Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Л. А. Дикий

(Москва)

В работе [1] В. И. Арнольд предложил метод исследования устойчивости установившихся гидродинамических течений, не требующий линеаризации уравнений. Метод основан на возможности построения функционала от мгновенных состояний гидродинамических полей, сохраняющегося в силу уравнений движения и имеющего данное установившееся течение своей экстремальной (стационарной) точкой. Если этот экстремум есть истинный минимум, или максимум, то течение устойчиво. Смысл этой теоремы геометрически очевиден. Если представить себе «поверхности уровня» функционала в функциональном пространстве в окрестности точки, изображающей данное установившееся течение, то в случае максимума (минимума) они будут вложенными одна в другую замкнутыми поверхностями, стягивающимися к точке. Если в некоторый момент возмутить установившееся течение, то соответствующая фазовая точка сместится на близкую поверхность уровня и во все последующее время движения уже с нее не сойдет, так как функционал сохраняется. Малым начальным отклонением соответствуют малые отклонения во все последующее время движения.

В работе [1], где речь шла о двумерном течении несжимаемой идеальной жидкости, существование требуемого функционала было следствием двух законов сохранения — сохранения энергии и вихря. При переходе к трехмерному движению положение осложняется. В случае жидкости однородной и несжимаемой уже нет более локальной инвариантной характеристики, подобной вихрю скорости. Сохраняется лишь поток вихря через любую жидкую площадку. В статье В. И. Арнольда [2] строится обобщение вышеописанного метода на этот случай. Здесь приходится рассматривать весьма сложно и неявно задаваемые поверхности в функциональном пространстве, уже не являющиеся поверхностями уровня некоторых функционалов.

Цель настоящей работы — показать, что есть класс течений, для которого такая трудность не возникает. Изучаются адиабатические течения существенно неоднородной жидкости, которую, кроме того, считаем сжимаемой.

Можно было бы рассматривать неоднородную и несжимаемую жидкость. Рассмотрение, казалось бы, более сложного случая неоднородной жидкости на самом деле оказывается более удобным, что объясняется существованием в этом случае инвариантной характеристики, так называемого «потенциального вихря»

$$\Omega = \frac{\operatorname{grad} s \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}}{\rho} \tag{0.1}$$

Здесь s — энтропия, ρ — плотность, $\mathbf{v}$ — скорость течения (см., например, [3]). Если бы рассматривалась несжимаемая жидкость, то взамен можно написать $\Omega = \operatorname{grad} \rho \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}$. Течения рассматриваемого типа оказываются важными, например в метеорологии, при изучении устойчивости зональных потоков, направленных по параллелям.

1. Запишем уравнения движения. Имея в виду возможность приложения в метеорологии, сразу введем вращающуюся равномерно с угловой скоростью ω систему координат. Тогда уравнения Эйлера будут иметь вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p - \operatorname{grad}\varphi - 2\omega\times\mathbf{v}, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$$

$$\frac{ds}{dt} = 0, \qquad s = c_v \ln p\rho^{-\varkappa} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость относительного движения; p — давление; φ — потенциальная энергия внешних сил, например, поля тяжести, куда включены и центробежные силы переносного вращательного движения; s — энтропия. Если ввести энтальпию w, то уравнение Эйлера может быть записано еще и в следующей форме:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} w + T\operatorname{grad} s - \operatorname{grad}\varphi - 2\omega\times\mathbf{v}, \quad w = c_vT + \frac{p}{\rho} = c_pT \tag{1.2}$$

Как было сказано, существует, кроме энтропии, еще одна сохраняющаяся величина — потенциальный вихрь

$$\Omega = \frac{\operatorname{grad} s\cdot\zeta}{\rho}; \quad \frac{d\Omega}{dt} = 0 \qquad (\zeta = \operatorname{rot}\mathbf{v} + 2\omega) \tag{1.3}$$

Здесь ζ — абсолютный вихрь.

Будем изучать устойчивость некоторого установившегося течения $\mathbf{v}_0$, s_0, ρ_0. При исследовании наложим на него два ограничения. Одно из них заменяет собой условие монотонности вихря, которое принималось в двумерном случае [1,2]. Именно, предположим, что поверхности уровня s_0 не касаются нигде поверхностей уровня Ω_0

$$\operatorname{grad} s_0\times\operatorname{grad}\Omega_0 \neq 0 \tag{1.4}$$

Тем самым каждая линия тока будет однозначно определена парой значений (s_0, Ω_0). Второе ограничение: будем считать, что твердая поверхность есть одна из поверхностей постоянной энтропии. Оба эти ограничения были впервые введены в работе [4], посвященной изучению устойчивости струйных течений в атмосфере.

2. Для рассматриваемого установившегося течения выполняется теорема Бернулли

$$\frac{\mathbf{v}_0^2}{2} + w_0 + \varphi = k(s_0, \Omega_0) \tag{2.1}$$

Здесь $k(s_0, \Omega_0)$ — некоторая константа вдоль линии тока. Из этой формулы можно получить несколько следствий. Возьмем градиент от обеих частей этого равенства

$$\mathbf{v}_0\times\operatorname{rot}\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0\cdot\nabla)\mathbf{v}_0 + \operatorname{grad}(w_0+\varphi) = k_s\operatorname{grad} s_0 + k_\Omega\operatorname{grad}\Omega_0$$

или, принимая во внимание уравнение Эйлера (1.2),

$$\mathbf{v}_0\times(\operatorname{rot}\mathbf{v}_0 + 2\omega) + T_0\operatorname{grad} s_0 = k_s\operatorname{grad} s_0 + k_\Omega\operatorname{grad}\Omega_0 \tag{2.2}$$

Умножим векторно обе части этого равенства на grad s_0, и преобразуем по формуле двойного векторного произведения

$$-\mathbf{v}_0(\operatorname{grad} s_0\cdot\zeta_0)+\zeta_0(\operatorname{grad} s_0\cdot\mathbf{v}_0)=k_\Omega \operatorname{grad}\Omega_0\times\operatorname{grad} s_0$$

Член grad $s_0\cdot\mathbf{v}_0$ равен нулю в силу постоянства s_0 вдоль линии тока. Первое слагаемое есть $-\rho_0\Omega_0\mathbf{v}_0$. Итак,

$$\rho_0\mathbf{v}_0=\frac{k_\Omega}{\Omega_0}\operatorname{grad} s_0\times\operatorname{grad}\Omega_0 \tag{2.3}$$

Смысл этой формулы очевиден. Скорость направлена по касательной к поверхности уровня сохраняющихся величин s_0 и Ω_0. Кроме того, площадь трубки тока обратно пропорциональна $|\operatorname{grad} s_0\times\operatorname{grad}\Omega_0|$. Как следует из закона сохранения массы, коэффициент пропорциональности между $\rho_0\mathbf{v}_0$ и grad $s_0\times$ grad Ω_0 должен быть постоянным на линии тока.

Теперь умножим обе части (2.2) векторно на grad Ω_0. Точно так же, преобразуя по формуле двойного векторного произведения, воспользовавшись также формулой (2.3), будем иметь

$$\frac{\operatorname{grad}\Omega_0\cdot\zeta_0}{\rho_0}=(T_0-k_s)\cdot\frac{\Omega_0}{k_\Omega} \tag{2.4}$$

Величина в левой части построена аналогично потенциальному вихрю, но вместо s_0 — здесь другая сохраняющаяся величина, Ω_0.

3. Выпишем функционалы, сохраняющиеся в силу уравнений движения. Первый из них — это интеграл энергии (см. [5], стр. 24).

$$\frac{dE}{dt}=0,\qquad E=\iiint\rho\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}+c_vT+\varphi\right)dV$$

Второй следует из сохраняемости s и Ω для индивидуальных частиц

$$\frac{dF}{dt}=0,\qquad F=\iiint\rho\Phi(s,\Omega)\,dV$$

Здесь Φ — произвольная функция двух переменных. Покажем, что всегда можно подобрать эту функцию таким образом, что функционал $I=E+F$ будет иметь данное установившееся течение своей стационарной точкой, т. е. первая вариация этого функционала там будет обращаться в нуль. Варьируем этот функционал, считая независимыми вариациями $\delta\mathbf{v}$, δs, $\delta\rho$, а δT выражая через них по формуле

$$\delta T=T\delta s\,/\,c_v+p\delta\rho\,/\,\rho^2c_v$$

Находим

$$\delta I=\iiint\Big\{\rho\mathbf{v}\,\delta\mathbf{v}+\frac{1}{2}v^2\delta\rho+w\delta\rho+\rho T\delta s+\varphi\delta\rho+\Phi\delta\rho+$$
$$+\rho\left[\Phi_s\delta s+\Phi_\Omega\left(\frac{\operatorname{grad}\delta s\cdot\zeta}{\rho}+\frac{\operatorname{grad} s\cdot\operatorname{rot}\delta\mathbf{v}}{\rho}-\frac{\Omega}{\rho}\delta\rho\right)\right]\Big\}\,dV$$

Члены, содержащие grad δs и rot $\delta\mathbf{v}$, преобразуем интегрированием по частям

$$\iiint\Phi_\Omega\operatorname{grad}\delta s\cdot\zeta dV=-\iiint(\Phi_{\Omega\Omega}\operatorname{grad}\Omega+\Phi_{\Omega s}\operatorname{grad} s)\cdot\zeta\delta s dV=$$
$$=-\iiint\rho\left[\Phi_{\Omega\Omega}\frac{\operatorname{grad}\Omega\cdot\zeta}{\rho}+\Phi_{\Omega s}\cdot\Omega\right]\delta s dV$$

$$\iiint\Phi_\Omega\operatorname{grad} s\cdot\operatorname{rot}\delta\mathbf{v}\,dV=-\iiint\Phi_{\Omega\Omega}\operatorname{grad} s\times\operatorname{grad}\Omega\cdot\delta\mathbf{v}\,dV$$

После этого будем иметь

$$\delta I = \delta I_1 + \delta I_2 + \delta I_3$$

Здесь

$$\delta I_1 = \iiint (\rho \mathbf{v} - \Phi_{\Omega\Omega} \operatorname{grad} s \times \operatorname{grad} \Omega)\, \delta \mathbf{v}\, dV$$

$$\delta I_2 = \iiint \rho \left(T + \Phi_s - \Phi_{\Omega\Omega} \cdot \frac{\operatorname{grad} \Omega \cdot \boldsymbol{\zeta}}{\rho} - \Phi_{\Omega s} \cdot \Omega\right) \delta s dV$$

$$\delta I_3 = \iiint \left(\frac{v^2}{2} + w + \varphi + \Phi - \Omega \cdot \Phi_\Omega\right) \delta \rho dV$$

Чтобы вариация равнялась нулю, необходимо, чтобы коэффициенты при независимых вариациях обратились в нуль, если в качестве $\mathbf{v}$, s и ρ подставить величины, относящиеся к нашему установившемуся течению. Если учесть (2.1), (2.3) и (2.4), то это дает три уравнения

$$k_\Omega / \Omega - \Phi_{\Omega\Omega} = 0, \quad \Phi_s + k_s - \Phi_{\Omega s} \cdot \Omega = 0, \quad k + \Phi - \Phi_\Omega \cdot \Omega = 0$$

из которых независимо лишь одно — третье, а первые два являются простыми его следствиями. Именно, первое получается дифференцированием третьего по Ω, а второе — по s. Таким образом, если в качестве Φ взять функцию, удовлетворяющую уравнению

$$k + \Phi - \Phi_\Omega \cdot \Omega = 0 \tag{3.1}$$

то для данного течения построенный функционал I имеет стационарное значение.

Приведем без вывода выражение для второй вариации

$$\delta^2 I = \iiint \Big[\rho \delta v^2 + 2\mathbf{v}\, \delta \mathbf{v}\, \delta\rho + \frac{p}{\rho^2} \delta\rho^2 + \frac{\rho k_\Omega}{\Omega} \left(\frac{T - k_s}{k_\Omega} \delta s - \delta \Omega\right)^2 +$$
$$+ \frac{p}{c_v R}\left(\delta s + \frac{R}{\rho} \delta\rho\right)^2 - \frac{\operatorname{grad} T \cdot \boldsymbol{\zeta}}{\Omega} \delta s^2 - \frac{2}{\Omega} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\zeta} \cdot \operatorname{rot} \delta \mathbf{v}\, \delta s\Big] dV \tag{3.2}$$

Если бы оно оказалось для некоторого течения положительным, то течение было бы устойчивым. По-видимому, последний член второй вариации исключает такую возможность, как это имеет место и в работе В. И. Арнольда [2]. Может быть, полученное выражение может пролить в таком случае некоторый свет на механизм потери устойчивости.

Автор благодарит В. И. Арнольда, под влиянием которого возникла тема настоящей заметки.

Поступила 28 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости. Докл. АН СССР, 1965, т. 162, № 5.
2. Арнольд В. И. Вариационный принцип для трехмерных стационарных течений идеальной жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. т. I, Гостехиздат, 1955.
4. Charney J. G., Stern M. E. On the stability of internal baroclinic jets in a rotating atmosphere. J. Atmos. Sci., 1962, vol. 19, No. 2.
5. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.