Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

О ДЕФОРМИРОВАНИИ МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

В. А. Ломакин

(Москва)

Исследуется задача определения статистических характеристик полей перемещений, деформаций и напряжений в анизотропном микронеоднородном упругом теле, находящемся в макроскопически однородном деформированном состоянии. Исходная статистически нелинейная краевая задача линеаризируется методом малого параметра и дается представление решения через статистические характеристики поля упругих модулей. Рассмотрен случай статистической изотропии этого поля.

1. Рассмотрим твердое деформируемое анизотропное микронеоднородное тело (например поликристаллическое), в котором микронеоднородности структуры имеют случайный характер. Закон Гука запишем в виде

$$\tau_{ij} = c_{ijlm} e_{lm} \tag{1.1}$$

Здесь τ_{ij} — тензор напряжений, e_{lm} — тензор малых деформаций, c_{ijlm} — тензор, определяющий упругие свойства среды. Для рассматриваемого микронеоднородного тела компоненты тензора c_{ijlm} являются случайными функциями координат x_s, а сам тензор c_{ijlm} определяет тензорное случайное поле, статистическое описание которого аналогично описанию поля тензора второго ранга [1].

Наряду со средним значением $\langle c_{ijlm} \rangle$ тензора c_{ijlm} наиболее важную роль играет момент связи значений поля тензора c_{ijlm} в двух точках

$$c_{ijlm}^{prst}(x_s^1, x_s^2) = \langle c_{ijlm}'(x_s^1)\, c_{prst}'(x_s^2) \rangle, \qquad c_{ijlm}' = c_{ijlm} - \langle c_{ijlm} \rangle \tag{1.2}$$

Здесь и в дальнейшем угловые скобки обозначают статистическое среднее соответствующей величины. В силу известной симметрии тензора c_{ijlm}, имеют место следующие условия симметрии для момента связи (1.2):

$$c_{ijlm}^{prst} = c_{jilm}^{prst} = c_{jiml}^{prst} = c_{lmij}^{prst} = c_{lmij}^{rpst} = c_{lmij}^{rpts} = c_{lmij}^{stpr} \tag{1.3}$$

В случае статистически однородного поля, рассмотрением которого в дальнейшем и ограничимся, средние значения $\langle c_{ijlm} \rangle$ поля постоянны, а момент связи (1.2), называемый в этом случае также корреляционным тензором, будет функцией одного вектора ξ_s

$$c_{ijlm}^{prst} = c_{ijlm}^{prst}(\xi_s), \qquad \xi_s = x_s^2 - x_s^1 \tag{1.4}$$

причем имеет место соотношение

$$c_{ijlm}^{prst}(\xi_s) = c_{prst}^{ijlm}(-\xi_s) \tag{1.5}$$

Деформации e_{lm} с перемещениями w_l связаны соотношениями

$$e_{lm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_l}{\partial x_m} + \frac{\partial w_m}{\partial x_l}\right) \tag{1.6}$$

Введем обозначения

$$u_l = \langle w_l \rangle, \quad v_l = w_l - u_l, \quad \varepsilon_{lm} = \langle e_{lm} \rangle, \quad \gamma_{lm} = e_{lm} - \varepsilon_{lm}$$

$$\sigma_{ij} = \langle \tau_{ij} \rangle, \qquad p_{ij} = \tau_{ij} - \sigma_{ij} \tag{1.7}$$

Тогда, наряду с (1.6), имеем

$$\varepsilon_{lm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right), \quad \gamma_{lm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_l}\right) \tag{1.8}$$

Рассмотрим тело объемом v, ограниченное поверхностью s, находящееся в состоянии, при котором $\varepsilon_{lm} = \mathrm{const}$. В предположении эргодичности случайных функций c_{ijlm} это означает, что тело находится в макроскопически однородном деформированном состоянии. Тогда

$$u_l = \varepsilon_{lm} x_m$$

Для тела, размеры которого весьма велики по сравнению с масштабом неоднородностей тензора c_{ijlm}, на границе тела $v_l \ll u_l$; потому граничные условия можно записать в виде

$$w_l|_s = u_l|_s = \varepsilon_{lm} x_m|_s \tag{1.9}$$

Краевую задачу для определения w_l получим, добавляя к уравнениям (1.1), (1.6), (1.9) уравнения равновесия (при отсутствии массовых сил)

$$\partial \tau_{ij} / \partial x_j = 0 \tag{1.10}$$

Предположим далее, что поле c_{ijlm} представимо в виде

$$c_{ijlm} = \langle c_{ijlm} \rangle + \alpha b_{ijlm} \qquad (\alpha b_{ijlm} = c_{ijlm}') \tag{1.11}$$

где b_{ijlm} — случайные ограниченные функции координат, а α — малый (неслучайный) параметр. Тогда (1.1), учитывая (1.7), (1.8) и симметрию тензора c_{ijlm}, можно представить в виде

$$\tau_{ij} = (\langle c_{ijlm} \rangle + \alpha b_{ijlm})\left(\varepsilon_{lm} + \frac{\partial v_l}{\partial x_m}\right) \tag{1.12}$$

Из (1.10), (1.12) и (1.7), (1.9) получим краевую задачу для определения вектора v_l

$$\langle c_{ijlm} \rangle \frac{\partial^2 v_l}{\partial x_j \partial x_m} = -\alpha \frac{\partial}{\partial x_j}\left[b_{ijlm}\left(\varepsilon_{lm} + \frac{\partial v_l}{\partial x_m}\right)\right], \qquad v_l|_s = 0 \tag{1.13}$$

Здесь макроскопические деформации ε_{lm} считаются заданными.

2. В силу случайности тензора b_{ijlm} и вектора v_l краевая задача (1.13) статистически нелинейна. Она линеаризируется, если ее решение представить в виде рядов по степеням малого параметра α

$$v_l = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_l^{(k)} \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.13) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях α, найдем

$$\langle c_{ijlm} \rangle \frac{\partial^2 v_l^{(0)}}{\partial x_j \partial x_m} = 0, \qquad v_l^{(0)}|_s = 0 \tag{2.2}$$

$$\langle c_{ijlm} \rangle \frac{\partial^2 v_l^{(1)}}{\partial x_j \partial x_m} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left[b_{ijlm}\left(\varepsilon_{lm} + \frac{\partial v_l^{(0)}}{\partial x_m}\right)\right], \qquad v_l^{(1)}|_s = 0 \tag{2.3}$$

$$\langle c_{ijlm} \rangle \frac{\partial^2 v_l^{(k)}}{\partial x_j \partial x_m} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(b_{ijlm} \frac{\partial v_l^{(k-1)}}{\partial x_m}\right), \qquad v_l^{(k)}|_s = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots)$$

В силу единственности краевой задачи (2.2) имеем $v_l^{(0)} = 0$ и (2.3) окончательно запишется в виде

$$\langle c_{ijlm}\rangle \frac{\partial^2 v_l^{(1)}}{\partial x_j \partial x_m} = -\varepsilon_{lm}\frac{\partial b_{ijlm}}{\partial x_j}, \qquad v_l^{(1)}\big|_s = 0$$

$$\langle c_{ijlm}\rangle \frac{\partial^2 v_l^{(k)}}{\partial x_j \partial x_m} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(b_{ijlm}\frac{\partial v_l^{(k-1)}}{\partial x_m}\right), \qquad v_l^{(k)}\big|_s = 0 \qquad (k=2,3,\ldots) \tag{2.4}$$

Соотношения (2.4) представляют собой рекуррентную последовательность статистически линейных краевых задач, определяющих члены разложений (2.1).

Представляя решения краевых задач (2.4) через тензор Грина [2] $G_{in}(x_s, x_s^1)$, который для всех задач будет одним и тем же, имеем

$$v_i^{(1)}(x_s) = \varepsilon_{lm}\int_{(v)} G_{in}(x_s, x_s^1)\,\frac{\partial b_{njlm}(x_s^1)}{\partial x_j^1}\,dv_1$$

$$v_i^{(k)}(x_s) = \int_{(v)} G_{in}(x_s, x_s^1)\,\frac{\partial}{\partial x_j^1}\left[b_{njlm}(x_s^1)\frac{\partial v_l^{(k-1)}(x_s^1)}{\partial x_m^1}\right]dv_1 \qquad (k=2,3,\ldots) \tag{2.5}$$

Функции $v_i^{(k)}$ $(k = 2, 3, \ldots)$ можно выразить через тензоры G_{in} и b_{njem}. Для $v_i^{(2)}$, например, найдем

$$v_i^{(2)}(x_s) = \varepsilon_{st}\int_{(v)}\int_{(v)} G_{in}(x_s, x_s^1)\frac{\partial G_{lp}(x_s^1, x_s^2)}{\partial x_m^1}\,\frac{\partial^2}{\partial x_j^1\partial x_r^2}\left[b_{njlm}(x_s^1)\,b_{prst}(x_s^2)\right]dv_1 dv_2 +$$

$$+\,\varepsilon_{st}\int_{(v)}\int_{(v)} G_{in}(x_s, x_s^1)\frac{\partial^2 G_{lp}(x_s^1, x_s^2)}{\partial x_j^1\partial x_m^1}\,\frac{\partial}{\partial x_r^2}\left[b_{njlm}(x_s^1)\,b_{prst}(x_s^2)\right]dv_1\,dv_2$$

Из структуры формул (2.5) видно, что функции $v_i^{(k)}$ при любом k являются линейными функциями средних деформаций ε_{lm}. Поэтому для v_i (2.1) найдем

$$v_i(x_s) = \varepsilon_{st}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{ist}^{(k)}(x_s) \tag{2.6}$$

Величины $\varphi_{ist}^{(k)}(x_s)$, в силу (2.5) и (1.11), определяются тензором Грина G_{in} и тензором отклонений упругих модулей c'_{ijlm}. В частности, имеем

$$\varphi_{ist}^{(1)}(x_s) = \int_{(v)} G_{in}(x_s, x_s^1)\,\frac{\partial c'_{njst}(x_s^1)}{\partial x_j^1}\,dv_1$$

$$\varphi_{ist}^{(2)}(x_s) = \int_{(v)}\int_{(v)} G_{in}(x_s, x_s^1)\,\frac{\partial G_{lp}(x_s^1, x_s^2)}{\partial x_m^1}\,\frac{\partial^2}{\partial x_j^1\partial x_r^2}\left[c'_{njlm}(x_s^1)\,c'_{prst}(x_s^2)\right]dv_1 dv_2 +$$

$$+\int_{(v)}\int_{(v)} G_{in}(x_s, x_s^1)\,\frac{\partial^2 G_{lp}(x_s^1, x_s^2)}{\partial x_j^1\partial x_m^1}\,\frac{\partial}{\partial x_r^2}\left[c'_{njlm}(x_s^1)\,c'_{prst}(x_s^2)\right]dv_1 dv_2$$

Имея решение (2.6), легко найдем статистические характеристики вектора перемещений. В частности, для моментов перемещений n-го порядка

$$v_{i_1\ldots i_n} = \langle v_{i_1}(x_s^1)\cdots v_{i_n}(x_s^n)\rangle$$

имеем

$$v_{i_1\ldots i_n} = \varepsilon_{s_1t_1}\cdots\varepsilon_{s_nt_n}\sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{\infty}\langle\varphi_{i_1s_1t_1}^{(k_1)}(x_s^1)\cdots\varphi_{i_ns_nt_n}^{(k_n)}(x_s^n)\rangle$$

Отсюда при $n=2$ получим моменты 2-го порядка

$$v_{ij}(x_s^1, x_s^2) = \varepsilon_{pr}\varepsilon_{st}\sum_{k,\,l=1}^{\infty}\langle\varphi_{ipr}^{(k)}(x_s^1)\,\varphi_{jst}^{(e)}(x_s^2)\rangle \tag{2.7}$$

3. Найдем статистические характеристики тензора напряжений [1]

$$\sigma_{ij} = \langle\tau_{ij}\rangle, \qquad p_{i_1j_1\ldots i_nj_n} = \langle p_{i_1j_1}(x_s^1)\cdots p_{i_nj_n}(x_s^n)\rangle \qquad (p_{ij} = \tau_{ij} - \sigma_{ij}) \tag{3.1}$$

Будем исходить из соотношения (1.12), которое перепишем в виде

$$\tau_{ij} = \langle c_{ijlm}\rangle\,\varepsilon_{lm} + c_{ijlm}'\varepsilon_{lm} + \langle c_{ijlm}\rangle\frac{\partial v_l}{\partial x_m} + c_{ijlm}'\frac{\partial v_l}{\partial x_m} \tag{3.2}$$

Из (3.2) найдем

$$\begin{gathered}\sigma_{ij} = \langle c_{ijlm}\rangle\,\varepsilon_{lm} + \left\langle c_{ijlm}'\frac{\partial v_l}{\partial x_m}\right\rangle \\ p_{ij} = c_{ijlm}'\varepsilon_{lm} + \langle c_{ijlm}\rangle\frac{\partial v_l}{\partial x_m} + c_{ijlm}'\frac{\partial v_l}{\partial x_m} - \left\langle c_{ijlm}'\frac{\partial v_l}{\partial x_m}\right\rangle\end{gathered} \tag{3.3}$$

Из (2.6) имеем

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_m} = \varepsilon_{st}\varphi_{lstm}, \qquad \varphi_{lstm} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial\varphi_{lst}^{(k)}(x_s)}{\partial x_m} \tag{3.4}$$

Введя обозначение

$$\psi_{ijst} = c_{ijlm}'\varphi_{lstm} \tag{3.5}$$

из (3.3) получим

$$\begin{gathered}\sigma_{ij} = (\langle c_{ijst}\rangle + \langle\psi_{ijst}\rangle)\,\varepsilon_{st}, \qquad p_{ij} = \eta_{ijst}\varepsilon_{st} \\ \eta_{ijst} = c_{ijst}' + \langle c_{ijlm}\rangle\,\varphi_{lstm} + \psi_{ijst} - \langle\psi_{ijst}\rangle\end{gathered} \tag{3.6}$$

Момент тензора напряжений n-го порядка (3.1) запишется при этом в виде

$$p_{i_1j_1\ldots i_nj_n} = \langle\eta_{i_1j_1s_1t_1}(x_s^1)\cdots\eta_{i_nj_ns_nt_n}(x_s^n)\rangle\,\varepsilon_{s_1t_1}\cdots\varepsilon_{s_nt_n}$$

В частности, при $n=2$ имеем

$$p_{ijkl}(x_s^1, x_s^2) = \langle\eta_{ijpr}(x_s^1)\,\eta_{klst}(x_s^2)\rangle\,\varepsilon_{pr}\varepsilon_{st} \tag{3.7}$$

Для некоторых целей необходимо установить связь между моментами 2-го порядка напряжений и деформаций

$$p_{ijkl} = \langle p_{ij}(x_s^1)\,p_{kl}(x_s^2)\rangle, \qquad \gamma_{ijkl} = \langle\gamma_{ij}(x_s^1)\,\gamma_{kl}(x_s^2)\rangle$$

Используя (3.3) — (3.5), после преобразований получим

$$p_{ijlm} = \langle c_{ijpr}\rangle\langle c_{lmst}\rangle\,\gamma_{prst} + (\mu_{ijpr}^{lmst} + \nu_{ijpr}^{lmst})\,\varepsilon_{pr}\varepsilon_{st} \tag{3.8}$$

Здесь (3.9)

$$\mu_{ijpr}^{lmst} = c_{ijpr}^{lmst} + \langle c_{ijkn}\rangle \langle c_{lmst}^{t}(x_s^2)\,\varphi_{kprn}(x_s^1)\rangle + \langle c_{lmkn}\rangle \langle c_{ijpr}'(x_s^1)\,\varphi_{kstn}(x_s^2)\rangle$$

$$\nu_{ijpr}^{lmst} = \langle c_{ijpr}'(x_s^1)\,\psi_{lmst}(x_s^2)\rangle + \langle c_{lmst}'(x_s^2)\,\psi_{ijpr}(x_s^1)\rangle + $$
$$+ \langle c_{ijkn}\rangle \langle \varphi_{kprn}(x_s^1)\,\psi_{lmst}(x_s^2)\rangle + \langle c_{lmkn}\rangle \langle \varphi_{kstn}(x_s^2)\,\psi_{ijpr}(x_s^1)\rangle +$$
$$+ \langle \psi_{ijpr}(x_s^1)\,\psi_{lmst}(x_s^2)\rangle - \langle \psi_{ijpr}(x_s^1)\rangle \langle \psi_{lmst}(x_s^2)\rangle$$

Тензоры μ_{ijpr}^{lmst} и ν_{ijpr}^{lmst} (3.9) определяются тензорами Грина исходной задачи и статистическими свойствами поля модулей упругости c_{ijlm}, причем если в разложении (3.4) ограничиться лишь первым членом, то величины μ зависят только от моментов тензора c_{ijlm} 2-го порядка, а величины ν — от моментов 3-го и 4-го порядков. Если моментами высших порядков можно пренебречь, т. е. если имеет место условие

$$|\nu_{ijpr}^{lmst}| \ll |\mu_{ijpr}^{lmst}| \tag{3.10}$$

соотношение (3.8) примет вид

$$p_{ijlm} = \langle c_{ijpr}\rangle \langle c_{lmst}\rangle \gamma_{prst}' + \mu_{ijpr}^{lmst}\varepsilon_{pr}\varepsilon_{st} \tag{3.11}$$

Условия (3.10) выполняются, в частности, в случае малой микронеоднородности, когда отклонения c'_{ijkl} упругих модулей малы по сравнению с их средними значениями $\langle c_{ijkl}\rangle$, т. е. если

$$|c_{ijkl}'| \ll |\langle c_{ijkl}\rangle|$$

4. Предположим теперь рассматриваемое тело v неограниченным, а поле упругих модулей c_{ijlm} статистически изотропным [1]. В этом случае тензор $\langle c_{ijlm}\rangle$ будет изотропным тензором

$$\langle c_{ijkl}\rangle = \mu_1\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu_2(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

где δ_{ik} — единичный тензор второго ранга, а тензор Грина G_{km} (2.5) может быть записан в явном виде [2]

$$G_{km} = \frac{1}{8\pi\mu_2}\left[\frac{2}{r}\delta_{km} - \frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1+2\mu_2}\frac{\partial^2 r}{\partial x_k\,\partial x_m}\right], \qquad r^2 = (x_j - x_j^1)(x_j - x_j^1) \tag{4.1}$$

Используя метод, предложенный Робертсоном [3], найдем далее, что для статистически изотропного поля c_{ijkl} при наличии условий (1.3), (1.5) корреляционный тензор (1.4) имеет вид

$$c_{ijkl}^{prst}(\xi_s) = c_1(\rho)\,\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l\xi_p\xi_r\xi_s\xi_t + \tag{4.2}$$
$$+ c_2(\rho)\,(\delta_{ij}\xi_k\xi_l\xi_p\xi_r\xi_s\xi_t + \delta_{kl}\xi_i\xi_j\xi_p\xi_r\xi_s\xi_t + \delta_{pr}\xi_s\xi_t\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l + \delta_{st}\xi_p\xi_r\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l) +$$
$$+ c_3(\rho)\,(\delta_{ik}\xi_j\xi_l\xi_p\xi_r\xi_s\xi_t + \delta_{il}\xi_j\xi_k\xi_p\xi_r\xi_s\xi_t + \delta_{jk}\xi_i\xi_l\xi_p\xi_r\xi_s\xi_t +$$
$$+ \delta_{jl}\xi_i\xi_k\xi_p\xi_r\xi_s\xi_t + \delta_{ps}\xi_r\xi_t\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l + \delta_{pt}\xi_r\xi_s\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l + \delta_{rs}\xi_p\xi_t\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l +$$
$$+ \delta_{rt}\xi_p\xi_s\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l) + c_4(\rho)\,(\delta_{ij}\delta_{kl}\xi_p\xi_r\xi_s\xi_t + \delta_{pr}\delta_{st}\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l) +$$
$$+ c_5(\rho)\,(\delta_{ik}\delta_{jl}\xi_p\xi_r\xi_s\xi_t + \delta_{il}\delta_{jk}\xi_p\xi_r\xi_s\xi_t + \delta_{ps}\delta_{rt}\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l +$$
$$+ \delta_{pt}\delta_{rs}\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l) + c_6(\rho)\,(\delta_{ij}\delta_{pr}\xi_k\xi_l\xi_s\xi_t + \delta_{ij}\delta_{st}\xi_k\xi_l\xi_p\xi_r +$$
$$+ \delta_{kl}\delta_{pr}\xi_i\xi_j\xi_s\xi_t + \delta_{kl}\delta_{st}\xi_i\xi_j\xi_p\xi_r) + c_7(\rho)\,(\delta_{ij}\delta_{ps}\xi_k\xi_l\xi_r\xi_t + \delta_{ij}\delta_{pt}\xi_k\xi_l\xi_r\xi_s +$$
$$+ \delta_{ij}\delta_{rs}\xi_k\xi_l\xi_p\xi_t + \delta_{ij}\delta_{rt}\xi_k\xi_l\xi_p\xi_s + \delta_{ik}\delta_{pr}\xi_j\xi_l\xi_s\xi_t + \delta_{ik}\delta_{st}\xi_j\xi_l\xi_p\xi_r +$$
$$+ \delta_{il}\delta_{pr}\xi_j\xi_k\xi_s\xi_t + \delta_{il}\delta_{st}\xi_j\xi_k\xi_p\xi_r + \delta_{jk}\delta_{pr}\xi_i\xi_l\xi_s\xi_t + \delta_{jk}\delta_{st}\xi_i\xi_l\xi_p\xi_r +$$
$$+ \delta_{jl}\delta_{pr}\xi_i\xi_k\xi_s\xi_t + \delta_{jl}\delta_{st}\xi_i\xi_k\xi_p\xi_r + \delta_{kl}\delta_{ps}\xi_i\xi_j\xi_r\xi_t + \delta_{kl}\delta_{pt}\xi_i\xi_j\xi_r\xi_s +$$
$$+ \delta_{kl}\delta_{rs}\xi_i\xi_j\xi_p\xi_t + \delta_{kl}\delta_{rt}\xi_i\xi_j\xi_p\xi_s) + c_8(\rho)\,(\delta_{ik}\delta_{ps}\xi_j\xi_l\xi_r\xi_t +$$

$$+\delta_{ik}\delta_{pt}\xi_j\xi_l\xi_r\xi_s+\delta_{ik}\delta_{rs}\xi_j\xi_l\xi_p\xi_t+\delta_{ik}\delta_{rt}\xi_j\xi_l\xi_p\xi_s+\delta_{il}\delta_{ps}\xi_j\xi_k\xi_r\xi_t+$$
$$+\delta_{il}\delta_{pt}\xi_j\xi_k\xi_r\xi_s+\delta_{il}\delta_{rs}\xi_j\xi_k\xi_p\xi_t+\delta_{il}\delta_{rt}\xi_j\xi_k\xi_p\xi_s+\delta_{jk}\delta_{ps}\xi_i\xi_l\xi_r\xi_t+$$
$$+\delta_{jk}\delta_{pt}\xi_i\xi_l\xi_r\xi_s+\delta_{jk}\delta_{rs}\xi_i\xi_l\xi_p\xi_t+\delta_{jk}\delta_{rt}\xi_i\xi_l\xi_p\xi_s+\delta_{jl}\delta_{ps}\xi_i\xi_k\xi_r\xi_t+$$
$$+\delta_{jl}\delta_{pt}\xi_i\xi_k\xi_r\xi_s+\delta_{jl}\delta_{rs}\xi_i\xi_k\xi_p\xi_t+\delta_{jl}\delta_{rt}\xi_i\xi_k\xi_p\xi_s)+c_9(\rho)(\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{pr}\xi_s\xi_t+$$
$$+\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{st}\xi_p\xi_r+\delta_{pr}\delta_{st}\delta_{ij}\xi_k\xi_l+\delta_{pr}\delta_{st}\delta_{kl}\xi_i\xi_j)+c_{10}(\rho)(\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ps}\xi_r\xi_t+$$
$$+\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{pt}\xi_r\xi_s+\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{rs}\xi_p\xi_t+\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{rt}\xi_p\xi_s+\delta_{pr}\delta_{st}\delta_{ik}\xi_j\xi_l+$$
$$+\delta_{pr}\delta_{st}\delta_{il}\xi_j\xi_k+\delta_{pr}\delta_{st}\delta_{jk}\xi_i\xi_l+\delta_{pr}\delta_{st}\delta_{jl}\xi_i\xi_k)+c_{11}(\rho)(\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{pr}\xi_s\xi_t+$$
$$+\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{st}\xi_p\xi_r+\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{pr}\xi_s\xi_t+\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{st}\xi_p\xi_r+\delta_{ps}\delta_{rt}\delta_{ij}\xi_k\xi_l+$$
$$+\delta_{ps}\delta_{rt}\delta_{kl}\xi_i\xi_j+\delta_{pt}\delta_{rs}\delta_{ij}\xi_k\xi_l+\delta_{pt}\delta_{rs}\delta_{kl}\xi_i\xi_j)+c_{12}(\rho)(\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{ps}\xi_r\xi_t+$$
$$+\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{pt}\xi_r\xi_s+\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{rs}\xi_p\xi_t+\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{rt}\xi_p\xi_s+\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{ps}\xi_r\xi_t+$$
$$+\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{pt}\xi_r\xi_s+\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{rs}\xi_p\xi_t+\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{rt}\xi_p\xi_s+\delta_{ps}\delta_{rt}\delta_{ik}\xi_j\xi_l+$$
$$+\delta_{ps}\delta_{rt}\delta_{il}\xi_j\xi_k+\delta_{ps}\delta_{rt}\delta_{jk}\xi_i\xi_l+\delta_{ps}\delta_{rt}\delta_{jl}\xi_i\xi_k+\delta_{pt}\delta_{rs}\delta_{ik}\xi_j\xi_l+$$
$$+\delta_{pt}\delta_{rs}\delta_{il}\xi_j\xi_k+\delta_{pt}\delta_{rs}\delta_{jk}\xi_i\xi_l+\delta_{pt}\delta_{rs}\delta_{jl}\xi_i\xi_k)+c_{13}(\rho)\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{pr}\delta_{st}+$$
$$+c_{14}(\rho)(\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ps}\delta_{rt}+\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{pt}\delta_{rs}+\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{pr}\delta_{st}+\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{pr}\delta_{st})+$$
$$+c_{15}(\rho)(\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{ps}\delta_{rt}+\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{pt}\delta_{rs}+\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{ps}\delta_{rt}+\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{pt}\delta_{rs})$$
$$(\rho^2=\xi_j\xi_j)$$

В случае малой неоднородности, когда в разложении (3.4) можно ограничиться одним членом и выполняется условие (3.10), коэффициенты, входящие в соотношения (3.6), (3.8), связывающие статистические характеристики напряженного и деформированного состояний, а также в соотношения (2.7), (3.7), определяются лишь тензором Грина и первыми двумя моментами $\langle c_{ijkl}\rangle$ и c_{ijkl}^{prst} поля тензора упругих модулей, причем соотношения (4.1), (4.2) открывают возможность их вычисления.

Рассмотрим также случай, когда корреляционный тензор (1.4) не зависит от ориентации вектора ξ_s и является лишь функцией его модуля $\rho=\sqrt{\xi_j\xi_j}$. В этом случае будем говорить о сильной изотропии поля c_{ijkl}. Этот случай рассматривался [4] в связи с исследованием упругих модулей поликристаллического тела. При сильной изотропии поля c_{ijkl}, учитывая свойства симметрии (1.3) и (1.5), найдем

$$c_{ijkl}^{prst}(\rho)=h_1(\rho)\,\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{pr}\delta_{st}+$$
$$+h_2(\rho)(\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ps}\delta_{rt}+\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{pt}\delta_{rs}+\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{pr}\delta_{st}+\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{pr}\delta_{st})+$$
$$+h_3(\rho)(\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{ps}\delta_{rt}+\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{pt}\delta_{rs}+\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{ps}\delta_{rt}+\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{pt}\delta_{rs})$$

Вычисление коэффициентов, входящих в соотношения (3.6), (3.8), в случае сильной изотропии существенно упрощается. В частности, для $\langle\psi_{ijst}\rangle$ (3.6), если ограничиться в разложении (3.4) одним членом, вычисления дают

$$\langle\psi_{ijst}\rangle=-{}^4/_3\,\pi\,(\lambda_1+{}^1/_5\lambda_2)\,c_{nkst}^{ijnk}(0)+{}^8/_{15}\,\pi\lambda_2 c_{nnst}^{ijmm}(0) \qquad (4.3)$$

где λ_1, λ_2 выражаются через постоянные μ_1, μ_2 (4.1) формулами

$$\lambda_1=\frac{\mu_1+3\mu_2}{8\pi\mu_2(\mu_1+2\mu_2)},\qquad \lambda_2=\frac{\mu_1+\mu_2}{8\pi\mu_2(\mu_1+2\mu_2)}$$

Соотношение (4.3) совпадает с результатом, полученным другим путем в [4].

Поступила 25 IX 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин В. А. Статистическое описание напряженного состояния деформируемого тела. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 6.
2. Pearson C. E. Theoretical elasticity. Cambridge, 1960.
3. Robertson H. P. The invariant theory of isotropic turbulence. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1940, vol. 36.
4. Лившиц И. М. и Розенцвейг Л. Н. К теории упругих свойств поликристаллов. Ж. эксперим. и теор. физ., 1946, т. 16, № 11.