Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО КРУЧЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ОВАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ [1]

Б. Д. Аннин

(Новосибирск)

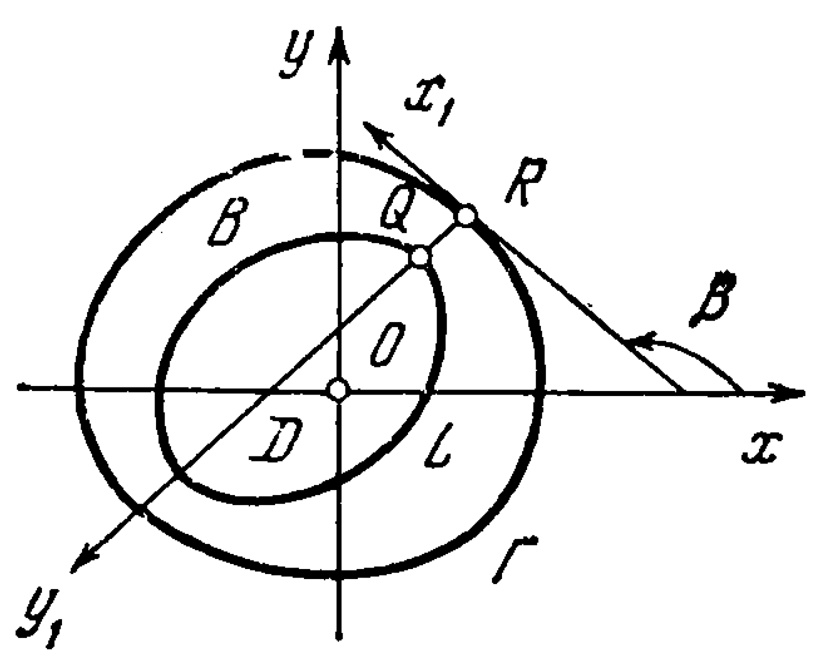
Задача определения напряжений, возникающих при кручении цилиндрического стержня из упруго-идеально пластического материала, поставлена давно [1,2]. Основная трудность в ее решении состоит в том, что граница раздела упругой и пластической областей неизвестна и подлежит определению в процессе решения. В [1] получено точное решение для кругового сечения, а в [3] — для сечения, близкого к эллипсу. В [4] для случая полигонального сечения эта задача сведена к определению двух аналитических в верхней полуплоскости функций комплексной переменной по некоторым условиям на вещественной оси. В [3,5] предложен обратный метод, позволяющий по форме упругого ядра находить поперечное сечение. Исходя из обратного метода, в [6] задача упруго-пластического кручения сведена к нелинейному сингулярному интегральному уравнению, которое не исследовалось. В [7] выяснялись условия, необходимые для существования решения задачи упруго-пластического кручения. Различные приближенные методы предлагались в [4,8–12].

Ниже рассматривается случай овального поперечного сечения при таких значениях угла закручивания, когда граница области, в которой материал еще находится в упругом состоянии, не имеет общих точек с боковой поверхностью стержня. Применением преобразования Лежандра рассматриваемая задача сведена к задаче Дирихле в круге для уравнения Монжа — Ампера эллиптического типа. При этом упруго-пластическая граница определяется через нормальную производную решения на границе круга. Доказывается существование и единственность решения задачи упруго-пластического кручения. Получен ряд оценок, представляющих некоторый практический интерес.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим упруго-пластическое кручение цилиндрического стержня, поперечное сечение F которого ограничено строго выпуклым контуром Г. Будем предполагать, что радиус кривизны $\rho(s) > 0$ существует в каждой точке кривой Г и как функция дуги s принадлежит классу C^2, т. е. $d^2\rho(s) / ds^2$ непрерывна. Очевидно, $\infty > \rho_{\max} \geqslant \rho(s) \geqslant \rho_{\min} > 0$, где $\rho_{\max}$, $\rho_{\min}$ — соответственно максимальное и минимальное значения радиуса кривизны. Возьмем правую декартову систему координат xyz с осью z, направленной паралельно образующей цилиндрической поверхности и началом $O \in F$. Пусть G — модуль сдвига, k — константа пластичности, α — угол закручивания на единицу длины; кроме того, обозначим $a = 2^{-1}G^{-1}\alpha^{-1}k$, Ω — площадь области F. Закручивание происходит против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси z. Предположим, что имеется упругое ядро — односвязная область D с границей L, целиком лежащая

[1] Краткое изложение работы содержится в заметке автора, опубликованной в Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 5.

внутри Г (фиг. 1). Обозначим через B двусвязную область, ограниченную Г и L. В этой области материал находится в чисто пластическом состоянии. Условимся индексами x и y обозначать частные производные, сохраняя, как обычно, эти же индексы и для обозначения напряжений там, где это не приводит к неясностям.



Фиг. 1

Математически задача упруго-пластического кручения, именуемая ниже задачей А, ставится так.

Задача А. Дана односвязная область F, ограниченная овалом Г, удовлетворяющим указанному выше условию гладкости. Найти односвязную область D, принадлежащую вместе с ее границей L области F, и с точностью до постоянной функцию $\psi(x, y)$, определенную и непрерывную в $F + \Gamma$, имеющую в $F+\Gamma$ непрерывные производные первого порядка ψ_x, ψ_y, имеющую в D непрерывные производные второго порядка ψ_{xx}, ψ_{xy}, ψ_{yy} по следующим условиям:

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = -a^{-1}, \quad \psi_x^2 + \psi_y^2 < 1 \qquad \text{в области } D \tag{1.1}$$

$$\psi_x^2 + \psi_y^2 = 1 \quad (B = F - (D + L)) \qquad \text{в области } L + B + \Gamma \tag{1.2}$$

$$\operatorname{grad} \psi = \mathbf{n}_\Gamma \qquad \text{на контуре } \Gamma \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{n}_\Gamma$ — единичный вектор внутренней нормали к контуру Г.

Замечание 1.1. Величина $\alpha = 2^{-1}G^{-1}a^{-1}k$ играет роль параметра $0 < \alpha < \infty$.

Замечание 1.2. Из (1.3) следует, что функция $\psi(x, y)$ постоянна на Г, будем считать

$$\psi(x, y)_\Gamma = 0 \tag{1.4}$$

Замечание 1.3. Касательные напряжения равны

$$\tau_{xz} = k\psi_y, \qquad \tau_{yz} = -k\psi_x$$

Замечание 1.4. Аналогично ставится задача о течении дилатантной жидкости по трубе [13], имеющей поперечное сечение F. Другая гидродинамическая интерпретация задачи А предложена Мизесом [5].

§ 2. Единственность решения. Пусть R — произвольная точка контура Г; пусть x_1Ry_1 — подвижная система координат (фиг. 1) в плоскости xy, образованная касательной Rx_1 к Г в точке R, направленной в сторону положительного обхода Г, и внутренней нормалью Ry_1. Будем предполагать, что касательная к Г в точке пересечения Г осью x перпендикулярна оси x. Обозначим через β угол между Rx_1 и Ox. Уравнение овала Г можно представить в виде [14]

$$x^\circ(\beta) = \frac{dM(\beta)}{d\beta}\cos\beta + M(\beta)\sin\beta, \qquad y^\circ(\beta) = \frac{dM(\beta)}{d\beta}\sin\beta - M(\beta)\cos\beta$$
$$(1/2\pi \leqslant \beta < 5/2\pi) \tag{2.1}$$

Здесь $M(\beta)$ — опорная функция контура Г. Имеет место соотношение

$$\rho(\beta) = M(\beta) + \frac{d^2M(\beta)}{d\beta^2} \tag{2,2}$$

Здесь $\rho(\beta)$ — радиус кривизны Г как функция β.

Замечание 2.1. Каждому $\beta \in [{}^1/_2\pi; {}^5/_2\pi)$ соответствует по (2.1) одна и только одна точка $R \in \Gamma$.

Замечание 2.2. Очевидно, $M(\beta) \in C^4$, т. е. $d^4M_*(\beta) / d\beta^4$ — непрерывная функция для $\beta \in [{}^1/_2\pi, {}^5/_2\pi)$.

Определение. Кривая L, лежащая внутри Γ, обладает свойством E, если выполнены следующие условия.

а) Кривая L допускает параметрическое представление вида

$$X(\beta) = x^\circ(\beta) - N(\beta)\sin\beta, \quad Y(\beta) = y^\circ(\beta) + N(\beta)\cos\beta \qquad (2.3)$$
$$({}^1/_2\pi \leqslant \beta < {}^5/_2\pi)$$

Здесь $x^\circ(\beta)$, $y^\circ(\beta)$ берутся из (2.1), а $N(\beta)$ — периодическая с периодом 2π и непрерывная функция β в $[{}^1/_2\pi, {}^5/_2\pi)$, причем $0 < N(\beta) < \rho(\beta)$.

б) Для любых двух различных значений угла $\beta = \beta_1$, $\beta = \beta_2$ из $[{}^1/_2\pi, {}^5/_2\pi)$ отрезки прямых R_1Q_1 и R_2Q_2 не имеют общих точек [1]; здесь точка $R_i \in \Gamma$ соответствует β_i по (2.1), а точка $Q_i \in L$ соответствует β_i по (2.3) $(i = 1, 2)$.

Замечание 2.3. Очевидно, L является простой жордановой кривой, такой, что каждому значению $\beta \in [{}^1/_2\pi, {}^5/_2\pi)$ отвечает по (2.3) одна и только одна точка $Q \in L$; при этом $N(\beta)$ — ордината этой точки в системе координат x_1Ry_1, т. е. длина отрезка QR (фиг. 1).

Теорема 2.1. Если существует решение задачи А, у которого контур L обладает свойством E, и функция $\psi(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема [2] в $L + B + \Gamma$, то такое решение только одно.

Пусть решение задачи А, обладающее указанными в теореме 2.1 свойствами, существует. Тогда справедливы следующие утверждения.

2.1°. Поверхность, определяемая в пространстве $xy\psi$ функцией $\psi(x, y)$, где точка (x, y) принадлежит $L + B + \Gamma$, имеет следующее параметрическое представление:

$$\begin{aligned} x &= \frac{dM(\beta)}{d\beta}\cos\beta + [M(\beta) - u]\sin\beta \qquad & ({}^1/_2\pi \leqslant \beta < {}^5/_2\pi) \\ y &= \frac{dM(\beta)}{d\beta}\sin\beta - [M(\beta) - u]\cos\beta & \\ \psi &= u & (0 \leqslant u \leqslant N(\beta)) \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Заметим, что формулы (2.4) получаются, если решать методом Коши задачу Коши для уравнения (1.2) при условиях (1.3) и (1.4), причем уравнение Γ брать в виде (2.1). Справедливость утверждения 2.1° следует [15] из того, что $\psi(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в $L + B + \Gamma$ и что проекция на плоскость xy характеристик интегральной поверхности, удовлетворяющей уравнению (1.2) и условию (1.3), не пересекаются [3] в $L + B + \Gamma$, так как они совпадают с нормалями к Γ.

Следствие 2.1. В $L + B + \Gamma$ справедливы соотношения

$$\psi_x = -\sin\beta, \qquad \psi_y = \cos\beta, \qquad \psi - x\psi_x - y\psi_y = M(\beta) \qquad (2.5)$$

Замечание 2.4. Как видно из соотношений (2.5), справедливых, в частности, на L, и замечания 2.1, каждая из функций $\psi_x(x, y)$, $\psi_y(x, y)$ не принимает на L никакого значения более двух раз.

[1] В частности, точки Q_1 и Q_2 не совпадают.

[2] Т. е. $\psi(x, y)$ имеет в области B непрерывные производные второго порядка, которые непрерывно продолжимы на L и Γ из B.

[3] Таким образом, свойство E кривой Γ обеспечивает однозначное снесение данных Коши (1.3) по проекциям характеристик на плоскость xy с Γ на L.

2.2°. Всюду в области D

$$\psi_{xx}\psi_{yy} - \psi_{xy}^2 \neq 0 \tag{2.6}$$

Доказательство. Пусть в точке $(x_0, y_0) \in D$

$$\psi_{xx}\psi_{yy} - \psi_{xy}^2 = 0$$

Без ограничения общности можно считать [1], что

$$\psi_{xy}(x_0, y_0) = \psi_{xx}(x_0, y_0) = 0$$

Тогда ([16], стр. 428) гармоническая функция $\psi_x(x, y)$ принимает на L значение $\psi_x(x_0, y_0)$, по крайней мере, в четырех различных точках [2].

2.3°. Формулами

$$\xi = -\psi_x(x, y), \qquad \eta = -\psi_y(x, y), \qquad (x, y) \in D + L \tag{2.7}$$

осуществляется гомеоморфное отображение $D + L$ на круг $K + C$ плоскости $\xi\eta$, определяемый неравенством $\xi^2 + \eta^2 \leqslant 1$.

Справедливость этого утверждения следует из того, что функции $\psi_x(x, y)$, $\psi_y(x, y)$ непрерывны в $D + L$, формулами (2.7) осуществляется взаимно-однозначное отображение L на окружность C единичного радиуса: $\xi^2 + \eta^2 = 1$, якобиан отображения (2.7) отличен от нуля в области D ([17], стр. 26).

2.4°. Всюду в области D

$$\psi_{xx}\psi_{yy} - \psi_{xy}^2 > 0$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда индекс единственной особой точки непрерывного векторного поля $\mathbf{q} = (\psi_x, \psi_y)$ будет равен -1, а это невозможно, так как индекс L относительно $\mathbf{q}$ равен 1 (см., например, [18]).

Следствие 2.2. Всюду в D

$$\psi_{xx} < 0, \qquad \psi_{yy} < 0$$

2.5°. Обозначим

$$\Phi = -x\psi_x - y\psi_y + \psi \tag{2.8}$$

и рассмотрим Φ как функцию ξ, η, определяемых формулами (2.7). Тогда функция $\Phi(\xi, \eta)$ непрерывна в замкнутом круге $K + C$, удовлетворяет в K уравнению [3]

$$\Phi_{\xi\xi}\Phi_{\eta\eta} - \Phi_{\xi\eta}^2 - a(\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta}) = 0 \tag{2.9}$$

и неравенствам

$$\Phi_{\xi\xi} > 0, \qquad \Phi_{\eta\eta} > 0 \tag{2.10}$$

удовлетворяет на окружности C условию

$$\Phi_\xi(\xi, \eta)|_C = M(\theta + {}^1/_2\pi) \tag{2.11}$$

Здесь θ — полярный угол в плоскости ξ, η. В круге K выполняются равенства

$$\Phi_\xi(\xi, \eta) = x, \qquad \Phi_\eta(\xi, \eta) = y \tag{2.12}$$

Доказательство 2.5° следует из свойств преобразования Лежандра [19].

2.6°. Обозначим

$$w(\xi, \eta) = \Phi(\xi, \eta) - {}^1/_2 a(\xi^2 + \eta^2) + {}^1/_2 a \tag{2.13}$$

Функция $w(\xi, \eta)$ непрерывна в $K + C$, на границе круга равна

$$w(\xi, \eta)|_C = M(\theta + {}^1/_2\pi) \tag{2.14}$$

---

[1] Путем поворота системы координат всегда можно добиться равенства нулю в точке (x_0, y_0) смешанной производной второго порядка; при этом преобразовании лапласиан и гессиан инвариантны, сохраняется также свойство, указанное в замечании 2.4.

[2] Если все частные производные по x и y от ψ_x в точке (x_0, y_0) равны нулю, то ψ_x постоянна в окрестности точки (x_0, y_0), а следовательно, и в $D + L$.

[3] Здесь и дальше индексы ξ, η обозначают частные производные.

удовлетворяет в K уравнению Монжа — Ампера

$$w_{\xi\xi} w_{\eta\eta} - w_{\xi\eta}{}^2 = a^2 \tag{2.15}$$

и неравенствам

$$w_{\xi\xi} > 0, \qquad w_{\eta\eta} > 0 \tag{2.16}$$

Замечание 2.5. Существует не более одной непрерывной в $K + C$ функции w (ξ, η), удовлетворяющей в K уравнению (2.15), неравенствам (2.16) и на C условию (2.14).

Доказательство теоремы 2.1. Прежде всего заметим, что, в силу 2.1° и единственности задачи Дирихле, для уравнения (1.1) двух различных решений задачи А с одинаковыми кривыми L, обладающими свойством E, быть не может. Далее, в силу замечания (2.5), функция Φ $(\xi\eta)$, удовлетворяющая в K уравнению (2.9), неравенству (2.10) и на C условию (2.11), единственна. Наконец, в силу формул (2.12), область D, следовательно и кривая L, определяются однозначно через функцию Φ (ξ, η). Теорема 2.1 доказана.

Следствие 2.3. Если

$$\alpha < kG^{-1}\Omega^{-1/2}\pi^{1/2} \tag{2.17}$$

то не существует решения задачи А, обладающей указанными в теореме 2.1 свойствами.

Доказательство. Пусть L_δ обозначает прообраз окружности C_δ, определяемой уравнением $\xi^2 + \eta^2 = 1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, при отображении 2.7 и $D\delta$ — конечная область, ограниченная L_δ. Если α удовлетворяет неравенству (2.17), то это противоречит следующему легко выводимому неравенству

$$\pi(1-\delta) = \frac{1}{2}\int\limits_{L_\delta} \psi_x d\psi_y - \psi_y d\psi_x = \iint\limits_{D_\delta} (\psi_{xx}\psi_{yy} - \psi_{xy}{}^2)\, dxdy < \frac{1}{4a^2}\Omega$$

§ 3. Существование решения. *Теорема* 3.1. Если

$$\alpha > k \,/\, G\rho_{\min} \tag{3.1}$$

то существует решение задачи А; при этом контур L обладает свойством E, а функция ψ (x, y) дважды непрерывно дифференцируема в $L + B + \Gamma$.

Доказательство этой теоремы состоит в построении контура L и функции ψ (x, y), удовлетворяющих сформулированным в § 1 условиям. Для этого обратим ход рассуждений § 2.

3.1°. Существует дважды непрерывно дифференцируемая в замкнутом круге $K + C$, определяемом неравенством $\xi^2 + \eta^2 \leqslant 1$, функция w (ξ, η), удовлетворяющая в $K + C$ уравнению (2.15), неравенствам (2.16) и на единичной окружности C — условию (2.14).

Доказательство этого утверждения следует из [20–22], если учесть, что $M(\theta + {}^1/_2\pi) \in C^4$ для $0 \leqslant \theta < 2\pi$

Замечание 3.1. Для радиальной производной функции w (ξ, η) на C справедливо неравенство $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$

$$w_r(1, \theta) + \frac{d^2M(\theta + {}^1/_2\pi)}{d\theta^2} \geqslant m_0 > 0, \quad w_r(1, \theta) = \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r}\bigg|_{r=1}, \quad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \tag{3.2}$$

Здесь m_0 — постоянная, зависящая от максимума модулей производных $M(\theta + {}^1/_2\pi)$ до четвертого порядка включительно ([16], стр. 136).

Замечание 3.2. Пусть (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2) — две различные точки замкнутого круга $K + C$, тогда справедливо неравенство [23]

$$(\xi_2 - \xi_1)[w_\xi(\xi_2, \eta_2) - w_\xi(\xi_1, \eta_1)] + (\eta_2 - \eta_1)[w_\eta(\xi_2, \eta_2) - w_\eta(\xi_1, \eta_1)] > 0 \tag{3.3}$$

3.2°. Пусть функция $\Phi(\xi, \eta)$, где точка (ξ, η) из $K + C$, определена через функцию $w(\xi, \eta)$, существование которой доказано в 3.1° из уравнения (2.13), тогда $\Phi(\xi\eta)$, удовлетворяет в круге $K + C$ уравнению (2.9), неравенствам (2.10) и на C — условию 2.11. При этом для любых двух различных точек (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) из $K + C$ справедливо неравенство

$$a^2[(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2] < [\Phi_\xi(\xi_2, \eta_2) - \Phi_\xi(\xi_1, \eta_1)]^2 + [\Phi_\eta(\xi_2, \eta_2) - \Phi_\eta(\xi_1, \eta_1)]^2 \qquad (3.4)$$

3.3°. Обозначим

$$x = \Phi_\xi(\xi, \eta), \qquad y = \Phi_\eta(\xi, \eta) \qquad (3.5)$$

Здесь $(\xi, \eta) \in K + C$, а функция $\Phi(\xi, \eta)$ — та же, что и в 3.2°. Тогда формулами (3.5) осуществляется гомеоморфное отображение $K + C$ на некоторую (замкнутую) область $D + L$ плоскости xy. Уравнение L образа C (если обозначить $\beta = \theta + {}^1/_2\pi$) может быть записано в виде (2.3); причем

$$N(\beta) = M(\beta) - \Phi_r(1, \beta - {}^1/_2\pi)$$

$$\Phi_r(1, \theta) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=1} \qquad ({}^1/_2\pi \leqslant \beta < {}^5/_2\pi) \qquad (3.6)$$

Доказательство. Гомеоморфизм следует из (3.4), если учесть, что $\Phi_\xi(\xi, \eta)$, $\Phi_\eta(\xi, \eta)$ непрерывны в $K + C$. Полагая $\xi = \cos\theta$, $\eta = \sin\theta$ и выражая $\Phi_\xi(\xi, \eta)|_C$, $\Phi_\eta(\xi, \eta)|_C$ через $\Phi_r(1, \theta)$, $\Phi_\theta(1, \theta) = dM(\theta + {}^1/_2\pi) / d\theta$, получим уравнение L в виде (2.3) с $N(\beta)$ определяемым равенством (3.6).

Замечание 3.3. Каждому $\beta \in [{}^1/_2\pi, {}^5/_2\pi)$ отвечает одна и только одна точка кривой L. Кривая L гладкая.

Следствие 3.1. Вектор

$$\nu_L(\beta_0) = (dY(\beta_0) / d\beta, \; -dX(\beta_0) / d\beta) \qquad (3.7)$$

коллинеарен вектору нормали в точке L, соответствующей β_0, $\beta_0 \in [{}^1/_2\pi, {}^5/_2\pi)$.

Доказательство. При возрастании θ окружность C обходится в положительном направлении (область K остается слева), и якобиан отображения (3.5) строго больше ля на L в силу (2.9) и (2.10). Поэтому и кривая L при возрастании $\beta = \theta + {}^1/_2\pi$ обходится в положительном направлении. Отсюда следует, что вектор

$$t_L(\beta_0) = (dX(\beta_0) / d\beta, \; dY(\beta_0) / d\beta)$$

направлен по касательной к L в сторону положительного обхода L. Вектор же $\nu_L(\beta_0)$ можно получить путем поворота $t_L(\beta_0)$ по часовой стрелке на угол ${}^1/_2\pi$.

3.4°. Обозначим

$$\psi = -\xi\Phi_\xi - \eta\Phi_\eta + \Phi \qquad (3.8)$$

и рассмотрим ψ как функцию x, y, определяемых формулами (3.5). Тогда функция $\psi(x, y)$ непрерывно дифференцируема в $D + L$, удовлетворяет в D уравнению (1.1), на L выполняются соотношения (2.5), (2.6). При этом для $(x, y) \in D + L$ выполняются равенства $-\psi_x(x, y) = \xi$, $-\psi_y(x, y) = \eta$.

Следствие 3.2. Угол между вектором $\tau(\beta) = (\sin\beta, -\cos\beta)$ и вектором $\nu_L(\beta)$ (см. (3.7)) строго меньше ${}^1/_2\pi$ для любого $\beta \in [{}^1/_2\pi, {}^5/_2\pi)$.

Действительно, в силу (3.2), скалярное произведение этих векторов строго положительно.

3.5°. Пусть Q_1 и Q_2 — две различные точки кривой L, соответствующие, следовательно, различным $\beta_1, \beta_2 \in [{}^1/_2\pi, {}^5/_2\pi)$. Тогда полупрямые $l(Q_1)$ и $l(Q_2)$, начинающиеся в точках Q_1 и Q_2 и направленные по векторам $\tau(\beta_1) = (\sin\beta_1 - \cos\beta_1)$ и $\tau(\beta_2) = (\sin\beta_2, -\cos\beta_2)$ соответственно, не имеют общих точек.

Доказательство. Уравнение полупрямых $l(Q_1)$ и $l(Q_2)$ можно записать так:

$$x_i(\lambda_i) = X(\beta_i) + \lambda_i \sin\beta_i, \qquad y_i(\lambda_i) = Y(\beta_i) - \lambda_i \cos\beta_i$$

$$0 \leqslant \lambda_i < \infty \qquad (i = 1, 2)$$

Предположим, что полупрямые $l(Q_1)$ и $l(Q_2)$ пересекаются; это значит существуют такие λ_1^* и λ_2^*, что $\lambda_1^* + \lambda_2^* > 0$ и что имеют место равенства

$$x_1(\lambda_1^*) = x_2(\lambda_2^*), \; y_1(\lambda_1^*) = y_2(\lambda_2^*)$$

Теперь воспользуемся неравенством (3.3), полагая

$$\xi_i = \sin\beta_i, \; \eta_i = -\cos\beta_i, \; w_\xi(\xi_i, \eta_i) = X(\beta_i) - a\xi_i, \; w_\eta(\xi_i, \eta_i) = Y(\beta_i) - a\eta_i \; (i = 1, 2)$$

Найдем

$$-(\lambda_1^* + \lambda_2^*)[1 - \cos(\beta_1 - \beta_2)] > 0$$

что невозможно.

3.6°. Для любого $\beta \in [{}^1/_2\pi, {}^5/_2\pi)$ функция $N(\beta)$, определяемая равенством (3.6), строго положительна.

Доказательство. Пусть $P_0 = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$ — произвольная фиксированная точка окружности C. Возьмем функцию

$$\Phi^*(\xi, \eta) = dM(\theta_0 + {}^1/_2\pi)/d\theta \, r\sin(\theta - \theta_0) + [M(\theta_0 + {}^1/_2\pi) - \rho_{\min}]\cos(\theta - \theta_0) +$$
$$+ ar^2 + \rho_{\min} - a$$

Обозначим

$$\Delta(\xi, \eta) = \Phi(\xi, \eta) - \Phi^*(\xi, \eta), \qquad \Delta(\xi, \eta)|_{r=1} = g(\theta), \qquad (\xi, \eta) \in K + C$$

где функция $\Phi(\xi, \eta)$ та же, что в 3.2°. Так как

$$g(\theta_0) = dg(\theta_0) \,|\, d\theta = 0, \qquad d^2g(\theta) \,|\, d\theta^2 + g(\theta) \geqslant 0$$

то $g(\theta) \geqslant 0$ для всех $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Поскольку функция $\Delta(\xi, \eta)$ удовлетворяет в K уравнению эллиптического типа

$$\Phi_{\eta\eta}\Delta_{\xi\xi} - 2\Phi_{\xi\eta}\Delta_{\xi\eta} + \Phi_{\xi\xi}\Delta_{\eta\eta} = 0$$

то в области $K + C$ имеем $\Delta(\xi, \eta) \geqslant 0$. Следовательно,

$$\frac{\partial\Delta(\xi, \eta)}{\partial r}\bigg|_{P_0} \leqslant 0$$

т. е. $N(\beta_0) \geqslant \rho_{\min} - 2a$, где $\beta_0 = \theta_0 + {}^1/_2\pi$. Принимая во внимание неравенство (3.1), получим, что $N(\beta_0)$ положительно.

3.7°. Пусть Q — произвольная точка кривой L, соответствующая некоторому $\beta \in [{}^1/_2\pi, {}^5/_2\pi)$, и $l(Q)$ — полупрямая, начинающаяся в точке Q и направленная по вектору

$$\tau(\beta) = (\sin\beta, -\cos\beta)$$

Если взять на $l(Q)$ точку R такую, что расстояние от точки Q до точки R равно $N(\beta)$, где $N(\beta)$ определяется по (3.6), то совокупность точек R, соответствующих всем $\beta \in [{}^1/_2\pi, {}^5/_2\pi)$, представляет кривую Γ. При этом β есть угол наклона к оси x, ориентированной в сторону положительного обхода Γ касательной к Γ в точке R.

3.8°. Кривая L обладает свойством E.

Очевидно, в проверке нуждается условие $N(\beta) < \rho(\beta)$ для $\beta \in [{}^1/_2\pi, {}^5/_2\pi)$. Оно следует из неравенства (3.2).

3.9°. Пусть B обозначает область между Γ и L. Определим функцию $\psi(x, y)$ в $L + B + \Gamma$ посредством равенств (2.4), причем

$${}^1/_2\pi \leqslant \beta < {}^5/_2\pi, \qquad 0 \leqslant u \leqslant N(\beta)$$

где $N(\beta)$ определяется по 3.6. Тогда функция $\psi(x, y)$ удовлетворяет в $L + B + \Gamma$ уравнению (1.3) и на Γ условиям (1.3) и (1.4); на L выполняются равенства (2.5), 3.10°. Контур L, определенный посредством равенств (2.3) с $N(\beta)$ в виде (3.6), и функция $\psi(x, y)$, определенная в $F+\Gamma$ указанным в 3.4° и 3.9° способом, суть решение задачи А. Теорема 3.1 доказана.

Следствие 3.3. Для любого $\beta \in [^1/_2\pi, {}^5/_2\pi)$ справедливо неравенство

$$\rho_{\min} - kG^{-1}\alpha^{-1} \leqslant N(\beta) < \rho(\beta) - k2^{-1}G^{-1}\alpha^{-1} \tag{3.9}$$

Следствие 3.4. Если

$$\alpha \leqslant k2^{-1}G^{-1}\rho_{\min}{}^{-1}$$

то решения задачи А, обладающей свойствами, указанными в теореме 2.1, не существует.

§ 4. **Некоторые свойства решения задачи А.** 4.1°. Пусть $\alpha_2 > \alpha_1$. Условимся введенные в § 1—3 величины снабжать индексами 1, 2 соответственно, если $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$. Тогда для любого $\beta \in [^1/_2\pi, {}^5/_2\pi)$ справедливы неравенства

$$N_1(\beta) + \frac{1}{2}\frac{k}{G}\left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2}\right) \leqslant N_2(\beta) \leqslant N_1(\beta) + \frac{k}{G}\left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2}\right) \tag{4.1}$$

Доказательство. Обозначим

$$A' = {}^1/_2(w_{1\eta\eta} + w_{2\eta\eta}), \qquad B' = {}^1/_2(w_{1\xi\eta} + w_{2\xi\eta}), \qquad C' = {}^1/_2(w_{1\xi\xi} + w_{2\xi\xi})$$

$$H(\xi, \eta) = w_2(\xi, \eta) - w_1(\xi, \eta), \qquad (\xi, \eta) \in K + C, \qquad \xi^2 + \eta^2 \leqslant 1$$

$$H^*(\xi, \eta) = w_1(\xi, \eta) - w_2(\xi, \eta) - \frac{k}{4G}\left(\frac{1}{\alpha_*} - \frac{1}{\alpha_2}\right)(\xi^2 + \eta^2 - 1), \qquad \alpha_* < \alpha_1$$

Так как в круге K выполняются неравенства

$$A' > 0, \qquad B' > 0, \qquad A'C' - (B')^2 > 0$$

$$A'H_{\xi\xi} - 2B'H_{\xi\eta} + C'H_{\eta\eta} < 0, \qquad A'H_{\xi\xi}^* - 2B'H_{\xi\eta}^* + C'H_{\eta\eta}^* < 0$$

то функции $H(\xi, \eta)$ и $H^*(\xi, \eta)$ не могут достигать в K относительного минимума [22]. Поскольку $H(\xi, \eta)|_C = H^*(\xi, \eta)|_C = 0$, то $\partial H(1, \theta) / \partial r \leqslant 0$ и $\partial H^*(1, \theta) / \partial r \leqslant 0$. Отсюда следует справедливость неравенства 4.1, если взять значение α_*, мало отличающееся от значения α_1.

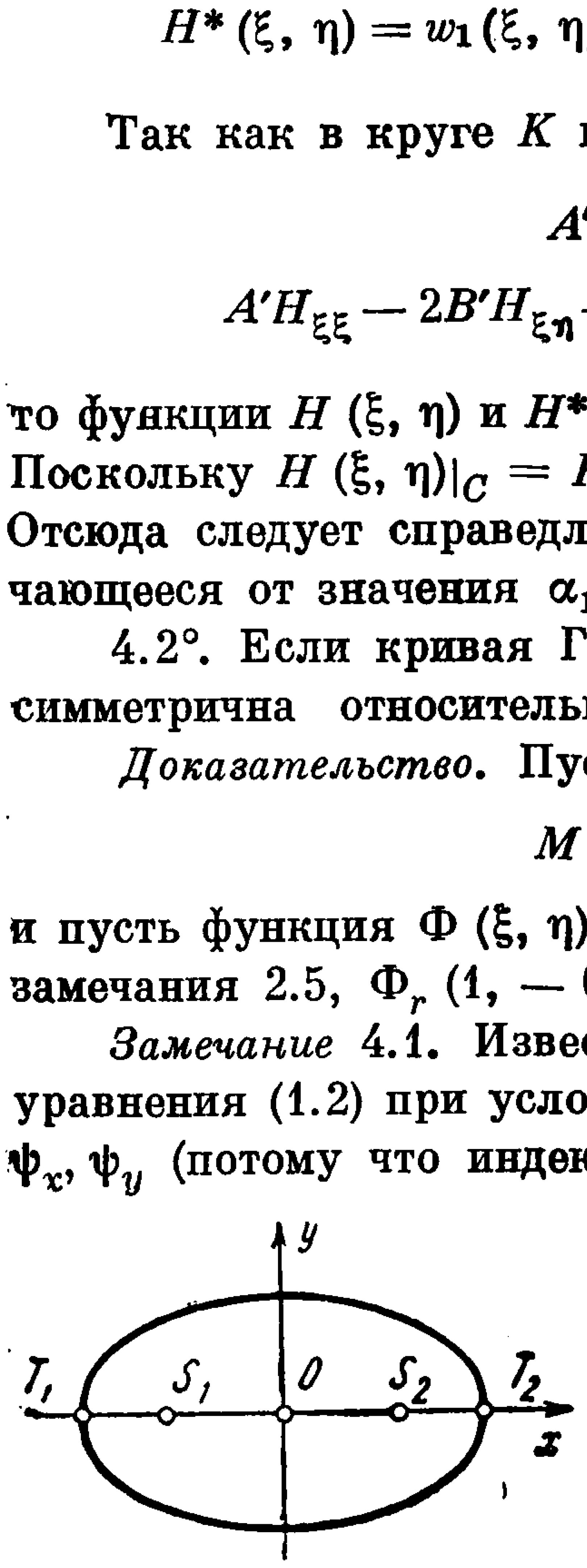
4.2°. Если кривая Γ симметрична относительно какой-либо оси, то и кривая L симметрична относительно той же оси.

Доказательство. Пусть Γ симметрична относительно оси x, т. е.

$$M(\theta + {}^1/_2\pi) = M(-\theta + {}^1/_2\pi)$$

и пусть функция $\Phi(\xi, \eta)$, $(\xi, \eta) \in K + C$, имеет тот же смысл, что и в § 3. В силу замечания 2.5, $\Phi_r(1, -\theta) = \Phi_r(1, \theta)$.

Замечание 4.1. Известно, что нельзя построить в $F+\Gamma$ непрерывное решение уравнения (1.2) при условии (1.3), которое имеет в $F+\Gamma$ непрерывные производные ψ_x, ψ_y (потому что индекс Γ относительно непрерывного в $F+\Gamma$ векторного поля $q = (\psi_x, \psi_y)$ равен единице [18]); однако такое построение будет возможно в $F+\Gamma - l$, где l — некоторое множество, принадлежащее F. Ограничимся рассмотрением некоторых контуров Γ, у которых l состоит из отрезков прямых, и докажем, что l при любом α принадлежит области D.



Фиг. 2

а) Кривая Γ симметрична и вытянута вдоль оси и имеет только четыре вершины (вершиной овала называется точка экстремальности кривизны. Всякий овал имеет по крайней мере, четыре вершины). В этом случае l представляет [24] отрезок оси x, соединяющий центры кривизн S_1, S_2 контура Γ в точках T_1 и T_2, лежащих на оси x (фиг. 2). В силу (3.9), одна из точек пересечения L оси x лежит между T_1 и S_1, другая—

между T_2 и S_2. Если L касается или пересекает отрезок S_1S_2, то, в силу 4.2°, область D не будет односвязна. Таким образом, l лежит внутри D.]

б) Γ_n выпуклая кривая, близкая к правильному n-угольнику и определяемая уравнением [25]

$$x = R\ [f \cos t + (n-1)^{-1} f^{1-n} \cos (n-1)\ t]$$
$$y = R\ [f \sin t - (n-1)^{-1} f^{1-n} \sin (n-1)\ t]$$
$$0 \leqslant t < 2\pi, \qquad f = (n-1)^{1/n} + \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0$$

В этом случае кривая l состоит из n отрезков, проведенных из точки пересечения всех осей симметрии Γ_n к центрам кривизн точек Γ_n, соответствующих $t = 2\pi i / n$ ($i = 0, 1 \ldots$ или $(n-1)$). В силу (3.9) и 4.2°, l лежит внутри L.

Поступила 17 I 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Сен-Венан Б. Дифференциальные уравнения внутренних движений в твердых телах, и граничные условия для этих тел. Некоторые приложения. Сб. «Теория пластичности» (под ред. Ю. Н. Работнова). Изд. иностр. лит, 1948.
2. Nadai A. Der Begin des Fliessvorganges in einem tordirten Stab. Z. angew. Math. und Mech., 1923, vol. 3.
3. Соколовский В. В. Об одной задаче упруго-пластического кручения. ПММ, 1942, т. 6, вып. 2—3.
4. Галин Л. А. Упруго-пластическое кручение призматических стержней. ПММ, 1944, т. 8, вып. 4.
5. Mises R. Three remarks on the theory of the ideal plastic body. Reissner Aniversary Volume. Ann. Arbor, Michigan, 1949.
6. Галин Л. А. Упруго-пластическое кручение призматических стержней. ПММ, 1949, т. 13, вып. 3.
7. Галин Л. А. О существовании решения упруго-пластической задачи кручения призматических стержней. ПММ, 1949, т. 13, вып. 6.
8. Trefftz E. Uber die Spannungsverteilung in tordierten Staben bei teilweiser uberschreitung der Fliessgrenze. Z. angew. Math. und Mech., 1925, vol. 5.
9. Christopherson D. G., Southwell R. V., Relaxation method appleid to engineering problems. Proc. Roy. Soc. A, 1938, vol. 168.
10. Булыгин В. Я. Об упруго-пластическом кручении призматических стержней. ПММ, 1952, т. 13, вып. 1.
11. Киселев Б. М. Решение краевых задач, описываемых уравнениями в частных производных смешанных типов. Тр. ЦАГИ, 1958, вып. 718.
12. Перлин П. И. Упруго-пластическое кручение стержней овального поперечного сечения. Инж. сб., 1961, т. 31.
13. Varlei E. Flows of dilatant fluids. Quart. Appl. Math., 1962, vol. 19, No. 3.
14. Чеботарев Н. Г. Собр. соч., т. II. Изд-во АН СССР, 1949.
15. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1952.
16. Бернштейн С. Н. Собр. соч., т. III. Изд-во АН СССР, 1961.
17. Валле-Пуссен Ш. Ж. Курс анализа бесконечно малых, т. II. Гостехиздат, 1933.
18. Левшиц С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. Изд. иностр. лит., 1961.
19. Трикоми Ф. Лекции но уравнениям в частных производных. Изд. иностр. лит., 1957.
20. Погорелов А. В. Об уравнениях Монжа — Ампера эллиптического типа. Изд. Харьк. ун-та, 1961.
21. Бакельман И. Я. Регулярные решения уравнений Монжа — Ампера. Докл. АН СССР, т. 1964, т. 157, № 2.
22. Миранда К. Уравнения в частных производных эллиптического типа. Изд. иностр. лит., 1957.
23. Xartman P., Wintner A. On pieces of convex surfaces, Amer. J. Math., 1953, vol. 75, No 3.
24. Соколовский В. В. Теория пластичности. Гостехиздат, 1950.
25. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.