod_{i=0}^1 \frac{1}{r+i} \left(\prod_{i=0}^2 \frac{1}{r+l+k+i} - \prod_{i=0}^2 \frac{1}{k+l+i} \right) + \right. \\ & + \frac{1}{4} \prod_{i=1}^2 \frac{1}{k+l+i} \left(\prod_{i=1}^2 \frac{1}{r+i} - \prod_{i=2}^3 \frac{1}{k+l+r+i} \right) - \\ & - \frac{1}{2} \prod_{i=0}^1 \frac{1}{k+l+i} \left(\prod_{i=1}^2 \frac{1}{r+i} - \prod_{i=1}^2 \frac{1}{k+l+r+i} \right) + \\ & \left. + \frac{1}{4} \prod_{i=-1}^0 \frac{1}{k+l+i} \left(\prod_{i=1}^2 \frac{1}{r+i} - \prod_{i=0}^1 \frac{1}{k+l+r+i} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{krlm} = & -\frac{6}{1-\mu} \prod_{i=0}^2 \frac{1}{k+m+i} \prod_{i=0}^2 \frac{1}{r+l+i} + \\
& + \frac{3}{2} \prod_{i=1}^2 \frac{1}{k+m+i} \left(\prod_{i=1}^3 \frac{1}{k+m+l+r+i} - \prod_{i=0}^2 \frac{1}{r+l+i} \right) - \\
& - 3 \prod_{i=0}^1 \frac{1}{k+m+i} \left(\prod_{i=0}^2 \frac{1}{k+m+l+r+i} - \prod_{i=0}^2 \frac{1}{r+l+i} \right) + \\
& + \frac{3}{2} \prod_{i=-1}^0 \frac{1}{k+m+i} \left(\prod_{i=1}^1 \frac{1}{k+m+l+r+i} - \prod_{i=0}^2 \frac{1}{r+l+i} \right) \\
A_r = & -3 \prod_{i=1}^2 \frac{1}{r+i}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Для искомого функционала Φ легко получить из (2.4) выражение

$$f = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k(k+1)} C_{nk} \tag{2.9}$$

Выбирая в качестве независимого параметра f , из (2.7,9) получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n \frac{dC_{nk}}{df} \left[(A_{kr}^{(1)} + \lambda^2 A_{kl}^{(2)}) + \lambda \sum_{l=1}^n (A_{klr} + A_{lkr}) C_{nl} + \right. \\
& \left. + \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n (A_{klmr} + A_{lkmr} + A_{mklr}) C_{nl} C_{nm} \right] - \frac{dp_0}{df} A_r = 0
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k(k-1)} \frac{dC_{nk}}{df} = 1 \quad (r=1, \dots, n) \tag{2.11}$$

В качестве начальных данных можно взять элементы ненапряженного состояния оболочки при отсутствии нагрузки, т. е. при $f = 0$, $p_0 = 0$, $C_{nk} = 0$. Систему (2.10,11) удобно интегрировать, пока dp_0 / df не очень велико. В противном случае целесообразно принять за независимую переменную p_0 и получить систему вида

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n \frac{dC_{nk}}{dp_0} \left\{ (A_{kr}^{(1)} + \lambda^2 A_{kr}^{(2)}) + \lambda \sum_{l=1}^n (A_{klr} + A_{lkr}) C_{nl} + \right. \\
& \left. + \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n (A_{klmr} + A_{lkmr} + A_{mklr}) C_{nl} C_{nm} \right\} - A_r = 0
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k(k+1)} \frac{dC_{nk}}{dp_0} = \frac{df}{dp_0} \quad (r=1, \dots, n) \tag{2.13}$$

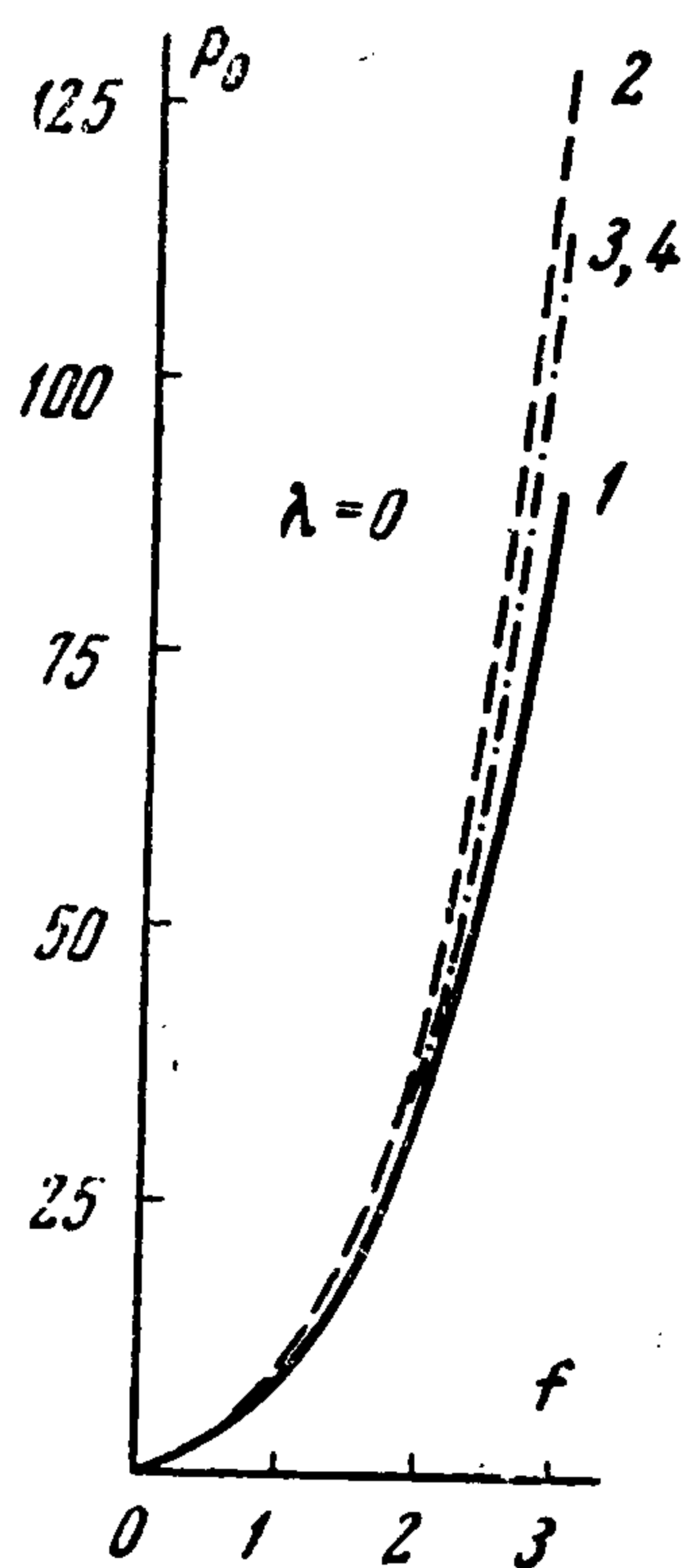
Системы (2.10, 11) и (2.12, 13) интегрировались методом Рунге — Кутты. Программа была составлена для ЭЦВМ «Минск-12». Она состояла из ряда стандартных блоков и предусматривала автоматическое переключение одной системы на другую.

3. Рассмотрим некоторые результаты расчетов. Кривые $p_0 - f$ рассчитывались для значений параметра $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Во всех случаях обнаружено, что первое приближение по методу Бубнова — Галёркина сильно отличается от точного решения. Этот факт отмечался ранее в [1, 7, 8]. Удовлетворительную точность в опре-

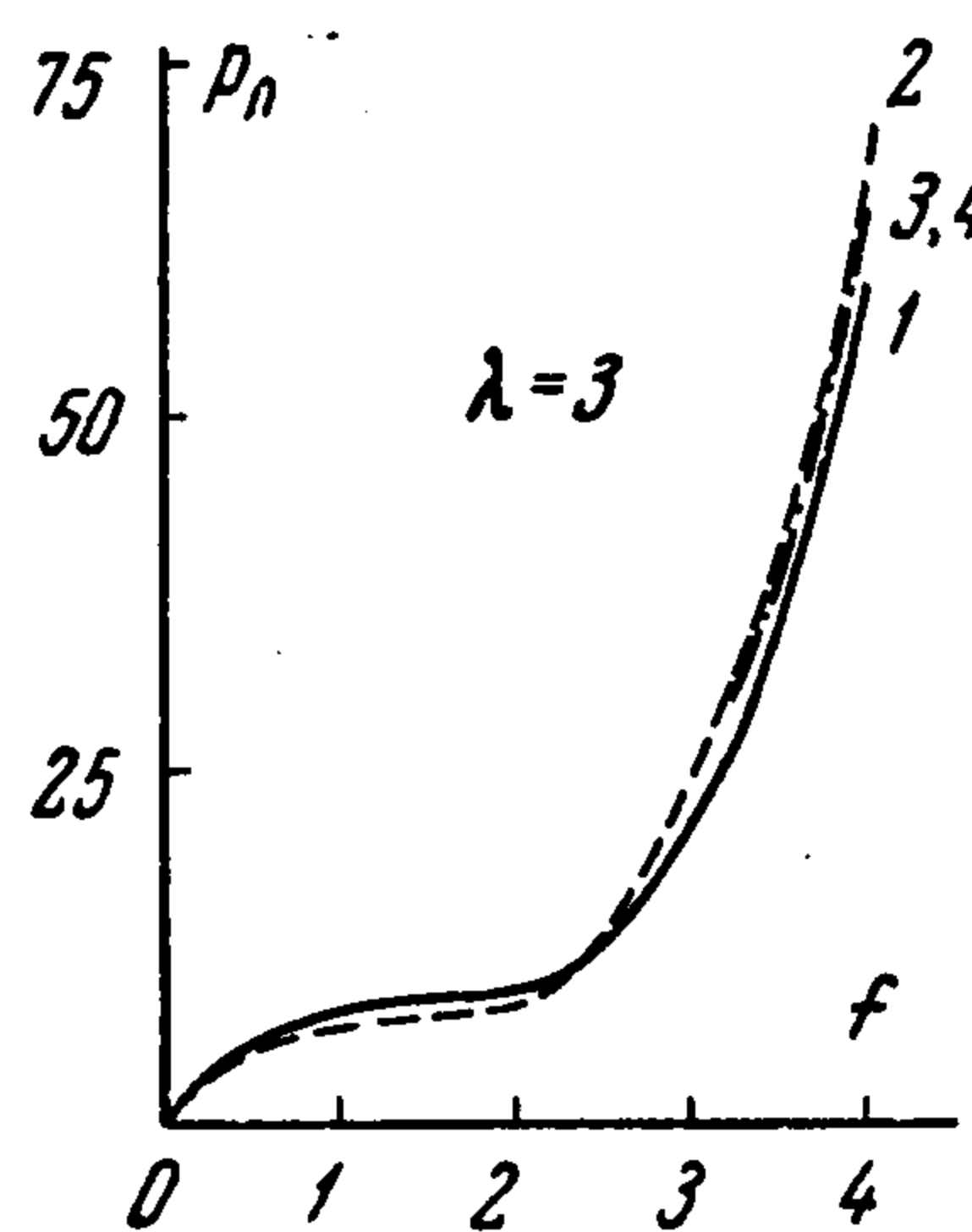
f	(1)	(2)	(3)	(4)
$\lambda = 0$				
0.5	3.2756	3.3285	3.3326	3.3330
1.0	8.9227	9.1178	9.1460	9.1467
1.5	18.1126	20.2541	20.1943	20.1830
2.0	33.8168	40.5438	39.4602	39.4351
2.5	57.8067	74.8477	69.7676	69.9035
$\lambda = 3$				
0.4	5.0582	4.9889	4.9827	4.9818
1.0	8.0227	7.4135	7.3813	7.3798
1.6	8.6214	8.0737	8.0633	8.0635
2.0	9.4740	9.2199	9.2144	9.2226
2.8	17.0395	17.0768	17.4199	17.4828
$\lambda = 6$				
0.4	16.3725	17.5066	17.6220	17.6249
1.0	29.3655	25.5967	24.9164	24.8500
2.6	21.4384	16.5576	17.4514	17.5085
3.6	8.0154	14.7784	15.3213	15.0961
5.4	28.6860	28.4528	31.1870	32.7468
$\lambda = 8$				
0.4	28.7915	34.2036	35.0114	35.0591
1.0	55.7846	50.5424	48.6588	48.3647
2.0	66.4263	36.2654	33.8416	34.2883
5.6	-12.9181	23.5540	20.9626	21.0390
6.8	11.9799	27.5048	30.6335	32.3505

делении перемещений удалось получить лишь на базе четвертого приближения. При этом аппроксимация кривой прогиба в соответствии с (2.5) производится полиномом десятой степени. На фиг. 2—5 приведены зависимости p_0 от f , полученные соответ-

ственно в 1-м, 2-м, 3-м, 4-м приближениях. Из этих графиков видно, что третье и четвертое приближения практически уже неразличимы. Для характеристики скорости сходимости приведем таблицы значений p_0 . Из таблиц видно, что для $\lambda \leq 8$ четвер-

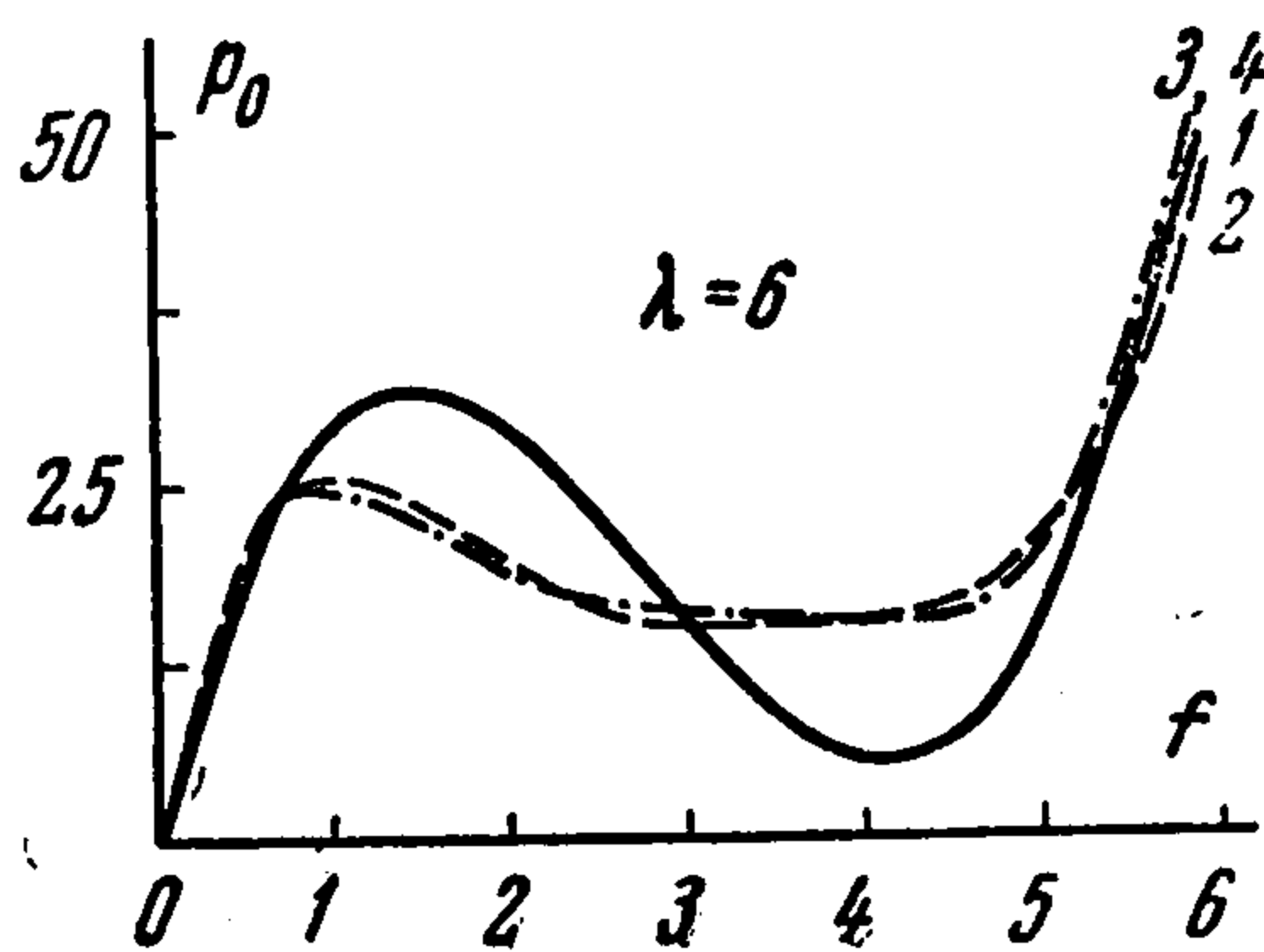


Фиг. 2

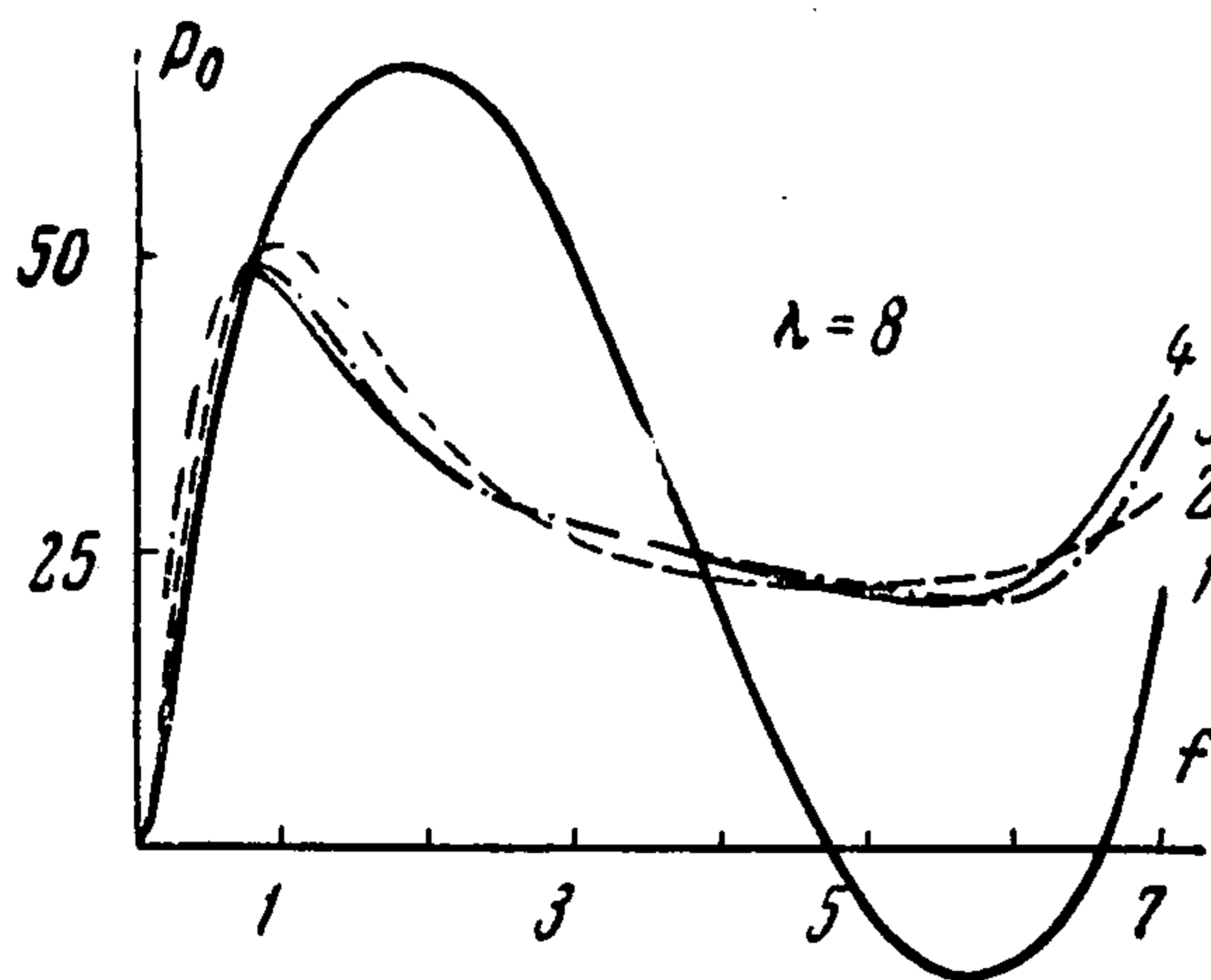


Фиг. 3

тое приближение от третьего имеет отличие порядка 1,1% даже при прогибах трех-четырех толщин оболочки. Из фиг. 2—5 видно, что имеющиеся в начальных приближениях резко выраженные тенденции к хлопку оболочки в последующих приближениях сглаживаются, что особенно заметно, начиная с $\lambda = 5$. Следует также отметить исчезновение в последующих приближениях отрицательных нижних критических чи-



Фиг. 4

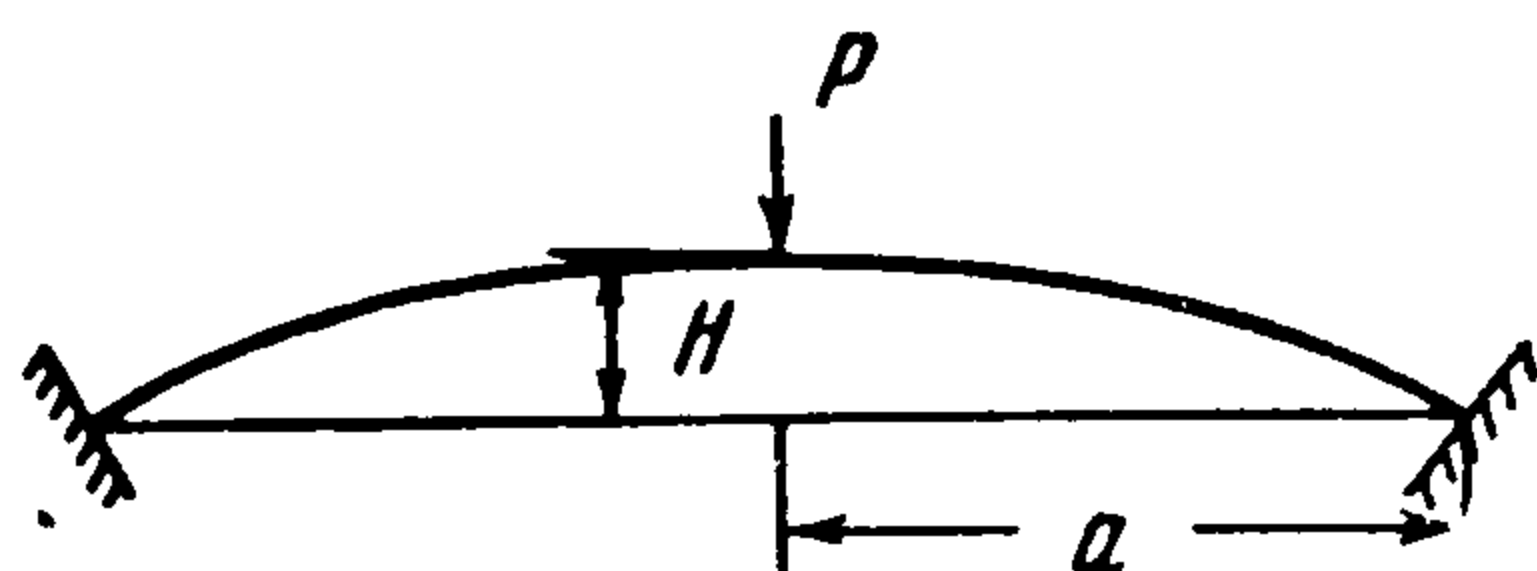


Фиг. 5

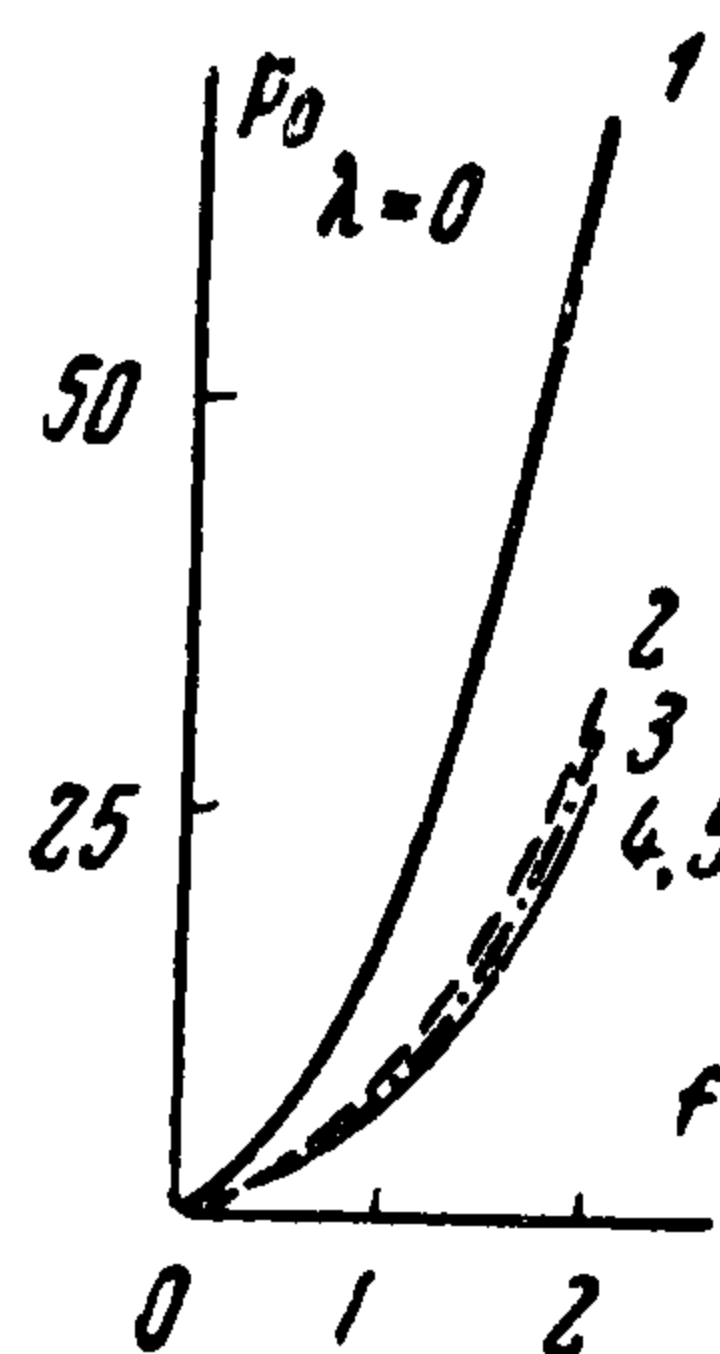
сел. Можно отметить, что с ростом λ верхнее p^+ и нижнее p^- критические числа увеличиваются, как это видно из приведенных здесь значений.

$\lambda =$	4	5	6	7	8
$p^+ =$	11.2900	17.0488	24.8538	35.1850	49.5413
$p^- =$	10.1763	12.4166	14.9550	17.8238	20.8838

Можно составить простые интерполяционные фор-



Фиг. 6



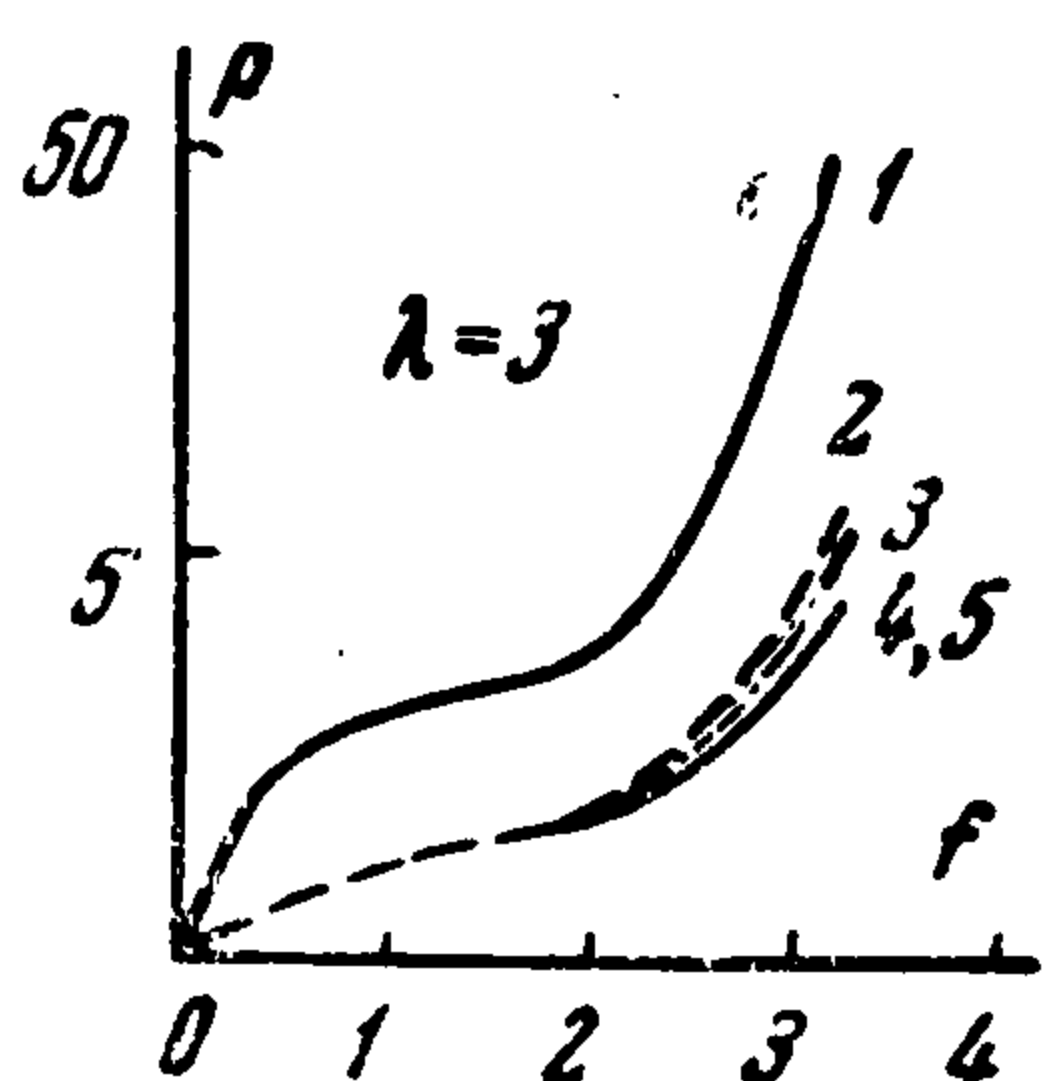
Фиг. 7

мулы, дающие непосредственно возможность вычислять p^+ и p^- как функции λ

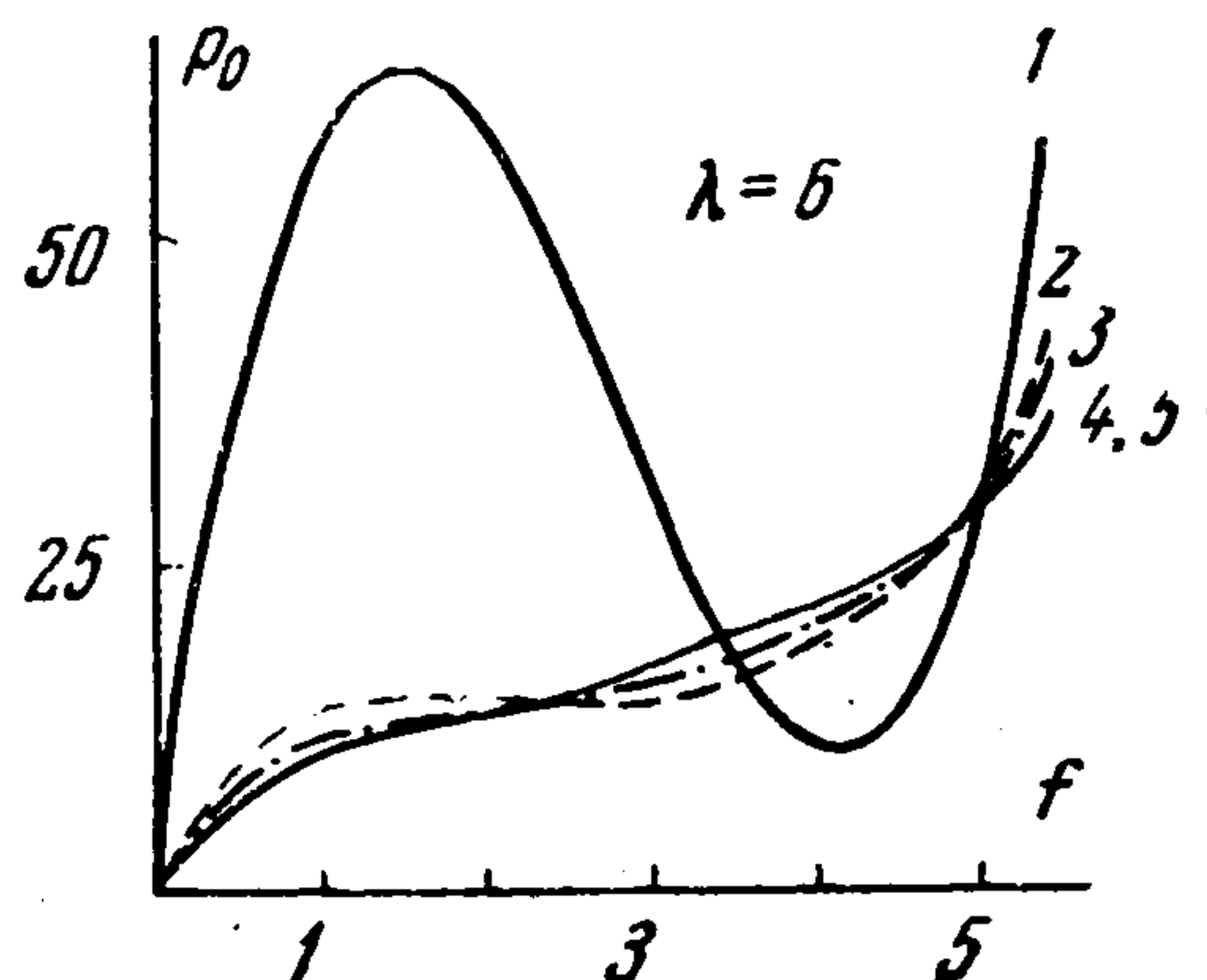
$$p^+ = 0.0424 \lambda^4 - 0.8527 \lambda^3 + 7.4109 \lambda^2 - 24.5696 \lambda + 34.7120 \quad (3.1)$$

$$p^- = 0.0700 \lambda^4 + 0.1592 \lambda^3 - 1.1818 \lambda^2 + 5.7484 \lambda - 2.3056 \quad (3.2)$$

Формулы (3.1, 2) справедливы для $\lambda \leq 10$. Результаты расчетов для случая



Фиг. 8



Фиг. 9

равномерной нагрузки весьма хорошо согласуются с решением этой задачи, полученным в [1] конечноразностным методом.

4. Приведем некоторые результаты исследования воздействия на оболочку сосредоточенного усилия в центре (фиг.6). Для данного случая система (2.7) сохранит свой вид. Но в этой системе p_0 будет уже безразмерной величиной сосредоточенного усилия, в соответствии с чем коэффициенты A_r примут вид

$$A_r = -\frac{3}{\pi(r+1)r} \quad (4.1)$$

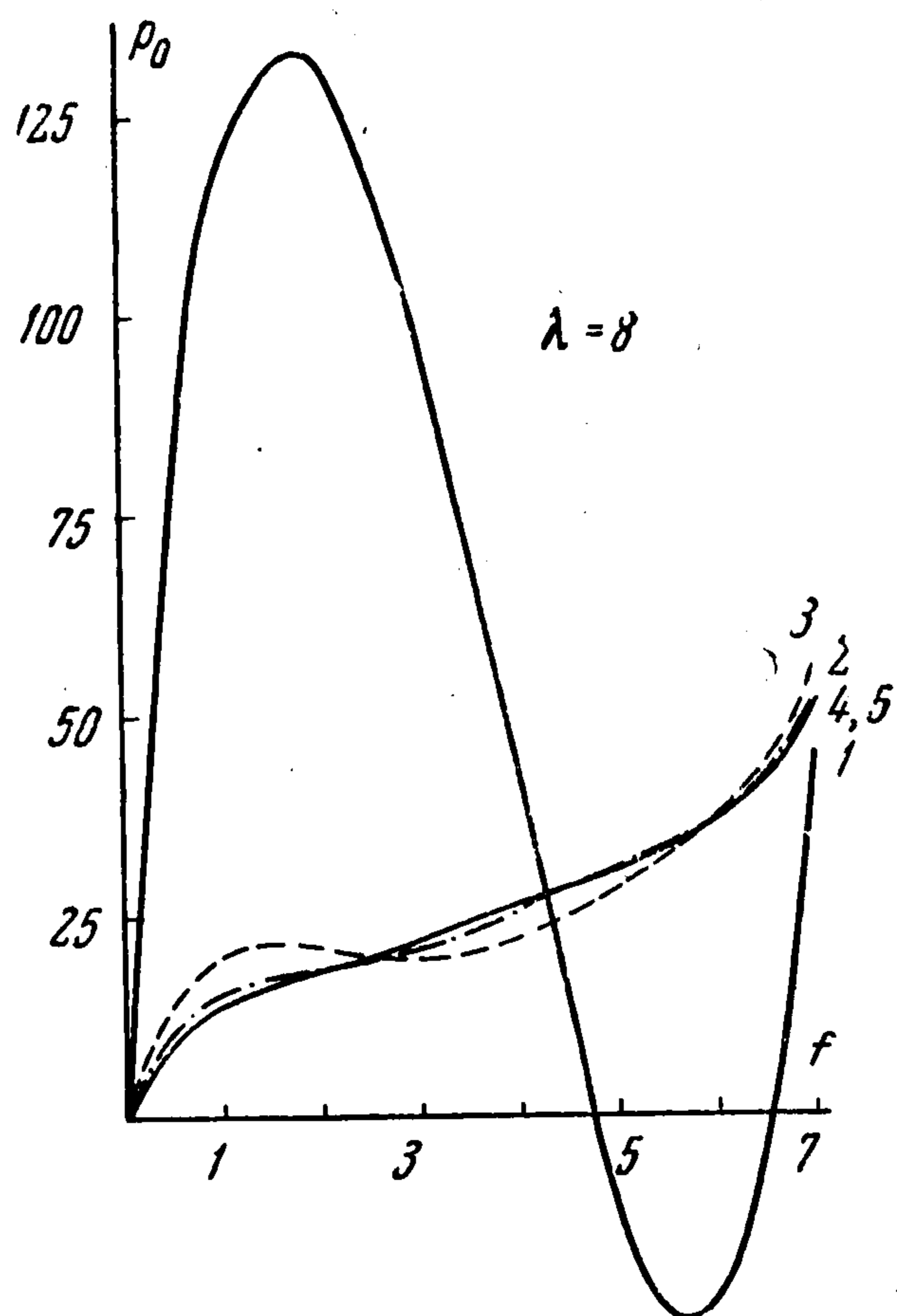
На фиг. 7—10 даны зависимости p_0 от f в пяти приближениях для $\lambda = 0, 3, 6, 8$. Из этих фигур видно, что в данном случае, как и следовало ожидать, имеет место ухудшение сходимости метода Бубнова — Галёркина. Такое ухудшение предсказывается и строгим анализом погрешности этого метода [9]. В данном случае разница между четвертым и пятым приближениями при $\lambda = 8$ не превосходит 4%. Важно отметить, что при решении задачи в первом приближении кривые $p_0 - f$ ведут себя так же, как и в случае распределенного давления. Именно, начиная с $\lambda = 4$, на графике обнаруживаются характерные точки, соответствующие верхнему и нижнему критическим значениям, т. е. обнаруживается тенденция оболочки к хлопку. Однако в последующих приближениях это явление исчезает и вплоть до $\lambda = 8$ в пятом приближении кривая $p_0 = p_0(f)$ является монотонной. Последнее указывает, что при нагружении оболочки сосредоточенной силой в центре явление хлопка не имеет места, по крайней мере, для $\lambda \leq 10$.

Такой вывод был сделан в [10] на основе специальных гипотез геометрического характера.

Поступила 31 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф е о д о с ь е в В. И. Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
2. Ф е о д о с ь е в В. И. Применение шагового метода к анализу устойчивости сжатого стержня. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
3. К и р и я В. С. Движение тел в сопротивляющихся средах. Тр. Тбилисс. ун-та, 1954, т. 44.
4. Д а в и д е н к о Д. Ф. О приближенном решении систем нелинейных уравнений. Укр. матем. ж., 1953, т. 5, № 2.
5. Д а в и д е н к о Д. Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений. Докл. АН СССР, 1953, т. 88, № 4.
6. К у р д ю м о в А. А. К теории физически и геометрически нелинейных задач изгиба и устойчивости пластин и оболочек. Тр. Ленингр. кораблестроит. ин-та, 1961, вып. 34.
7. В о л ь м и р А. С. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, 1963.
8. М у ш т а р и Х. М. К теории устойчивости сферической оболочки под действием внешнего давления (в связи со статьей В. И. Феодосьева). ПММ, 1955, т. 18, вып. 1.
9. В о р о в и ч И. И. Погрешности прямых методов в нелинейной теории оболочек. Докл. АН СССР, 1958, т. 122, № 2.
10. П о г о р е л о в А. В. К теории выпуклых упругих оболочек в закритической стадии. Изд. Харьк. ун-та, 1960.



Фиг. 10