

ПЛОСКИЙ ОКОЛОЗВУКОВОЙ ПОТОК ГАЗА ВДАЛИ ОТ ПРОФИЛЯ, НАХОДЯЩЕГОСЯ В КАНАЛЕ

Г. Д. Севостьянов
(Саратов)

В работе построена особенность плоского околозвукового течения газа вдали от симметричного профиля, помещенного под нулевым углом атаки вдоль оси канала с параллельными стенками. Указанная особенность функции тока $\psi(\theta, \eta)$, удовлетворяющей уравнению Трикоми, построена на плоскости θ, η методом сингулярных интегральных уравнений. Показано, что при неограниченном расширении канала, сохранении режима «запирания» и выполнении некоторого условия эта особенность переходит в особенность плоского безграничного звукового потока, найденную Ф. И. Франклем [1] и Гудерлеем.

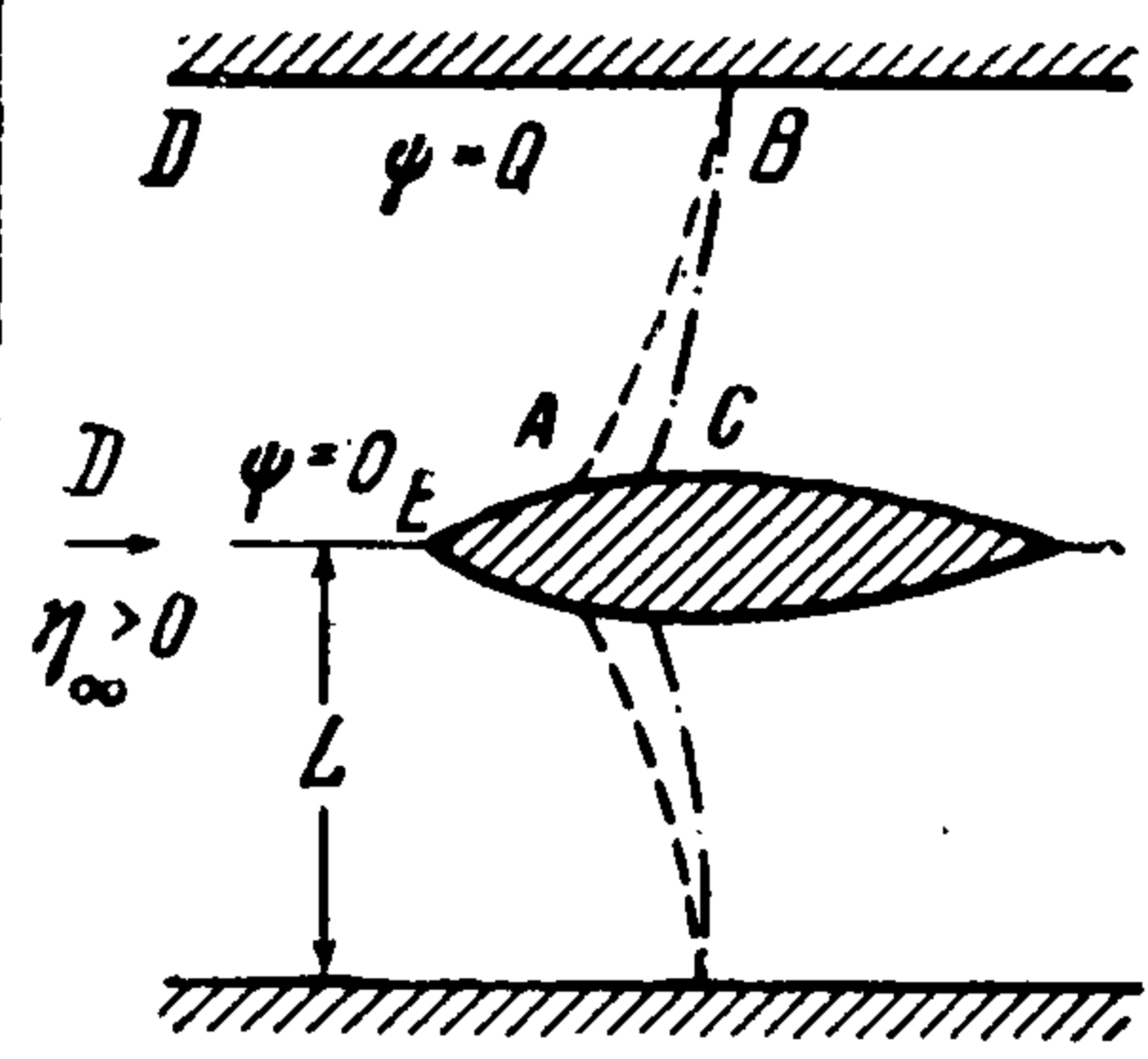
1. Рассмотрим обтекание тонкого симметричного выпуклого профиля, помещенного под нулевым углом атаки вдоль оси канала с [параллельными стенками ширины $2L$, плоским околозвуковым потоком газа при режиме «запирания» канала, когда между профилем и стенками возникает звуковая линия AB (фиг. 1).

Пусть функция тока $\psi(\theta, \eta)$ удовлетворяет уравнению Трикоми

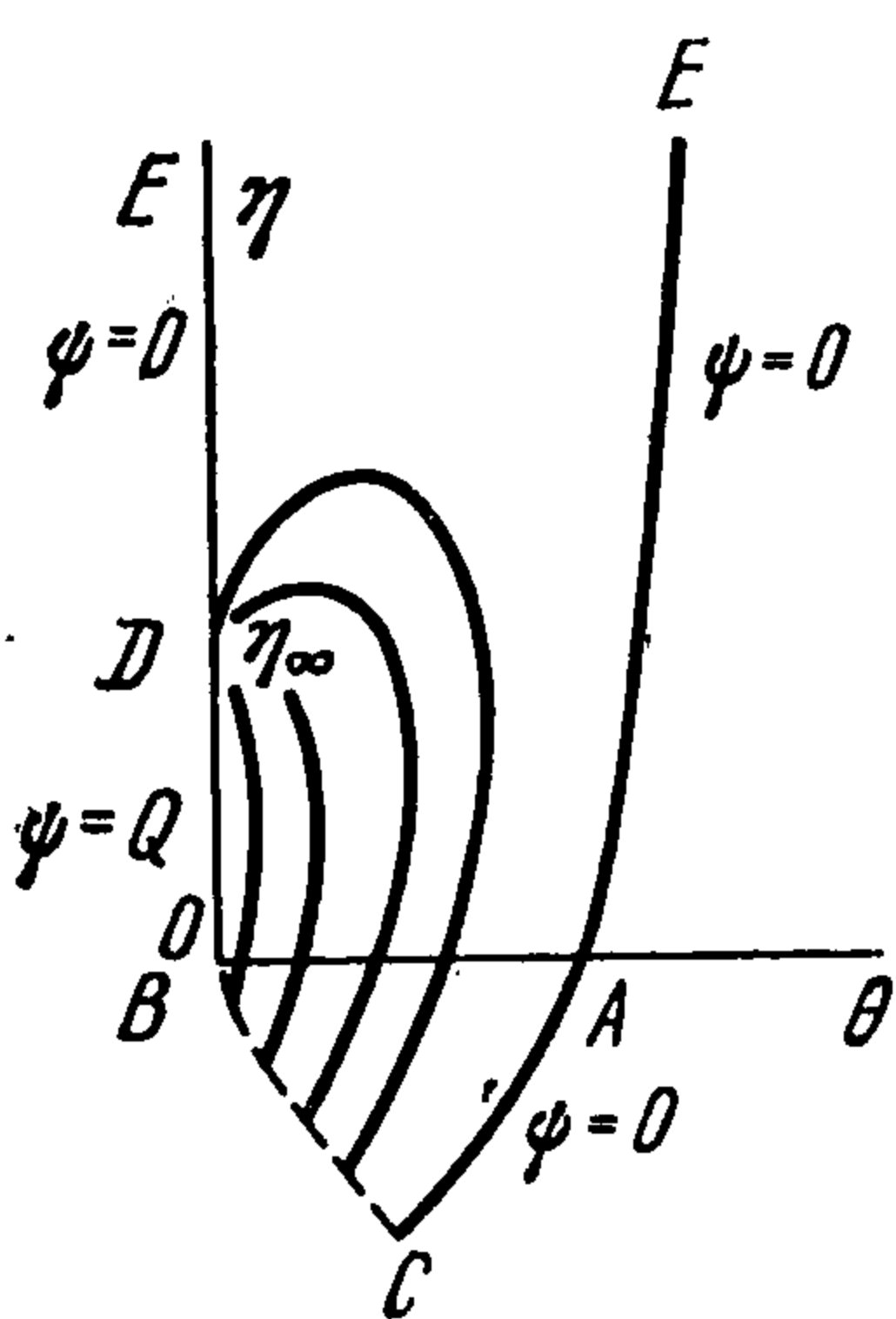
$$\eta\psi_{\theta\theta} + \psi_{\eta\eta} = 0 \quad (1.1)$$

принимает значения $\psi = 0$ на оси DE и границе профиля, $\psi = Q$ — на стенке канала DB . Здесь θ — угол наклона вектора скорости к оси канала, η — известная функция модуля скорости, $2Q$ — расход газа в канале.

Далеко перед профилем поток близок к однородному дозвуковому потоку ($\eta_\infty > 0$), за звуковой линией AB течение становится сверхзвуковым. В силу симметрии картины ограничимся изучением потока выше оси DE до предельной характеристики BC . Область течения $DEACBD$ перейдет на плоскости $\theta\eta$ в некоторую область (фиг. 2), при этом точка торможения потока E перейдет в бесконечность плоскости $\theta\eta$. Кривая CAE на фиг. 2, соответствующая границе профиля, обычно неизвестна. При достаточно большой ширине $2L$ канала влияние формы профиля на дозвуковой поток газа вдали от профиля будет незначительным. Область течения газа вдали от профиля (где $\theta \approx 0$) будет отображаться в окрестность оси η (BDE) на фиг. 2; функция $\psi(\theta, \eta)$ при $\theta \approx 0$ будет слабо зависеть от формы кривой EAC при неизменности Q и η_∞ . Целью дальнейшего будет получение функции $\psi(\theta, \eta)$, описывающей



Фиг. 1



Фиг. 2

при $\theta \rightarrow \infty$, что следует из (2.2) и (2.3). Нетрудно проверить, что функция $\psi(\theta, \eta)$ из (2.5) удовлетворяет условиям (2.1) и (2.3). Условие (2.4) на характеристике $C'A'$ эквивалентно интегральному соотношению ([5], стр. 381)

$$\tau(\theta) = \gamma \int_0^{\infty} \frac{v(s) ds}{(s-\theta)^{1/3}} \quad (0 < \theta < \infty) \quad (2.8)$$

где использованы обозначения (1.3); постоянная γ определена в (2.7).

Второе интегральное соотношение между функциями $\tau(\theta)$ и $v(\theta)$ получим из формул (2.5) — (2.7)

$$\tau(\theta) = \tau_1(\theta) - \gamma \int_0^{\infty} v(s) \{|\theta - s|^{-1/3} - (\theta + s)^{-1/3}\} ds \quad (0 < \theta < \infty) \quad (2.9)$$

Здесь $\tau_1(\theta) = \psi_1(\theta, 0)$. Исключая из (2.8) и (2.9) величину $\tau(\theta)$, получим интегральное уравнение для определения функции $v(\theta)$, которое после некоторых преобразований [6] примет вид

$$v(\theta) - \frac{1}{\pi \sqrt{3}} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{s-\theta} + \frac{1}{s+\theta} \right) v(s) ds = F(\theta) \quad (0 < \theta < \infty) \quad (2.10)$$

$$\text{Здесь} \quad F(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{3} \pi \gamma} \int_0^{\infty} \frac{\tau_1'(s) ds}{(s-\theta)^{2/3}}, \quad \tau_1'(\theta) = \frac{d}{d\theta} \psi_1(\theta, 0) \quad (2.11)$$

Сингулярное интегральное уравнение (2.10) имеет автоморфное ядро и заменой $\theta^2 = x$, $s^2 = y$ легко сводится к характеристическому интегральному уравнению. Решение уравнения (2.10) записывается в замкнутом виде ([6], § 47). Так как искомая функция $v(\theta)$ удовлетворяет условиям, перечисленным после формулы (2.7), то в (2.10) индекс уравнения $k = 0$: поэтому в указанном классе уравнение (2.10) имеет единственное решение, если функция $F(\theta)$ удовлетворяет некоторым условиям гладкости ([6], § 47).

Каноническая функция уравнения (2.10) в данном классе равна $Z(\theta) = \theta^{-1/3}$, а решение имеет вид

$$v(\theta) = \frac{3}{4} \left[F(\theta) + \frac{1}{\pi \sqrt{3}} \int_0^{\infty} \left(\frac{s}{\theta} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{s-\theta} + \frac{1}{s+\theta} \right) F(s) ds \right] = R[F(\theta)] \quad (0 < \theta < \infty) \quad (2.12)$$

Найденная функция $v(\theta)$ определяет решение $\psi(\theta, \eta)$ задачи Трикоми. Остается вычислить встречающиеся интегралы и проверить выполнение условия (2.2). Функции $\tau_1(\theta) = \psi_1(\theta, 0)$ и $\tau_1'(\theta) = d\psi_1(\theta, 0) / d\theta$ определяем из (2.6)

$$\tau_1(\theta) = Q t_{\infty}^{2/3} \frac{2^{1/3}}{\Gamma(2/3)} \int_0^{\infty} \lambda^{-1/3} e^{-\lambda \theta} J_{2/3}(t_{\infty} \lambda) d\lambda = \frac{Q}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \gamma \left(\frac{t_{\infty}^2}{t_{\infty}^2 + \theta^2} \right)^{2/3} \times \\ \times F\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}; \frac{5}{3}; \frac{t_{\infty}^2}{t_{\infty}^2 + \theta^2} \right) \quad (2.13)$$

$$\tau_1'(\theta) = -Q t_{\infty}^{2/3} \frac{2^{1/3}}{\Gamma(2/3)} \int_0^{\infty} \lambda^{2/3} e^{-\lambda \theta} J_{2/3}(t_{\infty} \lambda) d\lambda = -Q \left(\frac{2}{3} \right)^{2/3} \gamma \frac{t_{\infty}^{4/3}}{(\theta^2 + t_{\infty}^2)^{1/3}}$$

Гипергеометрический ряд в (2.13) сходится абсолютно при всех действительных значениях параметров.

При $\theta \rightarrow 0$ получим $\tau_1(\theta) = Q + O(\theta)$. Подставив интеграл для $\tau_1'(\theta)$ из (2.13) в (2.11) и сменив порядок интегрирования, найдем

$$F(\theta) = \frac{Qt_\infty^{2/3}2^{1/3}\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\pi\Gamma(2/3)} \int_0^\infty \lambda^{1/3} e^{-\lambda\theta} J_{2/3}(t_\infty\lambda) d\lambda = \\ = \frac{3^{5/6}}{\pi 2^{4/3}} \frac{Q}{t_\infty^{2/3}} \frac{t_\infty^2}{\theta^2 + t_\infty^2} F\left(1, \frac{1}{6}; \frac{5}{3}; \frac{t_\infty^2}{\theta^2 + t_\infty^2}\right) \quad (2.14)$$

где гипергеометрический ряд сходится абсолютно при всех действительных значениях параметров. Подставив ряд для $F(\theta)$

$$F(\theta) = \frac{3^{5/6}Q}{\pi 2^{4/3} t_\infty^{2/3}} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(n+1/6)\Gamma(5/3)}{\Gamma(1/6)\Gamma(n+5/3)} t_\infty^{2n+2} (\theta^2 + t_\infty^2)^{-n-1} \quad (2.15)$$

в формулу (2.12), найдем $v(\theta)$. При этом необходимо вычислить функцию $R[(\theta^2 + t_\infty^2)^{-n-1}]$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где линейный оператор R определен в (2.12). После небольшого преобразования получим

$$R[(\theta^2 + t_\infty^2)^{-n-1}] = \frac{3}{4} \left[(\theta^2 + t_\infty^2)^{-n-1} + \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \theta^{-1/3} \int_0^\infty \frac{s^{1/6}(s+t_\infty^2)^{-n-1}}{s-\theta^2} ds \right] \quad (2.16)$$

Входящий сюда сингулярный интеграл вычисляется¹

$$\int_0^\infty \frac{s^{1/6}(s+t_\infty^2)^{-n-1}}{s-\theta^2} ds = -\pi\sqrt{3}\theta^{1/3}(\theta^2+t_\infty^2)^{-n-1} - \\ - \frac{t_\infty^{1/6-2n}}{(t_\infty^2+\theta^2)} B\left(n-\frac{1}{6}, \frac{7}{6}\right) F\left(-n, 1; -n+\frac{7}{6}; \frac{t_\infty^2}{\theta^2+t_\infty^2}\right) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

Тогда в (2.16) уничтожатся некоторые члены и из (2.15) и (2.12) определим функцию $v(\theta)$:

$$v(\theta) = \theta^{-1/3} \frac{3(3/2)^{1/3}}{4\pi} \frac{Qt_\infty^{5/3}}{t_\infty^2 + \theta^2} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(n+1/6)\Gamma(n-1/6)\Gamma(5/3)}{\Gamma(1/6)\Gamma(-1/6)\Gamma(n+5/3)\Gamma(n+1)} \times \\ \times F\left(-n, 1; -n+\frac{7}{6}; \frac{t_\infty^2}{t_\infty^2 + \theta^2}\right) \quad (2.17)$$

Здесь использованы формулы преобразования гамма-функции

$$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Ряд (2.17) сходится абсолютно, что следует из представления $v(\theta)$ в виде (2.12), (2.14), поэтому, перегруппировав в нем члены по возрастающим степеням аргумента полиномов, получим:

$$v(\theta) = \theta^{-1/3} \frac{Qt_\infty^{5/3}}{t_\infty^2 + \theta^2} \frac{4(2)^{1/3}}{5\pi(3)^{1/6}} F\left(\frac{11}{6}, 1; \frac{11}{6}; \frac{t_\infty^2}{t_\infty^2 + \theta^2}\right) \quad (2.18)$$

¹ В формуле 3.228.5 из [7] при $c > 0$ пропущен множитель π перед всеми членами (см., например, формулу 3.222.2 из [7] при $a < 0$ и первоисточник).

Дифференцируя (2.9) по θ и исключив $v(\theta)$ при помощи (2.8), для производной $\tau'(\theta)$ приходим [5] к сингулярному уравнению

$$\tau'(\theta) - \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_0^{\infty} \left(\frac{s}{\theta}\right)^{1/3} \left(\frac{1}{s-\theta} + \frac{1}{s+\theta}\right) \tau'(s) ds = \frac{2}{3} \tau_1'(\theta) \quad (0 < \theta < \infty)$$

С учетом (1.2), (2.3), (2.10), (2.12) и (2.13) его решение имеет вид

$$\tau'(\theta) = -\theta^{-2/3} \frac{Qt_{\infty}^{5/3}}{\theta^2 + t_{\infty}^2} \frac{2^{4/3}}{\sqrt{3}\pi} F\left(-\frac{1}{6}, 1; \frac{7}{6}; \frac{t_{\infty}^2}{t_{\infty}^2 + \theta^2}\right)$$

Условие (1.2) при этом выполняется.

Таким образом, решение задачи Трикоми (2.1) — (2.4) построено. Оно определяется формулами (2.5) — (2.7) и (2.18). Интегралы в (2.6) и (2.7) можно представить в виде рядов. При $\theta \approx 0$ решение $\psi(\theta, \eta)$ описывает околосзвуковое плоское течение газа вдали от профиля, помещенного в канале с параллельными стенками.

Чтобы выполнить условие $\psi = 0$ на границе профиля, надо к построенному решению $\psi(\theta, \eta)$ добавить регулярное решение ψ_3 уравнения (1.1), обращающееся в нуль при $\theta = 0$, $0 \leq \eta < \infty$ и такое, чтобы сумма $\psi + \psi_3$ равнялась нулю вдоль кривой EAC на фиг. 2.

3. Покажем, что при неограниченном расширении канала, поддержании режима «запирания» его и выполнении некоторого условия построенное решение переходит в особенность плоского безграничного звукового потока, найденную Ф. И. Франклем [1], [2] и Гудерлеем

$$\psi_0(\theta, \eta) = C\rho^{-5/3} [(1-s)^{1/3}(1/3+s) - (1+s)^{1/3}(1/3-s)]$$

$$\rho = \sqrt{\theta^2 + 4/9\eta^2}, \quad s = \theta/\rho \quad (3.1)$$

где C — некоторая постоянная, зависящая от размера профиля. Это автомодельное решение уравнения (1.1) обращается в нуль при $\theta = 0$, $0 < \eta < \infty$, регулярно на предельной характеристике BC' и на BA' (фиг. 3), обращается в бесконечность в точке B ($\theta = \eta = 0$) и стремится к нулю на бесконечности плоскости θ, η при $\rho \geq 0$.

Обозначив (3.2)

$$\tau_0(\theta) = \psi_0(\theta, 0) = C \cdot \frac{2^{4/3}}{3} \theta^{-5/3}, \quad v_0(\theta) = \frac{\partial \psi_0(\theta, 0)}{\partial \eta} = C \frac{2^{7/3}}{3^{5/3}} \theta^{-7/3} \quad (0 < \theta < \infty)$$

легко находим связь между $\tau_0(\theta)$ и $v_0(\theta)$

$$\tau_0(\theta) = \gamma \int_{\theta}^{\infty} \frac{v_0(s) ds}{(s-\theta)^{1/3}} \quad (0 < \theta < \infty) \quad (3.3)$$

Здесь постоянная γ определена в (2.7). Соотношение (3.3) показывает, что $\psi_0(\theta, \eta)$ обращается в нуль на характеристике $A'C'$ (фиг. 3).

Исследуем предел решения $\psi(\theta, \eta)$ из (2.5) при неограниченном расширении канала ($L \rightarrow \infty$) и поддержании режима «запирания» ($Q \rightarrow \infty$, $\eta_\infty \rightarrow 0$). Тогда точка D на фиг. 3 приближается к точке B , а значение $\psi(\theta, \eta)$ на отрезке DB неограниченно возрастает. Предел суммы ряда из (2.17) при $t_\infty = {}^2/3\eta_\infty^{3/2} \rightarrow 0$ равен постоянной

$$F\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}; \frac{5}{3}; 1\right) = \frac{32}{15 \cdot 2^{1/3} \sqrt{3}}$$

Поэтому предел функции $v(\theta)$ при $t_\infty \rightarrow 0$, $Q \rightarrow \infty$ определяется пределом произведения $Q \cdot t_\infty^{5/3}$ из (2.17), который может быть равен нулю, бесконечности или конечной величине, если не предполагать сохранения размеров профиля при расширении канала. Покажем, что при условии

$$\lim Q t_\infty^{5/3} = A > 0 \quad \text{при } t_\infty \rightarrow 0 \quad (A = \text{const}) \quad (3.4)$$

построенная особенность $\psi(\theta, \eta)$ переходит в особенность (3.1) безграничного звукового потока около профиля. Обозначив предел функции $\psi(\theta, \eta)$ при выполнении условия (3.4) через $\psi_*(\theta, \eta)$, предел функции $v(\theta)$ — через $v_*(\theta)$, из (2.17) получим

$$v_*(\theta) = \frac{4}{5\pi} \frac{2^{1/3}}{3^{1/6}} A \theta^{-7/3} \quad (0 < \theta < \infty) \quad (3.5)$$

т. е. функция $v_*(\theta)$ только постоянным множителем может отличаться от функции $v_0(\theta)$ из (3.2). Приравняв их, получим

$$C = \frac{3\sqrt{3}}{5\pi} A \quad (3.6)$$

Если $\tau_*(\theta)$ — предел $\tau(\theta)$ при $t_\infty \rightarrow 0$ и условия (3.4), то условие (2.8) для $\psi_*(\theta, \eta)$ переписывается в виде

$$\tau_*(\theta) = \gamma \int_{\theta}^{\infty} \frac{v_*(s) ds}{(s-\theta)^{1/3}} \quad (0 < \theta < \infty) \quad (3.7)$$

Тогда из тождества $v_*(\theta) \equiv v_0(\theta)$, $0 < \theta < \infty$ и соотношений (3.7) и (3.3) следует $\tau_*(\theta) \equiv \tau_0(\theta)$, $0 < \theta < \infty$. Так как $\psi_*(0, \eta) = \psi_0(0, \eta) = 0$, $0 < \eta < \infty$, то, в силу единственности решения задачи Дирихле при $\eta \geq 0$ и задачи Коши при $\eta \leq 0$, получим $\psi_*(\theta, \eta) \equiv \psi_0(\theta, \eta)$ в области на фиг. 3.

Условие (3.4) можно записать в другом виде. При $L \approx \infty$ и $\eta_\infty \approx 0$ имеем:

$$Q = O(L), \quad t_\infty = {}^2/3\eta_\infty^{3/2} = O[(1 - M_\infty)^{3/2}]$$

где M_∞ — запирающее число Маха однородного потока далеко перед профилем в канале, поэтому из (3.4) получим

$$1 - M_\infty = B \left(\frac{l}{L}\right)^{5/6}, \quad M_\infty \approx 1 \quad (3.8)$$

где l — характерный линейный размер профиля, B — безразмерная постоянная, зависящая от его формы.

Осталось выяснить физический смысл условия (3.8) при $L \rightarrow \infty$, $M_\infty \rightarrow 1$. Покажем, что условие (3.8) эквивалентно требованию сохране-

ния размеров профиля при расширении канала, по крайней мере, для частных видов профилей. Для этого необходимо решить краевую задачу на фиг. 2 для конкретного профиля, выразить характерный размер l профиля через Q , η_∞ и форму профиля и проверить при $M_\infty \rightarrow 1$ и постоянстве l условие (3.8). Задача о клине в канале решена аналитически Маршнером [8] при помощи естественных решений уравнения (1.1), введенных Гудерлеем, при условии $t_\infty < \theta_0$, где θ_0 — угол полураствора клина. При условии постоянства размера клина формула для запирающего числа M_∞ имеет вид (3.8).

Задачу о клине в канале при его запираии решал также Мориока [9] методом релаксации. Расчет велся для трех значений параметра l/L , где l — длина клина при фиксированном значении угла θ_0 . При $M_\infty \approx 1$ формула для запирающего числа M_∞ вида (3.8), полученная Маршнером, удовлетворительно согласуется с численными значениями работы [9]. Формула вида (3.8) получена также Гудерлеем [10,11] при решении задачи о течении газа около плоской пластинки, помещенной под углом атаки в канале с параллельными стенками. Можно предположить, что условие (3.8) будет выполняться и для некоторых выпуклых профилей при расширении канала, поддержании режима «запирания» его и сохранении размеров профиля. Тогда плоский околосвуковой поток около профиля, помещенного в канале с параллельными стенками, будет переходить в безграничный звуковой поток около этого профиля.

Заметим, что недавно особенность звукового безграничного потока около профиля была проверена экспериментально [12].

В заключение автор приносит искреннюю благодарность С. В. Фальковичу за постановку задачи и ценные замечания.

Поступила 17 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф р а н к л ь Ф. И. Исследования по теории крыла бесконечного размаха, движущегося со скоростью звука. Докл. АН СССР, 1947, т. 57, № 7.
2. Ф р а н к л ь Ф. И. Об одном классе решений газодинамических уравнений С. А. Чаплыгина. Уч. зап. МГУ, Механика, 1951, т. 154, № 4.
3. Ф р а н к л ь Ф. И. К теории сопел Лавалья. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1945, т. 9, № 5.
4. G e l l e r s t e d t S. Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m Z_{xx} \mp Z_{yy} = 0$. Arkiv mat., astron. och fys. A, 1937, vol. 26, No. 3.
5. Т р и к о м и Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. Изд. иностр. лит., 1957.
6. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
7. Г р а д ш т е й н И. С. и Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений (изд. 4-е, перераб. Геронимусом Ю. В. и Цейтлиным М. Ю.). Физматгиз, 1962.
8. M a r s c h n e r B. W. The Flow over a Body in a Closed Wind Tunnel and in a Sonic Free Jet. J. Aeronaut. Sci., 1956, vol. 23.
9. M o r i o k a S. High Subsonic Flow past a Wedge in a Two-Dimensional Wind Tunnel at its choked State. J. Phys. Soc. Japan, 1958, vol. 14, No. 8.
10. G u d e r l e y K. G. The Flat Plate with an Angle of Attack in a Choked Wind Tunnel. J. Aeronaut. Sci., 1955, vol. 22, No. 12.
11. Г у д е р л е й К. Г. Теория околосвуковых течений. Изд. иностр. лит., 1960.
12. N g u y e n V. Q., G o n t i e r G., M a r t i n o t - L a g a r d ' e A. Sur une vérification expérimentale d'une solution de l'équation d'Euler-Tricomi pour l'écoulement critique plan autour d'un profil d'aile. C. r. Acad. sci., 1963, vol. 256, No. 4.