

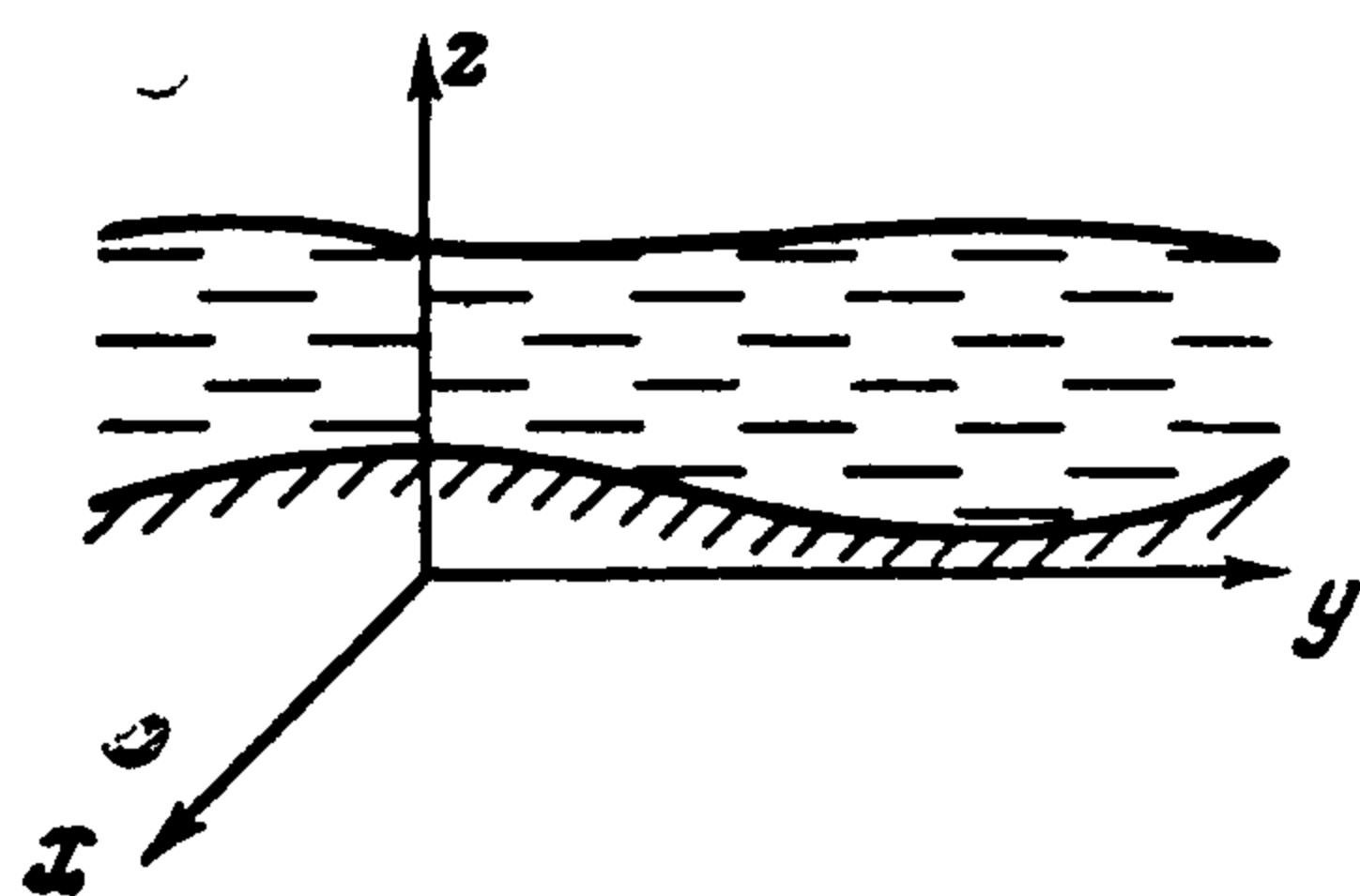
ДВИЖЕНИЕ ТОНКОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ ТЯЖЕСТИ И ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Ф. Л. Черноусько

(Москва)

Выводятся уравнения движения тонкого слоя идеальной несжимаемой жидкости под действием сил тяжести и поверхностного натяжения. Эти уравнения представляются обобщением известных уравнений теории «мелкой воды» [1] и применимы, в частности, для исследования движения жидкости в условиях невесомости. В рамках полученных уравнений рассмотрены некоторые статические и динамические задачи.

1. Рассматривается потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ . Пусть t — время; x, y, z — декартовы координаты в области течения; u, v, w — проекции скорости жидкости на оси x, y, z ; p — давление; g — постоянное ускорение силы тяжести или других массовых сил, направленное против оси z . Уравнения движения, неразрывности и условия отсутствия вихря имеют вид (индексы внизу всюду обозначают частные производные)



Фиг. 1

$$(1.1)$$

$$u_t + uu_x + vv_y + ww_z + p_x / \rho = 0,$$

$$v_t + uv_x + vv_y + wv_z + p_y / \rho = 0$$

$$w_t + uw_x + vw_y + ww_z + p_z / \rho + g = 0,$$

$$u_x + v_y + w_z = 0$$

$$w_y = v_z, u_z = w_x, v_x = u_y$$

Пусть жидкость ограничена (фиг. 1) снизу неподвижным дном $z = h(x, y)$, а сверху — свободной поверхностью $z = f(x, y, t)$. Запишем условия непротекания на дне и динамическое и кинематическое условия на свободной поверхности

$$w = h_x u + h_y v \quad \text{при } z = h(x, y) \quad (1.2)$$

$$p = p_0 - \sigma (1 + f_x^2 + f_y^2)^{-3/2} [f_{xx} (1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy} (1 + f_x^2)]$$

$$w = f_t + f_x u + f_y v \quad \text{при } z = f(x, y, t)$$

Здесь p_0 — постоянное давление вне жидкости, σ — коэффициент поверхностного натяжения, множитель при σ есть кривизна свободной поверхности, причем жидкость предполагается всюду лежащей ниже свободной поверхности.

Будем следовать идее вывода уравнений «мелкой воды» при отсутствии поверхностного натяжения, приведенного в книге [1] (другой вывод дан в работе [2]). Сделаем замену переменных, функций и постоянных

$$z = \delta \zeta, \quad w = W / \delta, \quad h = \delta H, \quad f = \delta F, \quad g = g' / \delta, \quad \sigma = \sigma' / \delta \quad (1.3)$$

Безразмерный параметр δ имеет смысл отношения характерного размера вдоль оси z (например, средней глубины жидкости) к характерному размеру в плоскости xu и далее считается малым. Переходя к переменным (1.3), приведем равенства (1.1), (1.2) к виду

$$Wu_\zeta + \varepsilon(u_t + uu_x + vv_y + p_x/\rho) = 0 \quad (\varepsilon = \delta^2) \quad (1.4)$$

$$Wv_\zeta + \varepsilon(v_t + uv_x + vv_y + p_y/\rho) = 0$$

$$WW_\zeta + \varepsilon(W_t + uW_x + vW_y + p_\zeta/\rho + g') = 0$$

$$W_\zeta + \varepsilon(u_x + v_y) = 0, \quad W_y = v_\zeta, \quad u_\zeta = W_x, \quad v_x = u_y$$

$$W = \varepsilon(H_x u + H_y v) \quad \text{при } \zeta = H(x, y)$$

$$p = p_0 - \sigma' (1 + \varepsilon F_x^2 + \varepsilon F_y^2)^{-1/2} [F_{xx} (1 + \varepsilon F_y^2) - 2\varepsilon F_x F_y F_{xy} + F_{yy} (1 + \varepsilon F_x^2)]$$

$$W = \varepsilon(F_t + F_x u + F_y v) \quad \text{при } \zeta = F(x, y, t)$$

Искомые функции будем представлять рядами по малому параметру ε

$$u = u^\circ + \varepsilon u^1 + \dots, \quad v = v^\circ + \varepsilon v^1 + \dots, \quad W = W^\circ + \varepsilon W^1 + \dots$$

$$p = p^\circ + \varepsilon p^1 + \dots, \quad F = F^\circ + \varepsilon F^1 + \dots \quad (\varepsilon \ll 1) \quad (1.5)$$

Коэффициенты разложений (1.5) и их производные по t, x, y, ζ предполагаются ограниченными при $\varepsilon \rightarrow 0$. Подставим (1.5) в (1.4) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . Из нулевого приближения получим

$$W^\circ \equiv 0, \quad u_\zeta^\circ = v_\zeta^\circ \equiv 0, \quad u_x^\circ = v_y^\circ \quad (1.6)$$

$$p^\circ = p_0 - \sigma' (F_{xx}^\circ + F_{yy}^\circ) \quad \text{при } \zeta = F^\circ$$

Учитывая (1.5), (1.6), приравняем в (1.4) коэффициенты при ε . Получим уравнения

$$u_t^\circ + u^\circ u_x^\circ + v^\circ u_y^\circ + p_x^\circ/\rho = 0$$

$$v_t^\circ + u^\circ v_x^\circ + v^\circ v_y^\circ + p_y^\circ/\rho = 0, \quad p_\zeta^\circ + \rho g' = 0$$

$$W_\zeta^1 + u_x^\circ + v_y^\circ = 0 \quad (1.7)$$

$$W^1 = H_x u^\circ + H_y v^\circ \quad \text{при } \zeta = H, \quad W^1 = F_t^\circ + F_x^\circ u^\circ + F_y^\circ v^\circ \quad \text{при } \zeta = F^\circ$$

В дальнейшем ограничимся первыми ненулевыми членами разложений (1.5). Поэтому в (1.7) опущены условия безвихревости и граничное условие для p , содержащие u^1, v^1, p^1, F^1 . Из уравнения неразрывности и условия на дне в (1.7) имеем

$$W^1 = (Hu^\circ)_x + (Hv^\circ)_y - \zeta (u_x^\circ + v_y^\circ) \quad (1.8)$$

Подставляя (1.8) в последнее условие (1.7), получим уравнение для F°

$$F_t^\circ + [(F^\circ - H) u^\circ]_x + [(F^\circ - H) v^\circ]_y = 0 \quad (1.9)$$

Давление определим из третьего уравнения (1.7) и условия на свободной поверхности в (1.6)

$$p^\circ = p_0 - \sigma' (F_{xx}^\circ + F_{yy}^\circ) - \rho g' (\zeta - F^\circ) \quad (1.10)$$

Ограничиваясь первыми ненулевыми слагаемыми в (1.5), полагаем

$$u \approx u^\circ, \quad v \approx v^\circ, \quad w = W/\delta \approx \delta W^1, \quad p \approx p^\circ, \quad f = \delta F \approx \delta F^\circ$$

Тогда для функций $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $f(x, y, t)$ получим из (1.6), (1.7), (1.9) с учетом (1.3), (1.10) систему уравнений

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + gf_x - (\sigma/\rho) \Delta f_x &= 0 \\ v_t + uv_x + vv_y + gf_y - (\sigma/\rho) \Delta f_y &= 0 \\ f_t + [(f-h)u]_x + [(f-h)v]_y &= 0, \quad u_x = v_y \end{aligned} \quad (1.11)$$

Оператор Лапласа Δ , а также операторы ∇ , div , rot всюду считаются действующими в плоскости xy . Если ввести двумерный вектор скорости \mathbf{v} с компонентами u , v , то систему (1.11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \nabla(gf - \sigma\rho^{-1}\Delta f) &= 0 \\ f_t + \text{div}[(f-h)\mathbf{v}] &= 0, \quad \text{rot } \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Функции w , p выражаются через \mathbf{v} , f соотношениями, вытекающими из (1.8), (1.10)

$$w = \text{div}(h\mathbf{v}) - z \text{div } \mathbf{v}, \quad p = p_0 - \sigma\Delta f - \rho g(z - f) \quad (1.13)$$

Уравнения (1.12) описывают безвихревое движение жидкости под действием сил тяжести и поверхностного натяжения при условии, что характерная глубина жидкости мала по сравнению с характерным масштабом в плоскости xy (например, с длиной волны). Наклоны дна $z = h(x, y)$ и свободной поверхности к горизонтальной плоскости также предполагаются малыми, однако амплитуда волн может быть любой (глубина может изменяться в конечное число раз). Система (1.12) нелинейна, однако она значительно проще исходной (1.1), так как содержит меньше искомым функций и независимых переменных.

Уравнения длинных волн с учетом поверхностного натяжения выводились в работе [3] и изучались, например в [4]. Уравнения работы [3] справедливы лишь для плоских волн малой амплитуды, распространяющихся в одном направлении, и при $\sigma = 0$ не переходят в уравнения «мелкой воды». Кроме того, при выводе уравнений [3] силы поверхностного натяжения предполагаются малыми по сравнению с силой тяжести, что не позволяет рассмотреть случай невесомости $g = 0$.

Уравнения (1.12), (1.13) получены без этих ограничений и являются непосредственным обобщением уравнений первого приближения теории «мелкой воды» [1], в которые они переходят при $\sigma = 0$. При $g = 0$ уравнения (1.12), (1.13) описывают движение тонкого слоя невесомой жидкости.

Для определения движения жидкости нужно решить систему (1.12) при некоторых начальных и граничных условиях, а затем определить w и p по формулам (1.13). Пусть $D(t)$, вообще говоря, переменная проекция области течения на плоскость xy , контур Γ — граница области $D(t)$. В качестве начальных условий для системы (1.12) нужно задать в начальный момент t_0 функцию f и потенциальный соленоидальный вектор \mathbf{v} в области $D(t_0)$. Если контур Γ задан, то на нем нужно задавать два граничных условия (одно — для скорости и одно — для формы свободной поверхности), а если он неизвестен, то три условия. Пусть, например, область течения ограничена вертикальными стенками (цилиндрической поверхностью с направляющей Γ), γ — краевой угол на границе жидкости

со стенками, который для применимости выведенных уравнений предполагается близким к $1/2\pi$. Тогда условия на контуре Γ примут вид

$$vn = 0, \quad n\nabla f = -\cos \gamma \approx \gamma - 1/2\pi$$

где n — внутренняя нормаль к контуру Γ .

2. В качестве примера рассмотрим задачу о равновесии капли на плоской горизонтальной стенке (фиг. 2). Краевой угол γ между жидкостью и стенкой считаем малым ($0 \leq \gamma \leq 1$), а форму капли достаточно полой. Тогда можно применить уравнения (1.12), которые для случая равновесия дают

$$\nabla(\rho g f - \sigma \Delta f) = 0 \quad (2.1)$$

Плоскость xy совместим с плоскостью стенки. Пусть капля осесимметрична, и ее основание есть круг $x^2 + y^2 = R^2$.

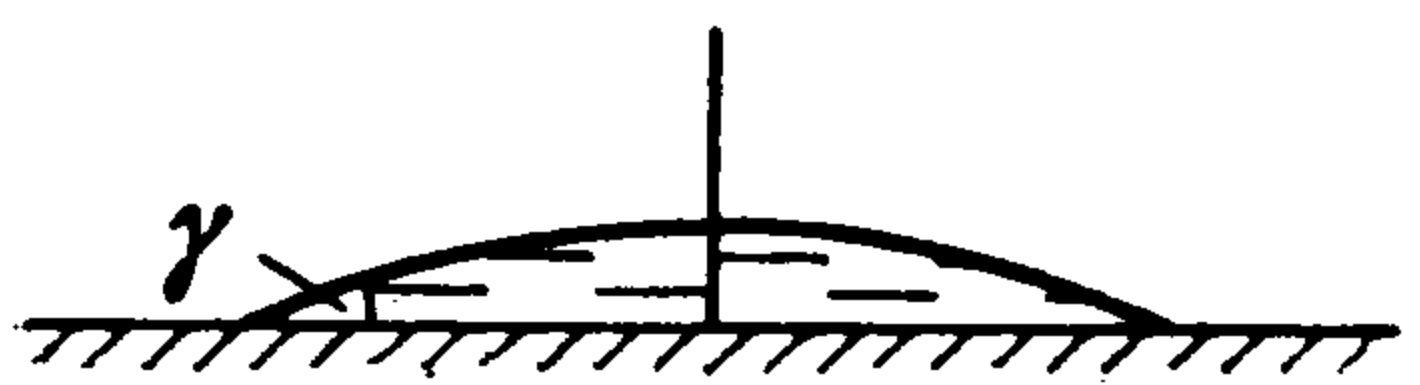
Тогда уравнение (2.1) для формы поверхности капли $f(r)$ дает

$$\begin{aligned} [\rho g f - (\sigma/r)(rf')]' &= 0 \\ r &= (x^2 + y^2)^{1/2} \\ (\dots)' &= d(\dots)/dr \end{aligned} \quad (2.2)$$

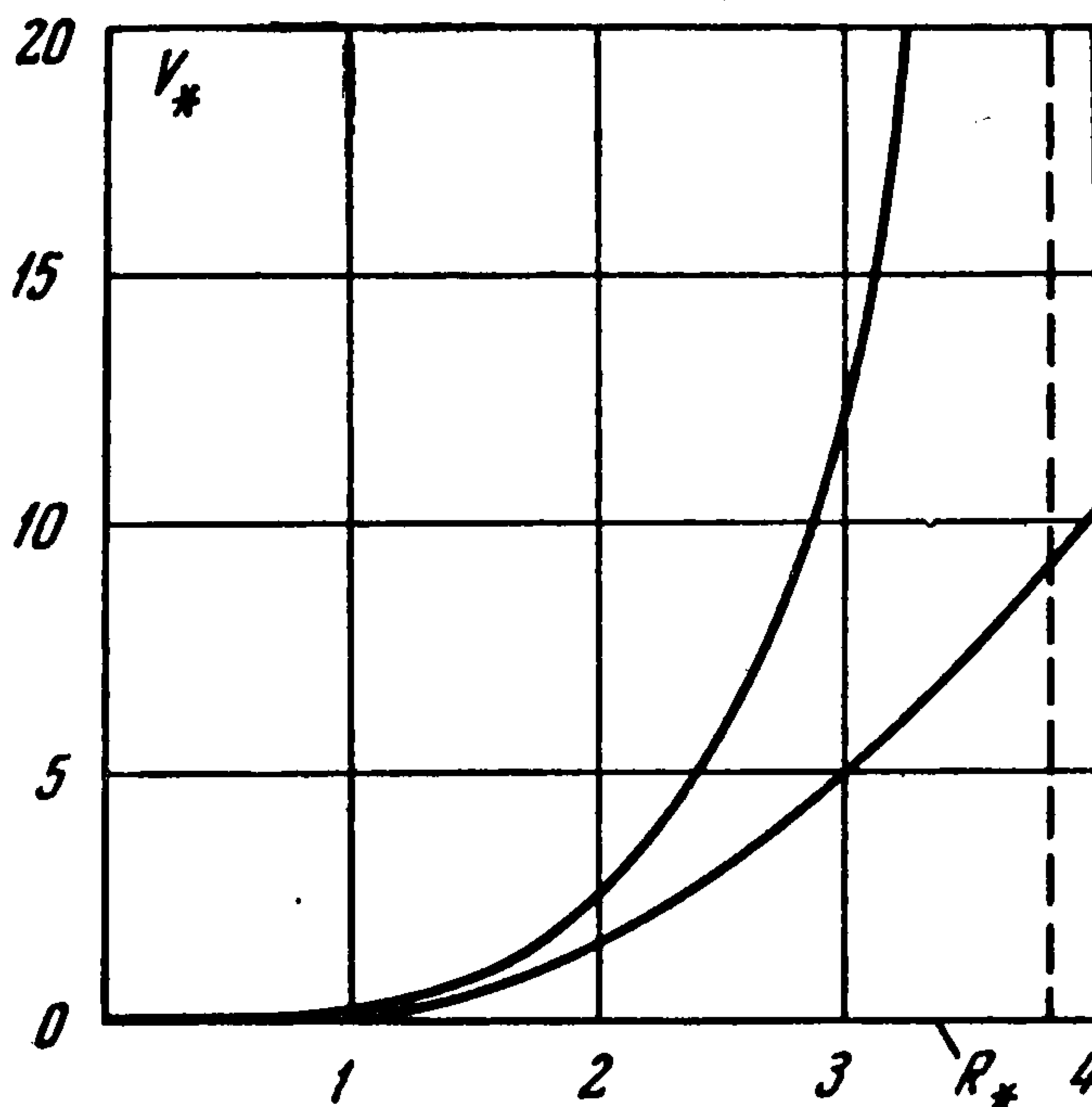
Решение уравнения (2.2) зависит от трех произвольных постоянных, определяемых из условий

$$f(R) = 0, \quad f'(R) = -\gamma$$

и условия ограниченности $f(0)$.



Фиг. 2



Фиг. 3

При $g > 0$ решение выражается через функции Бесселя от мнимого аргумента:

$$f(r) = \frac{\gamma\sigma^{1/2}}{(\rho g)^{1/2} I_1(R_*)} [I_0(R_*) - I_0(r \sqrt{\rho g/\sigma})], \quad R_* = R(\rho g/\sigma)^{1/2} \quad (2.3)$$

При помощи решения (2.3) легко подсчитать объем капли v . Связь между безразмерным объемом v_* и безразмерным радиусом капли R_* имеет вид

$$v_* = \frac{R_*^2 I_0(R_*) - 2R_* I_1(R_*)}{I_1(R_*)} \quad \left(v_* = \frac{v(\rho g)^{3/2}}{\pi\gamma\sigma^{3/2}} \right) \quad (2.4)$$

Эта зависимость изображена нижней кривой на фиг. 3 и может служить для определения радиуса капли по заданному объему. При малых и больших R_* справедливы асимптотические формулы

$$v_* \sim 1/4 R_*^3 \text{ при } R_* \rightarrow 0, \quad v_* \sim R_*^2 \text{ при } R_* \rightarrow \infty$$

Случай $g < 0$ соответствует капле, висящей снизу на горизонтальной стенке. Искомое решение уравнения (2.2) и связь между объемом и радиусом капли в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{\gamma\sigma^{1/2}}{(-\rho g)^{1/2} J_1(R_*)} [J_0(r \sqrt{-\rho g/\sigma}) - J_0(R_*)] \\ R_* &= R(-\rho g/\sigma)^{1/2}, \quad v_* = (-\rho g/\sigma)^{3/2} (v/\pi\gamma) \\ v_* &= \frac{2R_* J_1(R_*) - R_*^2 J_0(R_*)}{J_1(R_*)}, \quad v_* \sim 1/4 R_*^3 \text{ при } R_* \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Нетрудно видеть (верхняя кривая на фиг.3), что $v_* \rightarrow \infty$ при $R_* \rightarrow \mu$, где $\mu = 3.8317$ — первый положительный корень уравнения $J_1(\mu) = 0$. Таким образом, безразмерный радиус капли в случае $g < 0$ не может превышать μ , а при полной смачиваемости ($\gamma = 0$, $v_* = \infty$) имеем $R_* = \mu$. Этот результат приведен в работе [5]. Исключая γ и v_* , получим из (2.5) при $\gamma = 0$

$$f(r) = \frac{\rho g v}{\pi \sigma \mu^2 J_0(\mu)} [J_0(r \sqrt{-\rho g / \sigma}) - J_0(\mu)]$$

В случае невесомости ($g = 0$) из (2.2) найдем

$$f(r) = \gamma (R^2 - r^2) / 2R, \quad v = 1/4 \pi \gamma R^3$$

Точная форма капли в этом случае представляет собой сферу. Нетрудно получить при помощи (2.1) решения других статических задач.

Отметим, что уравнением (2.1) нельзя пользоваться, если наклон свободной поверхности к горизонтальной плоскости где-либо оказывается большим. Это имеет место, в частности, для капли при $g < 0$ и достаточно большом v . Форма капли в этом случае определяется численным интегрированием точного нелинейного уравнения равновесия [5, 6]. Точная зависимость $v(R)$ при $\gamma = 0$ приведена в работе [5], причем при достаточно большом v равновесных форм вообще не существует. Для исследования устойчивости свободной поверхности [7] также нужно исходить из точного решения нелинейной задачи.

3. Рассмотрим малые колебания слоя жидкости постоянной глубины H над плоским дном. Положим $h \equiv 0$, $f = H + \psi$ в системе (1.12) и линеаризуем ее, считая v и ψ малыми

$$v_t + \nabla(g\psi - \sigma \rho^{-1} \Delta \psi) = 0, \quad \text{rot } v = 0, \quad \psi_t + H \text{ div } v = 0 \quad (3.1)$$

Применяя операцию div к первому уравнению (3.1) и исключая v при помощи третьего уравнения (3.1), приходим к одному уравнению для функции $\psi(x, y, t)$

$$\psi_{tt} = gH \Delta \psi - (\sigma H / \rho) \Delta \Delta \psi \quad (3.2)$$

При $\sigma = 0$, $g > 0$ уравнение (3.2) переходит в волновое уравнение, а при $g = 0$ — в известное уравнение колебаний упругой пластинки (см., например, [8]).

Уравнение (3.2) допускает решения в виде плоских прогрессивных волн вида $\psi = A \sin(kx - \omega t)$, где A — амплитуда, ω — частота волн, k — волновое число, причем направление распространения волны взято за ось x . Подставляя это решение в уравнение (3.2), получим соотношение между ω и k

$$\omega^2 = k^2 g H + k^4 \sigma H / \rho \quad (k = 2\pi / \lambda = \omega / v_0) \quad (3.3)$$

Здесь λ — длина, v_0 — скорость распространения волны. Формула (3.3) может быть получена путем предельного перехода $H \rightarrow 0$ из аналогичного соотношения для малых капиллярно-гравитационных волн на поверхности жидкости произвольной глубины [8].

4. Изучим плоские стационарные движения жидкости над плоским дном в нелинейной постановке. Полагая $h = 0$, $u = u(x)$, $v = 0$, $f = f(x)$, получим из (1.11) систему уравнений

$$u u_x + g f_x - \sigma \rho^{-1} f_{xxx} = 0, \quad (f u)_x = 0$$

Интегрируя один раз и исключая u , будем иметь

$$(q^2 / 2f^2) + gf - \sigma\rho^{-1}f_{xx} = C_1, \quad fu = q \quad (4.1)$$

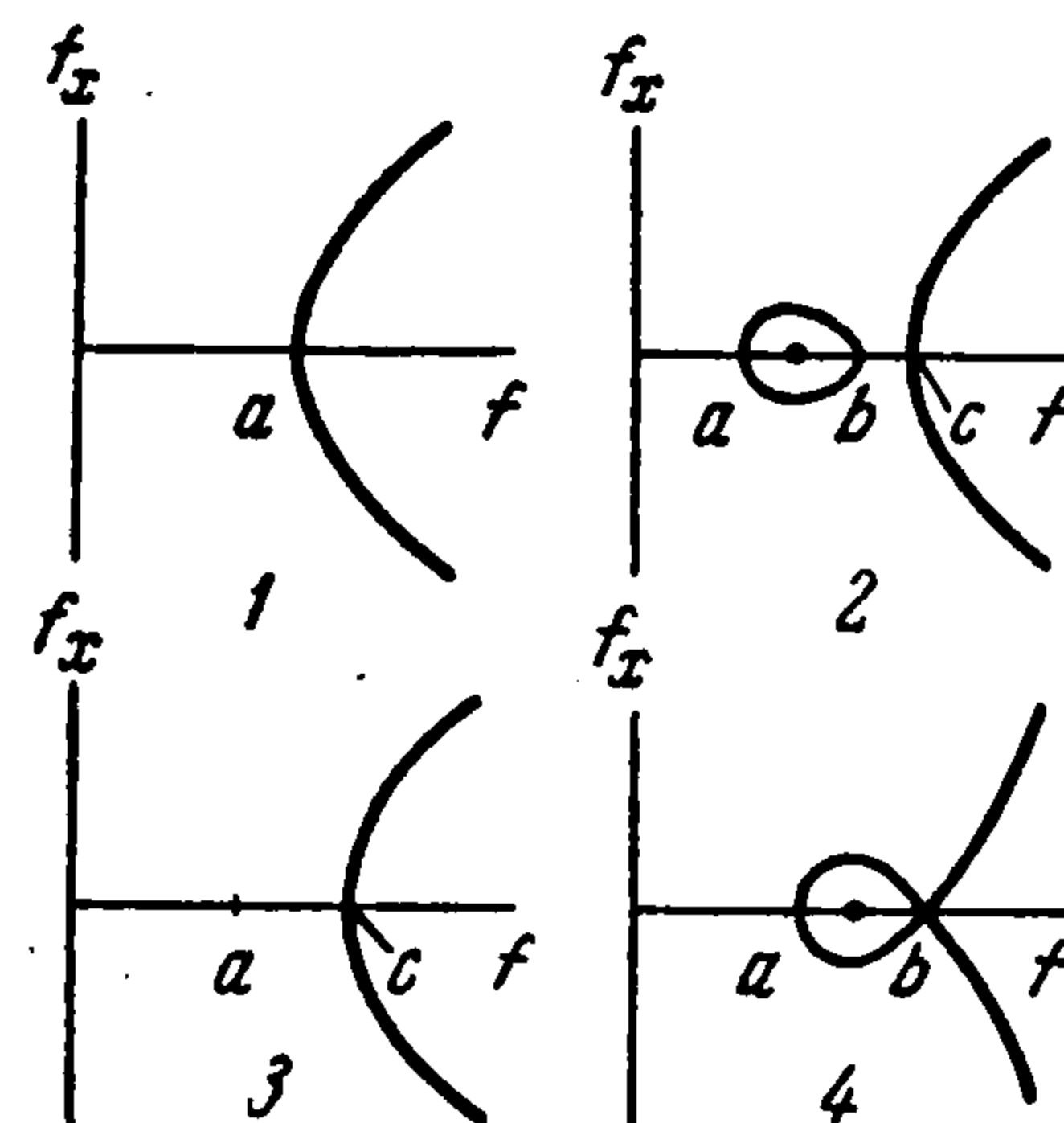
Здесь расход жидкости $q \neq 0$ и C_1 — произвольные постоянные. Умножая первое уравнение (4.1) на f_x и интегрируя еще раз, получим

$$(f_x)^2 = [\rho / (\sigma f)] P(f)$$

$$P(f) = gf^3 - 2C_1f^2 - 2C_2f - q^2 \quad (4.2)$$

где C_2 — произвольная постоянная. Таким образом, функция $f(x)$ определяется квадратурой.

Рассмотрим возможные типы стационарных движений при $g > 0, \sigma > 0$. Так как $P(0) < 0, P(\infty) = +\infty$, то полином $P(f)$ может иметь либо один, либо три вещественных положительных корня. Каждому такому корню может отвечать поступательный поток $f = \text{const}$. Корни a, b, c полинома $P(f)$ связаны соотношением $abcs = q^2$. В зависимости от значений произвольных постоянных возможны следующие случаи.



Фиг. 4

1) Полином $P(f)$ имеет один положительный корень $a > 0$. Связь (4.2) между f_x и f изображена на фиг. 4, где номер кривой отвечает номеру рассматриваемого случая. Свободная поверхность $f(x)$ имеет минимум $f = a$, по обе стороны от которого она симметрична, монотонно возрастает и экспоненциально стремится к ∞ при $x \rightarrow \pm\infty$.

2) Полином $P(f)$ имеет три различных положительных корня $c > b > a > 0$. Здесь возможны (фиг. 4) решения двух типов: неограниченное решение с минимумом $f = c$, аналогичное случаю 1, а также периодическое по x решение, соответствующее замкнутой кривой фиг. 4. Периодическое решение описывает установившиеся нелинейные периодические волны, причем a — минимальная высота свободной поверхности (впадина волны), а b — максимальная высота (гребень волны). Форма волны симметрична как относительно впадины, так и относительно гребня, причем кривизна волны у впадины больше, чем у гребня. При заданных ρ, g, σ и расходе q имеется двухпараметрическое семейство таких волн (с параметрами C_1, C_2 или a, b).

3) Полином $P(f)$ имеет кратные корни, причем $c \geq b = a > 0$. Замкнутая кривая случая 2 в этом случае стягивается в точку (фиг. 4), описывающую поступательный поток $f \equiv a$. Кроме того, как и в случаях 1, 2, имеется неограниченное решение.

4) Корни полинома $P(f)$ подчинены условию $c = b > a > 0$. Ветвям кривой 4 фиг. 4 справа от $f = b$ соответствуют монотонные неограниченные решения, в которых f изменяется от b до $+\infty$. Петля кривой 4 слева от точки $f = b$ описывает уединенную волну типа впадины. Если впадина (минимум функции $f(x)$) находится в точке $x = x_0$, то $f(x_0) = a$, функция $f(x)$ симметрична относительно точки $x = x_0$ и монотонно возрастает с ростом $|x - x_0|$, причем $f(x) \rightarrow b$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Течение при $x \rightarrow \pm\infty$ переходит в поступательный поток со скоростью $v_0 = q/b$, равной, в силу соотношения $ab^2g = q^2$, скорости $(ga)^{1/2}$ длинных гравитационных волн в канале глубины a .

Перейдем в систему координат, в которой жидкость покоится на бесконечности. При заданной глубине жидкости на бесконечности b по ее поверхности могут распространяться уединенные волны типа впадин, образующие однопараметрическое семейство. Скорость волн связана с параметром a (минимальной глубиной жидкости) соотношением $v_0 = (ga)^{1/2}$. Отметим, что, в отличие от уединенных волн при отсутствии поверхностного натяжения [1-2], здесь уединенные волны получаются уже в первом приближении теории «мелкой воды».

Приведенные решения отличаются от известных [3] тем, что они получены из первого приближения теории «мелкой воды», но без ограничений на амплитуду волны и на соотношение сил тяжести и сил поверхностного натяжения.

Положим в (4.2) для случая уединенной волны (x_0 — координата впадины)

$$P(f) = g(f-a)(b-f)^2, \quad q^2 = ab^2g$$

$$x - x_0 = [\sigma/(\rho g)]^{1/2} \xi, \quad f = b\eta \quad (0 < a/b = m \leq 1)$$

Тогда для безразмерной формы волны $\eta(\xi)$ получим

$$(d\eta/d\xi)^2 = \eta^{-1}(1-\eta)^2(\eta-m), \quad \eta(0) = m \quad (4.3)$$

Форму волны определим из (4.3) интегрированием

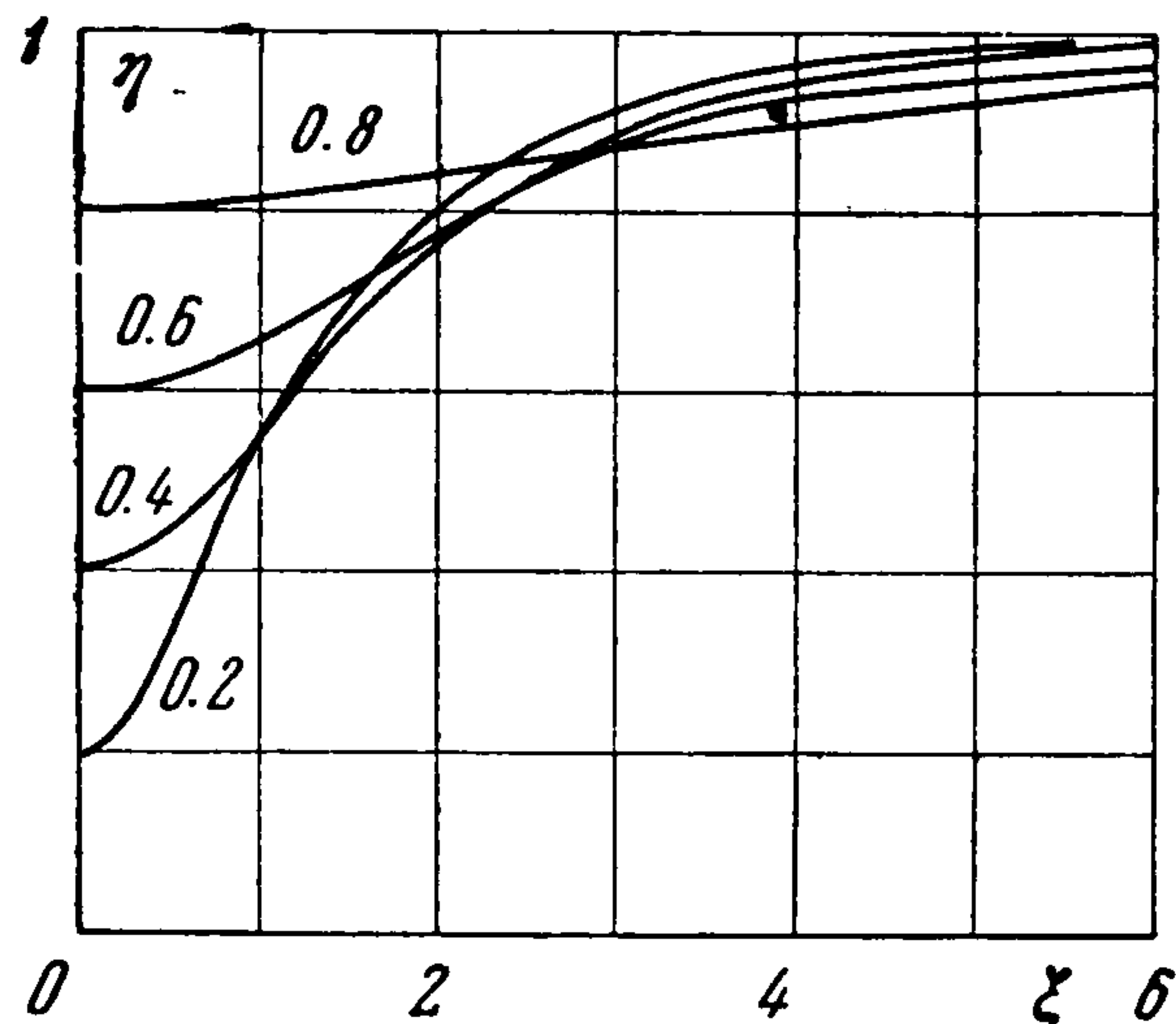
$$e^{|\xi|} = \left(\frac{\sqrt{\eta} + \sqrt{\eta-m}}{\sqrt{\eta} - \sqrt{\eta-m}} \right) \left(\frac{\sqrt{\eta(1-m)} - \sqrt{\eta-m}}{\sqrt{\eta(1-m)} + \sqrt{\eta-m}} \right)^{1/\sqrt{1-m}}$$

Результаты численного расчета формы волны согласно (4.3) представлены на фиг. 5, где числа у кривых указывают величину m , причем кривые симметричны относительно оси $\xi = 0$.

При $\sigma = 0$ описанные выше типы волн отсутствуют. В случае невесомости ($g = 0$), в зависимости от постоянных C_1, C_2 , полином $P(f)$ может иметь от нуля до двух положительных корней. Уравнение (4.2) тогда либо вообще не имеет решений, либо имеет неограниченное решение (аналогично случаю 1), либо имеет решение типа периодических волн.

Кроме того, положительным корням полинома $P(f)$ могут отвечать поступательные потоки.

Отметим в заключение, что решения уравнений (1.12) аппроксимируют точные решения исходной системы (1.1) лишь в том случае, если для них выполнены предположения теории «мелкой воды». Из способа построения решения (формулы (1.3), (1.5)) следует, что функции f, h и их производные по t, x, y должны быть малыми величинами порядка $\delta = \varepsilon^{1/2}$. Здесь δ — отношение характерной глубины



Фиг. 5

жидкости к характерному размеру в плоскости xy . Так, решение, описывающее уединенную волну типа впадины, справедливо при условии $b \ll [\sigma/(\rho g)]^{1/2}$. Амплитуда волны, характеризуемая числом m , может быть произвольной ($0 < m \leq 1$).

Поступила 28 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. С т о к е р Дж. Волны на воде. Изд-во иностр. лит., 1959.
2. М о и с е е в Н. Н. Асимптотические методы типа узких полос. Сб. «Некоторые проблемы математики и механики». Изд. СОАН СССР, Новосибирск, 1961.
3. К о р т е в е г D. J., de V r i e s G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on new type of long stationary waves. Philos. Mag., 1895, ser. 5, vol. 39.
4. Б е р е з и н Ю. А., К а р п м а н В. И. К теории нестационарных поверхностных волн. ПМТФ, 1964, № 5.
5. Т а м а д а К., S h i b a o k a Y. On the pendent drop. J. Phys. Soc. Japan, 1961, vol. 16, No. 6.
6. Б е л я е в а М. А., М ы ш к и с А. Д., Т ю п ц о в А. Д. Гидростатика в слабых гравитационных полях. Равновесные формы поверхности жидкости. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 5.
7. М о и с е е в Н. Н., М ы ш к и с А. Д., П е т р о в А. А. О некоторых новых задачах теории движения тела с жидкостью. Докл. на II Всесоюзн. съезде по теор. и прикл. механике, 1964.
8. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехтеоретиздат, 1954.