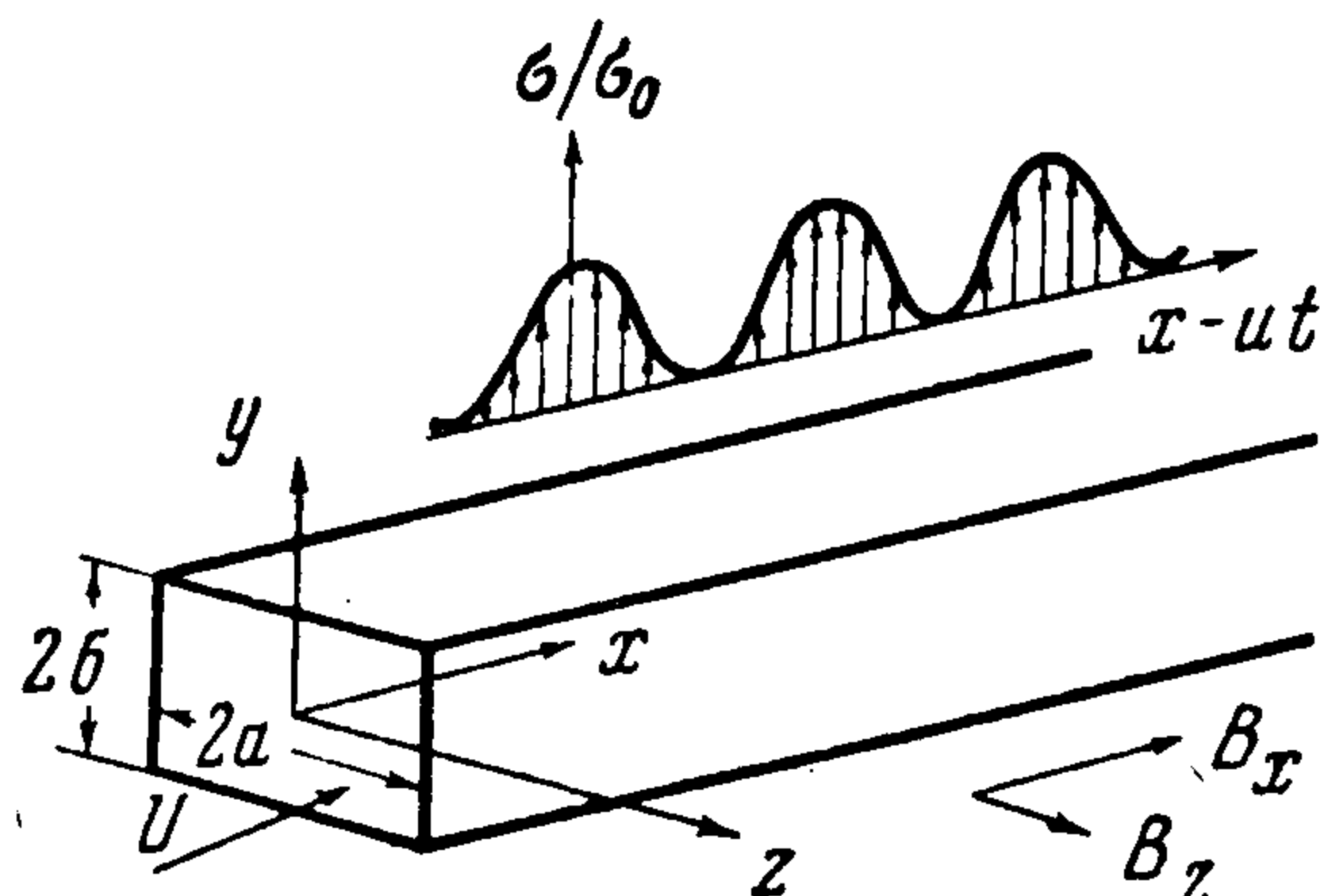


ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ КАНАЛЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ СРЕДЫ С ПЕРЕМЕННОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬЮ

С. А. Регирер, И. М. Руткевич
(Москва)

Общий метод приближенного расчета электрических полей [1] ранее широко применялся для решения различных стационарных задач, в частности, для задачи о плоском магнитогидродинамическом канале, по которому движется среда, обладающая переменной проводимостью вдоль канала [2]. Изменение электрических величин во времени рассматривалось аналогичными методами только в случае периодического изменения магнитного поля [3] или при произвольном законе движения среды [4]. В связи с некоторыми приложениями [5] представляет интерес исследование каналов, в которых непроводящий газ несет с собой отдельные проводящие сгустки. Ниже приводится решение одной из простых задач о распределении электрического поля в канале с учетом периодического изменения проводимости по времени и продольной координате.

1. Рассмотрим, основываясь на соображениях работы [1], движение изотропно проводящей среды в прямоугольном канале (фиг. 1), помещенном в магнитном поле. Предположим, что скорость потока $v = e_x U$ всюду постоянна, магнитное поле $\mathbf{B}(x, z) = e_x B_x + e_z B_z$ не зависит от времени, и проводимость среды есть периодическая функция времени t и координаты x , представимая в виде



Фиг. 1

(1.1)

$$\sigma = \sigma_0 \psi(x - Ut) = \sigma_0 \psi(x + \lambda - Ut)$$

Если магнитное число Рейнольдса R_m мало, а отношение поперечного размера канала к λ по порядку величины меньше

R_m^{-1} , то индуцированным магнитным полем и его производной по времени в законе Ома и уравнениях Максвелла можно пренебречь. Тогда электрическое поле будет квазистационарным и его потенциал ϕ будет зависеть от времени как от параметра.

Для осредненных по z потенциала ϕ и тока \mathbf{j} , считая стенки канала непроводящими, можем записать

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\psi'}{\psi} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad j_x = -\sigma \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad j_y = -\sigma \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{UB}{c} \right) \quad (1.2)$$

где $B = B_0 f(x)$ — среднее по z распределение z -компоненты магнитного поля. Будем предполагать далее, что $f(x)$ вместе со своими производными вплоть до второго порядка стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$.

Граничные условия для ϕ имеют вид

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{UB}{c} \quad \text{при } y = \pm \delta, \quad \nabla \phi \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

Введем вспомогательный потенциал $\Phi = \varphi + UBy / c$, удовлетворяющий неоднородному уравнению типа (1.2) и однородным граничным условиям. Выбирая в качестве масштабов длины, времени, потенциала и тока величины δ , λ / U , $UB_0\delta / c$, $\sigma_0 UB_0 / c$ соответственно, получим вместо (1.2), (1.3)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + F \frac{\partial \Phi}{\partial x} = (f'' + Ff')y, \quad j_x = -\psi \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad j_y = -\psi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = \pm 1, \quad \nabla \Phi \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

$$(\psi = \psi(\xi), \quad F = \psi' / \psi, \quad \xi = x - Vt, \quad V = \lambda / \delta)$$

Решение поставленной задачи будем искать в виде разложения

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x, t) \sin \alpha_k y, \quad \alpha_k = \pi(k - 1/2) \quad (1.6)$$

Обычным путем из (1.4) получаем

$$\Phi_k'' + F\Phi_k' - \alpha_k^2 \Phi_k = \omega_k (f'' + Ff'), \quad \omega_k = 2(-1)^{k+1} \alpha_k^{-2} \\ \Phi_k \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty \quad (1.7)$$

Решение задачи (1.7) может быть выражено при помощи табулированных функций лишь для отдельных частных случаев зависимости $\psi(\xi)$, один из которых рассматривается ниже.

2. Пусть проводимость среды определена формулой $\psi = \cos^2 \beta \xi$ и тогда $V = \pi / \beta$. Уравнение (1.7), принимающее вид

$$\Phi_k'' - 2\Phi_k' \beta \operatorname{tg} \beta \xi - \alpha_k^2 \Phi_k = \omega_k (f'' - 2f' \beta \operatorname{tg} \beta \xi) \quad (2.1)$$

имеет при $\alpha_k \neq \beta$ общее решение

$$\Phi_k = \frac{1}{\cos \beta \xi} \left\{ e^{\gamma_k \beta \xi} \left[C_k - \int_a^x \Omega_k(s, t) e^{-\gamma_k \beta \zeta} ds \right] + e^{-\gamma_k \beta \xi} \left[D_k + \int_b^x \Omega_k(s, t) e^{\gamma_k \beta \zeta} ds \right] \right\} \quad (2.2)$$

$$\Omega_k = -\frac{\omega_k}{2\gamma_k \beta} [f''(s) \cos \beta \zeta - 2f'(s) \beta \sin \beta \zeta] \quad (\zeta = s - Vt, \quad \gamma_k^2 = \alpha_k^2 \beta^{-2} - 1)$$

Легко видеть, что при $f' \neq 0$ и произвольном выборе постоянных C_k , D_k , a , b решение (2.2) не удовлетворяет условию $\Phi_k \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, так как оно имеет полюсы в точках $x_n = Vt + \pi(2n + 1) / 2\beta$ для всех значений $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ (за исключением, может быть, некоторых из этих значений). Таким образом, при $f \neq \text{const}$ не существует решения задачи (1.7), непрерывного и ограниченного при $x \in (-\infty, \infty)$, если $F(\xi) \sim \sim \operatorname{tg} \beta \xi$. Естественно предположить, что решение не будет существовать и при ином выборе $F(\xi)$, если $F(\xi)$ имеет в точках ξ_n особенности типа $(\xi - \xi_n)^{-1-\alpha}$, $\alpha > 0$.

С другой стороны, можно попытаться построить ограниченное, но разрывное решение задачи (1.7), рассматривая отдельно каждый интервал $[x_{n-1}, x_n]$ и выбирая для него свои значения констант C_k, D_k из условия ограниченности решения на концах интервала.

Пусть $x \in [x_{n-1}, x_n]$. Положим в (2.2) $a = x_n$, $b = x_{n-1}$ и введем обозначения

$$G_{nk}(x, t) = \int_{x_n}^x \Omega_k(s, t) e^{-\gamma_k \beta \zeta} ds, \quad H_{nk}(x, t) = \int_{x_{n-1}}^x \Omega_k(s, t) e^{\gamma_k \beta \zeta} ds \quad (2.3)$$

Функции G_{nk} , H_{nk} определены и непрерывны в интервале $[x_{n-1}, x_n]$. Представляя (2.2) в виде

$$\Phi_k = \frac{1}{\cos \beta \xi} [(C_{nk} - G_{nk}) e^{\gamma_k \beta \xi} + (D_{nk} + H_{nk}) e^{-\gamma_k \beta \xi}], \quad x \in [x_{n-1}, x_n] \quad (2.4)$$

потребуем, чтобы числитель обращался в нуль при $x = x_{n-1}$ и $x = x_n$. Нетрудно видеть, что для этого необходимо принять

$$\begin{aligned} C_{nk} &= -(2 \operatorname{sh} \pi \gamma_k)^{-1} [G_{nk}(x_{n-1}) e^{-\gamma_k \pi} + H_{nk}(x_n) e^{-2\gamma_k \pi n}] \\ D_{nk} &= (2 \operatorname{sh} \pi \gamma_k)^{-1} [G_{nk}(x_{n-1}) e^{2\gamma_k \pi n} + H_{nk}(x_n) e^{-\gamma_k \pi}] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Теперь $\Phi_k(x_{n-1})$, $\Phi_k(x_n)$ будут ограничены, так как и числитель и знаменатель (2.4) в этих точках имеют нули первого порядка. Вместе с тем, предельные значения $\Phi_k(x_n - 0)$ и $\Phi_k(x_n + 0)$ могут не совпадать, если не наложить специальных ограничений на распределение поля $f(s)$.

Покажем, что разрывное, в общем случае, решение (2.4), (2.5) удовлетворяет условиям при $|x| \rightarrow \infty$, которые для фиксированного значения времени t можно записать в виде

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \Phi_k \{x \in [x_{n-1}, x_n]\} = 0 \quad (2.6)$$

Действительно, из формул (2.3) следуют неравенства

$$|G_{nk}(x)| \leq \frac{|\omega_k| \pi}{2\gamma_k \beta^2} e^{-\gamma_k \beta \xi} (M_1 + 2\beta M_2), \quad |H_{nk}(x)| \leq \frac{|\omega_k| \pi}{2\gamma_k \beta^2} e^{\gamma_k \beta \xi} (M_1 + 2\beta M_2) \quad (2.7)$$

$$M_1 = \max |f''(s)|, \quad M_2 = \max |f'(s)|, \quad s \in [x_{n-1}, x_n]$$

Отсюда, принимая во внимание (2.5), получаем, что при $x \in [x_{n-1}, x_n]$ и $n \rightarrow \infty$ функция $|C_{nk} - G_{nk}(x)|$ стремится к нулю быстрее, чем $e^{-\gamma_k \beta x}$, а $|D_{nk} + H_{nk}(x)|$ ограничена или стремится к бесконечности не быстрее, чем $e^{-\gamma_k \beta x}$. Этот вывод основывается на предположении об убывании $M_{1,2}$ при $s \rightarrow \infty$, что оговорено в п. 1. Обращаясь далее к (2.4), видим, что оба слагаемых числителя стремятся при $n \rightarrow \infty$ к нулю как $M_1 + 2\beta M_2$. Поэтому и $\Phi_k \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, если $x \in (x_{n-1}, x_n)$. Убывание Φ_k на концах промежутков при $n \rightarrow \infty$ легко доказать, если вычислить сначала $\Phi_k(x_n \pm 0)$, применяя правило Лопиталья и соотношения (2.3), (2.5)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_n - 0} \Phi_k &= (-1)^n \gamma_k \{ [D_{nk} + H_{nk}(x_n)] e^{-\gamma_k \beta \xi_n} - C_{nk} e^{\gamma_k \beta \xi_n} \} \\ & \quad (\xi_n = x_n - Vt) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_n + 0} \Phi_k = (-1)^n \gamma_k \{ D_{n+1,k} e^{-\gamma_k \beta \xi_n} - [C_{n+1,k} - G_{nk}(x_n)] e^{\gamma_k \beta \xi_n} \}$$

Аналогичные рассуждения проводятся и при $n \rightarrow -\infty$. Таким образом, формулы (2.3), (2.5) определяют ограниченное решение задачи (1.7), которое удовлетворяет условиям на бесконечности и непрерывно в каждом интервале (x_{n-1}, x_n) .

Если рассматривать поведение Φ_k в фиксированной точке x , то непрерывному увеличению времени t будет соответствовать убывание целочисленного аргумента n (при записи в форме (2.4)). Интервал времени, в течение которого точка x принадлежит отрезку $[x_{s-1}, x_s]$, определяется неравенствами

$$\frac{1}{V} \left[x - \frac{\pi}{2\beta} (2s + 1) \right] \leq t \leq \frac{1}{V} \left[x - \frac{\pi}{2\beta} (2s - 1) \right]$$

и для этих t функция Φ_k задана формулой (2.4) при $n = s$. Для следующего отрезка $[x_{s-2}, x_{s-1}]$

$$\frac{1}{V} \left[x - \frac{\pi}{2\beta} (2s - 1) \right] \leq t \leq \frac{1}{V} \left[x - \frac{\pi}{2\beta} (2s - 3) \right]$$

и в (2.4) следует положить $n = s - 1$ и т. д. Если заданы x, t , то из этих неравенств определяется номер отрезка, которому точка x принадлежит в момент t . По истечении времени $T = \pi / \beta V = 1$ положение точки x по отношению к концам отрезка повторяется и, как показывают вычисления,

$$\Phi_k(x, t) |_{n=s} = \Phi_k(x, t + 1) |_{n=s-1}$$

Отсюда следует, что построенное решение для Φ_k и, очевидно, для Φ и φ периодически по времени.

В точках $x = x_n$ функции Φ_k претерпевают разрыв, причем величина скачка определяется согласно (2.5), (2.8) формулой

$$\begin{aligned} \{\Phi_k\}_{x=x_n} &= \Phi_k(x_n + 0) - \Phi_k(x_n - 0) = \\ &= \frac{2\gamma_k (-1)^n \pi^{\pi/\beta}}{\text{sh } \pi\gamma_k} \int_0^{\pi/\beta} [\Omega_k(x_n - \tau) + \Omega_k(x_n + \tau)] \text{sh } \gamma_k(\beta\tau - \pi) d\tau \end{aligned} \quad (2.9)$$

Соответственно скачок потенциала φ и компоненты электрического поля $E_y = -\partial\varphi/\partial y$, касательной к подвижной линии $x = x_n$, выражаются (в безразмерных величинах) формулами

$$\{\varphi\} = -y \{f\} + \sum_{k=1}^{\infty} \{\Phi_k\} \sin \alpha_k y, \quad \{E_y\} = \{f\} - \sum_{k=1}^{\infty} \{\Phi_k\} \alpha_k \cos \alpha_k y$$

Скачок магнитного поля $\{f\}$ в действительности не дает вклада в $\{\varphi\}$ и $\{E_y\}$: если выделить из $\{\Phi_k\}$ часть, связанную с разрывом $\{f\}$, то после вычислений формулы (2.10) принимают вид

$$\{\varphi\} = \sum_{k=1}^{\infty} \{\Phi_k\}^* \sin \alpha_k y, \quad \{E_y\} = - \sum_{k=1}^{\infty} \{\Phi_k\}^* \alpha_k \cos \alpha_k y \quad (2.11)$$

Здесь $\{\Phi_k\}^*$ означает результат подстановки в (2.10) только непрерывной части ¹ $f(x)$. Следовательно, $\{\varphi\}$ и $\{E_y\}$ обращаются в нуль вместе

¹ Если функция $f(x)$ представлена в виде

$$f(x) = f_0(x) + \sum a_i \eta(x - b_i), \quad a_i = \text{const}, \quad b_i = \text{const}$$

где η — единичная функция Хевисайда, $f_0(x)$ — непрерывная функция, то $f_0(x)$ называется непрерывной частью $f(x)$.

с $\{\Phi_k\}$ *. Достаточным для этого условием является, например, непрерывность и четность по τ функции $f(x_n + \tau)$ при $\tau \in [-\pi/\beta, \pi/\beta]$, так как тогда $\Omega_k(x_n + \tau)$ в этом интервале нечетна по τ .

Непосредственное вычисление показывает далее, что

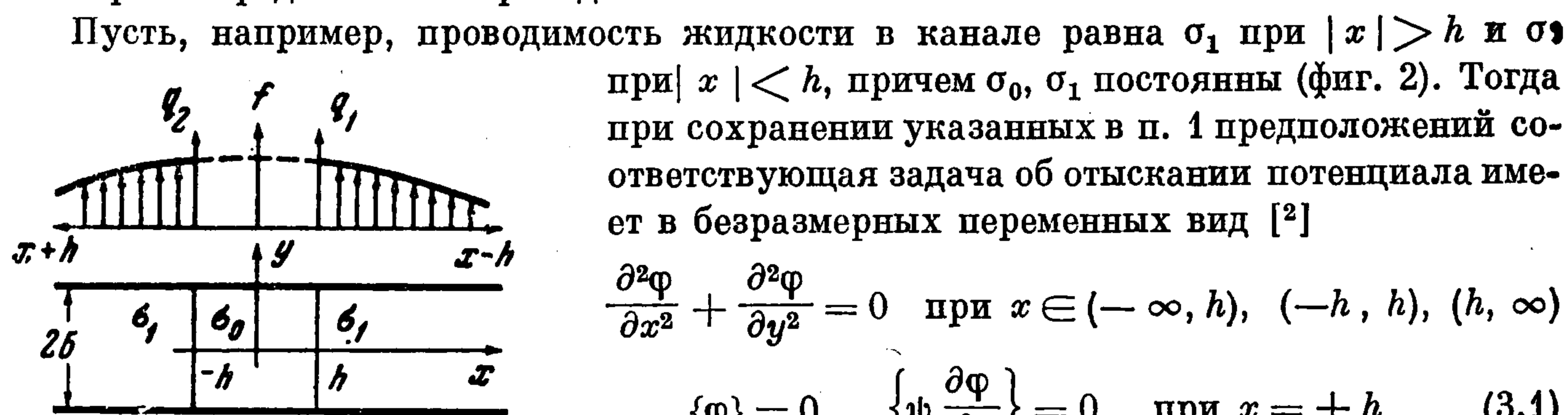
$$\lim_{x \rightarrow x_n \pm 0} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} = \omega_k f'(x_n \pm 0), \quad \lim_{x \rightarrow x_n \pm 0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (2.12)$$

т. е. $\partial \Phi / \partial x$ непрерывна в точках $x = x_n$. Конечными оказываются и все последующие производные по x .

Таким образом, построенное решение аналогично потенциалу двойного слоя на линиях $x = x_n$: нормальная производная на них конечна и непрерывна, а сам потенциал и касательная производная терпят разрыв.

3. Появление разрыва касательной составляющей электрического поля может на первый взгляд, показаться парадоксальным и противоречащим обычным представлениям электродинамики о непрерывности E_τ на границах раздела сред¹.

В действительности этот эффект связан с допущением о существовании бесконечно тонких слоев с отличным от нуля электрическим сопротивлением. Целесообразно поэтому рассмотреть простую модель, позволяющую изучить разрыв E_τ как результат некоторого предельного перехода.



Фиг. 2

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } x \in (-\infty, h), (-h, h), (h, \infty)$$

$$\{\Phi\} = 0, \quad \left\{ \psi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\} = 0 \quad \text{при } x = \pm h \quad (3.1)$$

$$\nabla \Phi \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -f(x) \quad \text{при } y = \pm 1$$

Решение этой задачи представляется рядами

$$\Phi = -yf(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(x) \sin \alpha_k y$$

$$\Psi_k = \begin{cases} \Psi_{1k} = C_{1k} e^{\alpha_k x} + L_k(x, -\infty) & \text{при } x \in (-\infty, h) \\ \Psi_{2k} = C_{2k} e^{\alpha_k x} + D_{2k} e^{-\alpha_k x} + L_k(x, 0) & \text{при } x \in (-h, h) \\ \Psi_{3k} = D_{3k} e^{-\alpha_k x} + L_k(x, \infty) & \text{при } x \in (h, \infty) \end{cases}$$

$$L_k(x, a) = \frac{\omega_k}{2\alpha_k} \left[e^{\alpha_k x} \int_a^x e^{-\alpha_k s} f''(s) ds - e^{-\alpha_k x} \int_a^x e^{-\alpha_k s} f''(s) ds \right]$$

Постоянные C_{ik} , D_{ik} определяются весьма громоздкими формулами, которые здесь не приводятся, за исключением одной ($\epsilon = \sigma_0 / \sigma_1$)

$$C_{2k} - D_{2k} = [2\alpha_k (\text{sh } \alpha_k h + \epsilon \text{ch } \alpha_k h)^{-1}] \times$$

$$\times \{ \alpha_k [L_k(h, \infty) - L_k(-h, -\infty) - L_k(h, 0) + L_k(-h, 0)] + \quad (3.2)$$

$$+ (\epsilon - 1) [f'(h) + f'(-h)] + L_k'(h, \infty) + L_k'(-h, -\infty) - \epsilon [L_k'(h, 0) + L_k'(-h, 0)] \}$$

¹ Можно указать и другие задачи, где это условие не выполняется. Например, при рассмотрении электрического поля в канале с диэлектрическими перегородками [6] обнаруживается разрыв E_τ вдоль перегородок.

позволяющей найти величины ¹

$$V_k = \Psi_k(h) - \Psi_k(-h) = 2 \operatorname{sh} \alpha_k h (C_{2k} - D_{2k}) + L_k(h, 0) - L_k(-h, 0) \\ \left. \frac{\partial \Psi_k}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha_k (C_{2k} - D_{2k}) \quad (3.3)$$

Предположим, что $\varepsilon \ll 1$ и $h \ll 1$. Тогда

$$V_k \approx -\frac{\alpha_k^2 h \omega_k}{\alpha_k h + \varepsilon} \left(\int_{-\infty}^0 e^{-\alpha_k s} f(s) ds + \int_0^{\infty} e^{\alpha_k s} f(s) ds \right) + O(h^2), \quad \left. \frac{\partial \Psi_k}{\partial x} \right|_{x=0} \approx \frac{V_k}{h} \quad (3.4)$$

Отношение $h/\varepsilon = R$ характеризует электрическое сопротивление слоя $(-h, h)$. Если при $h \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ сопротивление R бесконечно возрастает или стремится к отличному от нуля пределу, то $\lim V_k$ конечен и отличен от нуля (обращение в нуль возможно за счет специального выбора $f(s)$), а $(\partial \Psi_k / \partial x)_{x=0} \rightarrow \infty$. Если же $R \rightarrow 0$, то $V_k \rightarrow 0$, а поведение $(\partial \Psi_k / \partial x)_{x=0}$ при этом может быть различным. Заметим также, что при $R \rightarrow \operatorname{const} \geq 0$ ток j_x в сечении $x = 0$ также стремится к постоянному значению, которое убывает до нуля с ростом предельного R .

Таким образом, разрыву Ψ_k на некоторой линии (т. е. разрыву потенциала φ) соответствует бесконечный рост нормальной производной $\partial \varphi / \partial x$ во внутренних точках узкого слоя с малой проводимостью, стягиваемого в линию разрыва.

Условие непрерывности E_τ в общей теории выводится в предположении ограниченности E_n . Из приведенного примера следует, что это предположение может не выполняться, и тогда существует разрыв E_τ . Бесконечное возрастание E_n при этом может, как например в п. 2, явно в задаче не фигурировать, так как решение для бесконечно тонкого слоя с малой проводимостью не рассматривается.

Формула (3.3) при $\varepsilon = 0$ принимает вид

$$V_k = -\alpha_k \omega_k \left[\int_{-\infty}^h e^{\alpha_k(h-s)} f(s) ds + \int_{-\infty}^{-h} e^{\alpha_k(h+s)} f(s) ds \right] \quad (3.5)$$

Пусть распределение магнитного поля при $x > h$ и $x < -h$ определяется только расстоянием до точек $\pm h$ соответственно, т. е.

$$f(x) = \begin{cases} q_1(x-h) & \text{при } x \geq h \\ q_2(x+h) & \text{при } x \leq -h \end{cases}$$

Тогда из (3.5) получаем выражение

$$V_k = -\alpha_k \omega_k \left[\int_{-\infty}^0 e^{-\alpha_k s} q_1(s) ds + \int_{-\infty}^0 e^{\alpha_k s} q_2(s) ds \right] \quad (3.6)$$

не зависящее от h и совпадающее с главной частью (3.4) при $\varepsilon \ll h$. Эта формула выражает естественный, с физической точки зрения, факт существования разности потенциалов между точками двух произвольно отстоящих друг от друга не взаимодействующих областей, в каждой из которых потенциал определяется «своим» магнитным полем.

Решение, построенное в п. 2, в окрестности точек $x = x_n$ может рассматриваться как результат предельного перехода типа $R \rightarrow \infty$. Действительно, безразмерное сопротивление слоя $(x_n - h, x_n + h)$

$$R = \int_{x_n-h}^{x_n+h} \psi^{-1} dx$$

при конечных h и $\psi = \cos^2 \beta \xi$ бесконечно велико из-за расходимости интеграла.

¹ В (3.2) и далее в п. 3 предполагается, что функция $f(x)$ непрерывна на всей оси.

По этому следует считать, что решение п. 2 приближенно соответствует распределению проводимости

$$\psi = \begin{cases} \cos^2 \beta \xi & \text{при } x \in [x_n + h, x_{n+1} - h] \\ \varepsilon & \text{при } x \in [x_n - h, x_n + h] \end{cases}$$

и дает значения потенциала в областях $[x_n + h, x_{n+1} - h]$.

4. Рассмотрим в заключение пример использования формул п. 2. Предположим, что магнитное поле задано в виде ступенчатой функции

$$f(x) = \eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, & f'(x) = \delta(x) \\ 1 & \text{при } x > 0, & f''(x) = \delta'(x) \end{cases} \quad (4.1)$$

Пусть при изменении времени t в пределах от $-1/2$ до $+1/2$ точка разрыва поля $x = 0$ принадлежит отрезку $[x_{-1}, x_0]$. Положение концов отрезка определяется при этом равенствами

$$x_{-1} = Vt - \frac{\pi}{2\beta}, \quad x_0 = Vt + \frac{\pi}{2\beta}$$

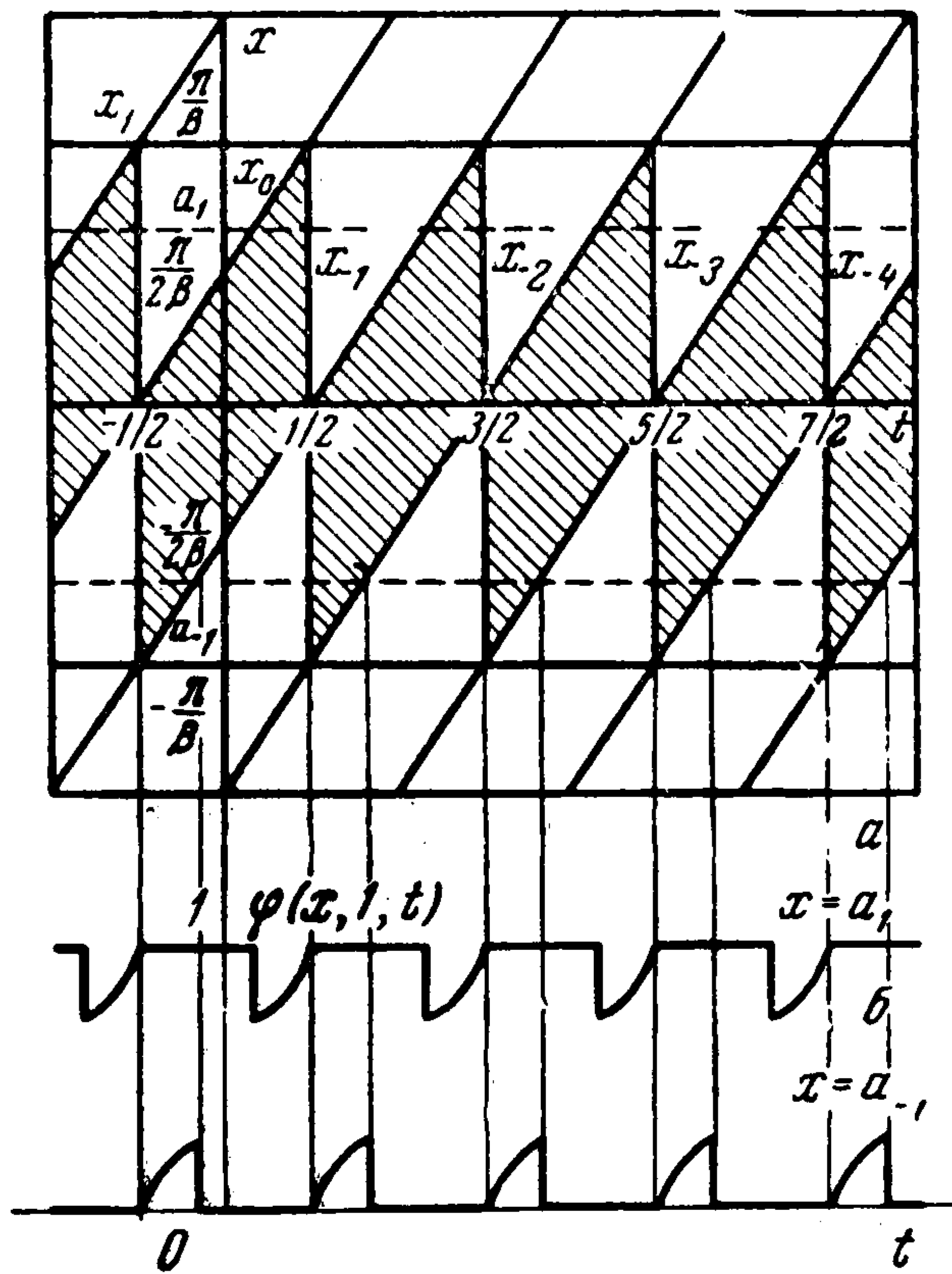
Вычисления по формулам п. 2 приводят к следующим выражениям для Φ_k при $|t| < 1/2$:

$$\Phi_k = \begin{cases} 0 & \text{при } x > x_0 \text{ и } x < x_{-1} \\ K^- [\gamma_k \cos \pi t \operatorname{ch} \gamma_k (\pi t + 1/2\pi) + \sin \pi t \operatorname{sh} \gamma_k (\pi t + 1/2\pi)] & \text{при } x_{-1} < x < 0 \\ K^+ [\gamma_k \cos \pi t \operatorname{ch} \gamma_k (\pi t - 1/2\pi) + \sin \pi t \operatorname{sh} \gamma_k (\pi t - 1/2\pi)] & \text{при } 0 < x < x_0 \end{cases}$$

$$K^\pm = \frac{\omega_k}{\gamma_k \operatorname{sh} \pi \gamma_k \cos \beta \xi} \operatorname{sh} \gamma_k \left(\pi t \pm \frac{\pi}{2} - \beta x \right) \quad (4.2)$$

Истинный потенциал φ тождественно равен нулю при $x < -\pi/\beta$ и y — при $x > \pi/\beta$ во все моменты времени.

Смысл этого результата очевиден: для всех значений t при $x < -\pi/\beta$ магнитогидродинамического взаимодействия нет, а при $x > \pi/\beta$ отсутствуют токи и происходит лишь разделение заряда. Токи могут существовать только внутри того единственного отрезка, которому в данный момент принадлежит точка $x = 0$, где включается поле. Картина течения токов качественно не отличается от случая постоянной проводимости, т. е. токи при $x > 0$ в среднем направлены против электрического поля, а при $x < 0$ — по полю, образуя замкнутые петли.



Фиг. 3

На фиг. 3, а, в плоскости $x t$ показана область (последовательность параллелограммов), в которой φ периодически изменяется по t для каждого x . Соответствующие кривые схематически изображены на фиг. 3, б.

Заметим, что φ изменяется непрерывно при переходе через вертикальные стороны параллелограммов и обращается в этих точках в нуль, а на наклонных сторонах φ терпит разрыв.

Вычислим теперь джоулеву диссипацию в таком течении.

Очевидно, что из общей формулы

$$Q = \frac{U^2 B_0^2 \delta^2 \sigma_0}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1}^1 \frac{j^2}{\psi} dx dy \quad (4.3)$$

как и при $\psi = \text{const}$, следует

$$Q = \frac{U^2 B_0^2 \delta^2 \sigma_0}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1}^1 j_y f dx dy$$

Принимая во внимание (1.4), (1.6), (4.1) и (4.2); можно далее записать

$$Q = \frac{2U^2 B_0^2 \delta^2 \sigma_0}{c^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \int_0^{x_0} \psi(\xi) \Phi_k(x, t) dx \quad (4.4)$$

Отсюда, подставляя выражение (4.2) для Φ_k , получим

$$Q = \frac{U^2 B_0^2 \delta^2 \sigma_0 \beta}{c^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k(t)}{\alpha_k^4 \gamma_k \text{sh } \pi \gamma_k}, \quad |t| < 1/2 \quad (4.5)$$

$$q_k(t) = (\gamma_k^2 - 1) (\cos 2\pi t \text{ ch } 2\gamma_k \pi t + \text{ch } \pi \gamma_k) + \\ + (\gamma_k^2 + 1) (\cos 2\pi t \text{ ch } \pi \gamma_k + \text{ch } 2\gamma_k \pi t) + 2\gamma_k \sin 2\pi t \text{ sh } 2\gamma_k \pi t$$

Если перейти здесь к размерному времени $\pi \delta t / \beta U$ и затем положить $\beta \rightarrow 0$, то в пределе получится известный результат для потока с постоянной проводимостью [2]

$$Q = \frac{16U^2 B_0^2 \delta^2 \sigma_0}{\pi^3 c^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \quad (4.6)$$

Этот предельный переход справедлив только для $|t| < 1/2$, ибо $q_k(\pm 1/2) = 0$. Средняя за период величина диссипации

$$Q^* = \int_{-1/2}^{1/2} Q dt = \frac{U^2 B_0^2 \delta^2 \sigma_0 \beta}{c^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k^*}{\alpha_k^4 \gamma_k \text{sh } \pi \gamma_k} \\ q_k^* = \frac{5\gamma_k^2 + 1}{\gamma_k^2 + 1} \frac{\text{sh } \pi \gamma_k}{\pi \gamma_k} + (\gamma_k^2 - 1) \text{ch } \pi \gamma_k \quad (4.7)$$

из-за наличия зон с малой проводимостью при $\beta \rightarrow 0$ стремится к величине, вдвое меньшей, чем (4.6).

В другом предельном случае, при очень больших значениях β , справедлива асимптотическая формула

$$Q^* \sim \frac{U^2 B_0^2 \delta^2 \sigma_0}{3\pi^4 c^2 \beta} (4\pi^2 - 15) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \quad (4.8)$$

Убывание Q^* с ростом β имеет очевидный физический смысл, так как при этом область, в которой текут токи, сокращается пропорционально $1/\beta$, а величина токов остается ограниченной.

Заметим, что среднее по всему каналу значение проводимости $\sigma_m = 1/2\sigma_0$ для всех $\beta \neq 0$ и во все моменты времени. Величина диссипации в канале Q_1 , вычисленная по теории с постоянной проводимостью, определяется поэтому формулой (4.6), где σ_0 нужно заменить на σ_m . Легко видеть, что в общем случае $Q_1(\sigma_m) \neq Q^*(\beta)$, причем разница между этими величинами становится особенно существенной при $\beta \gg 1$, когда, согласно (4.8), величина $Q^*(\beta)$ весьма мала.

Результаты, полученные в п. 2.4, могут быть обобщены на случай более сложного закона изменения проводимости

$$\sigma = \sigma_{0k} \cos^2 \beta_k (x - Ut) \quad \text{при } x - Ut \in [\xi_{k-1}, \xi_k] \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

где σ_{0k} , ξ_k и $\beta_k \geq 0$ — произвольные числа. Если при этом в интервалах $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ величина $\cos \beta_k \xi$ не обращается в нуль, то возможно построение непрерывного решения.

Поступила 27 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. В а т а ж и н А. Б., Р е г и р е р С. А. Приближенный расчет распределения тока при течении проводящей жидкости по каналу в магнитном поле. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3, стр. 548—556.
2. В а т а ж и н А. Б. Некоторые двумерные задачи о распределении тока в электропроводной среде, движущейся по каналу в магнитном поле. ПМТФ, 1963, № 2, стр. 39—54.
3. К о р с у н с к и й Л. М. Электромагнитные гидрометрические приборы. Изд-во Гос. ком. стандартов, мер и измер. приб., 1964.
4. Я к у б е н к о А. Е. II Всес. съезд по механике. Аннотации докл., Изд-во «Наука», 1964, стр. 239.
5. F r a i d e n g r a i c h N., M c G r a t h I. A., M e d i n S. A., T h r i n g M. W. A theoretical analysis of the thermodynamics of the striated magnetohydrodynamic system. Brit. J. Appl. Phys., 1964, vol. 15, No. 1, p. 13—27.
6. В а т а ж и н А. Б., Н е м к о в а Н. Г. Некоторые двумерные задачи о распределении электрического тока в канале магнитогидродинамического генератора с непроводящими перегородками. ПМТФ, 1964, № 2, стр. 40—49.