Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

# ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

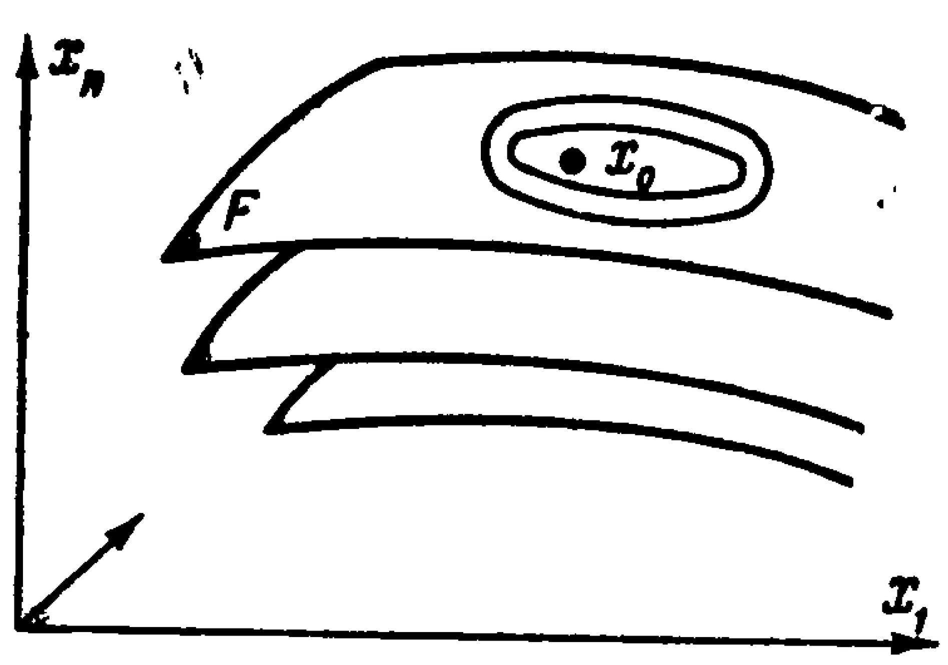
**В. И. Арнольд**

(Москва)

Доказывается, что стационарное течение имеет экстремальную кинетическую энергию по сравнению с «равнозавихренными» течениями. Результат применяется к исследованию устойчивости стационарных течений: если экстремум есть минимум или максимум, то течение устойчиво, т. е. малое изменение начального поля скоростей мало меняет поле скоростей во все моменты времени. Для выяснения характера экстремума (максимум, минимум и т. д.) явно вычислена вторая вариация. В случае плоских течений получены достаточные условия устойчивости относительно малых конечных возмущений, близкие к необходимым.

**§ 1. Конечномерная модель.** Покажем, что уравнения трехмерной гидродинамики идеальной жидкости являются бесконечно-мерным аналогом следующей конечномерной ситуации. Пусть в пространстве $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{x}^{\cdot} = f(\mathbf{x}) \qquad (1.1)$$




Фиг. 1

Кроме того, предположим, что в пространстве x задано «$k$-мерное слоение» (см. фигуру), т. е. что пространство разбито на $k$-мерные «листы» (на фигуре: $n = 3$, $k = 2$). Будем предполагать, что слоение инвариантно относительно системы (1.1), т. е. что траектория $\mathbf{x}(t)$, начавшаяся на листе $F$, на нем и остается. Точку x листа $F$ назовем регулярной, если в окрестности этой точки существует система координат $y_1, \ldots, y_n$, в которой листы задаются уравнениями $y_{k+1} = c_{k+1}, \ldots, y_n = c_n$. В целом же листы могут и не задаваться уравнениями (например, лист может быть всюду плотным).

Предположим, наконец, что система (1.1) имеет первый интеграл $E(\mathbf{x})$. Рассмотрим локальный условный экстремум функции $E$ на листе $F$. Предположим, что он достигается в регулярной точке $\mathbf{x}_0$ и что квадратичная форма $d^2E$ на листе $F$ невырождена. Легко доказываются следующие три теоремы (ср. [1]).

*Теорема* 1.1. Точка $\mathbf{x}_0$ есть положение равновесия системы (1.1)

$$f(\mathbf{x}_0) = 0$$

*Теорема* 1.2. Если экстремум — максимум или минимум, то положение равновесия $\mathbf{x}_0$ устойчиво относительно конечных малых возмущений.

*Теорема* 1.3. Спектр соответствующей (1.1) задачи о малых колебаниях $A\xi = \lambda\xi$ ($A = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$ в $\mathbf{x}_0$) симметричен относительно вещественной и мнимой осей $\lambda$.

Ниже будут сформулированы гидродинамические аналоги этих теорем. Фактически они являются следствиями общих теорем о геодезических групп Ли, снабженных односторонне инвариантной метрикой (см. [2]). Однако здесь дается независимое доказательство, не использующее ни групп Ли, ни даже теорем существования и единственности соответствующих уравнений в частных производных: с математической точки зрения, эти теоремы будут «априорными» равенствами и оценками.

**§ 2. Обозначения.** Пусть $D$ — ограниченная неподвижной поверхностью $\Gamma$ область в трехмерном евклидовом пространстве; $\mathbf{v}$ — поле скоростей идеальной (несжимаемой, с плотностью *1*, невязкой, вне поля непотенциальных массовых сил) жидкости, заполняющей объем $D$, а $p$ — давление.

Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} = -\operatorname{grad} p, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \qquad \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{на } \Gamma \tag{2.1}$$

имеет следствием уравнение Бернулли

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v}\times\mathbf{r} - \operatorname{grad}\lambda, \qquad \mathbf{r} = \operatorname{rot}\mathbf{v}, \qquad \lambda = p + {}^1/_2\mathbf{v}^2 \tag{2.2}$$

Отсюда, ввиду тождества

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \{\mathbf{AB}\} + \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B} - \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A} \tag{2.3}$$

вытекает

$$\partial\mathbf{r}\,/\,\partial t = \{\mathbf{vr}\} \tag{2.4}$$

Здесь $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ — скобка Пуассона векторных полей

$$\{\mathbf{AB}\}_i = \sum (\partial A_i\,/\,\partial x_j)\,B_j - (\partial B_i\,/\,\partial x_j)\,A_j$$

Если $g$ — гладкое отображение $x \to g\,(x)$, то через $g^*$ будем обозначать соответствующее отображение векторов

$$(g^*\xi)_i = \sum (\partial g_i\,/\,\partial x_j)\,\xi_j$$

**§ 3. Равнозавихренные поля.** Чтобы сформулировать закон сохранения вихря в удобной для последующего форме, рассмотрим два векторных поля $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ в $D$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}' = 0, \quad (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) = 0, \quad \mathbf{v}'\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{на } \Gamma$$

*Определение* 3.1. Поля $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ равнозавихрены, если существует сохраняющее объем гладкое отображение $g$ области $D$ на себя такое [1], что

$$\oint_{\gamma} \mathbf{v}\,dx = \oint_{g\gamma} \mathbf{v}'\,dx \tag{3.1}$$

для любого замкнутого контура $\gamma$ в области $D$.

Закон сохранения вихря принимает теперь следующий вид. Пусть $\mathbf{v}\,(\mathbf{x}, t)$ — поле скоростей идеальной жидкости (2.1).

[1] Отображение $g$ переводит вихрь $\mathbf{v}$ в вихрь $\mathbf{v}'$

$$g^*\operatorname{rot}\mathbf{v} = \operatorname{rot}\mathbf{v}' \tag{3.2}$$

Действительно, если $\xi$, $\eta$ — бесконечно малый параллелограмм, то, так как $\det g^* = 1$:

$$\xi\times\eta\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v} = (g^*\xi)\times(g^*\eta)\cdot(g^*\operatorname{rot}\mathbf{v})$$

а согласно (3.1)

$$(\xi\times\eta\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}) = (g^*\xi)\times(g^*\eta)\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}'$$

Если область $D$ неодносвязна, то условие (3.1) сильнее, чем (3.2).

*Теорема* 3.1. Поля $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)$ и $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ равнозавихрены. Действительно, пусть $\mathbf{x}(t)$ — траектория жидкой частицы. Тогда отображение $g$ есть то, которое переводит $\mathbf{x}(0)$ в $\mathbf{x}(t)$.

Будем рассматривать теперь уравнение Эйлера (2.1) как систему (1.1) в бесконечномерном пространстве векторных полей $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ (где $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ и $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ на $\Gamma$). Покажем, что эта система обладает свойствами системы (1.1). В пространстве полей $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ задано слоение: два поля принадлежат одному листу, если они равнозавихрены. Согласно теореме 3.1, это слоение инвариантно. Стационарные течения являются «положениями равновесия» системы. Наконец, уравнение Эйлера (2.1) имеет первый интеграл энергии

$$2E = \iiint \mathbf{v}^2 \, dx$$

Чтобы перенести результаты § 1 на уравнения гидродинамики (2.1) нужно вычислить первую и вторую вариации функции $E$ на листе $F$.

**§ 4. Вариационный принцип**[1]. Аналогом теоремы 1.1 является следующая основная

*Теорема* 4.1. Стационарное течение $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ имеет экстремальную энергию по сравнению со всеми близкими равнозавихренными течениями $\mathbf{v}'(\mathbf{x})$.

Под близостью здесь понимается близость «по листу», т. е. $\mathbf{v}'(\mathbf{x})$ считается близким к $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, если соответствующее отображение $g$ в (3.1) близко к тождественному. Чтобы определить близость $g$ к тождеству, введем в пространстве $g$ «координаты» $f$ следующим образом.

Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — векторное поле в $D$ такое, что

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = 0, \qquad \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на } \Gamma$$

*Определение* 4.1. Пусть $g_t = \exp ft$ — отображение $D$ в себя, определенное решениями $\mathbf{x}(t)$ обыкновенных дифференциальных уравнений $\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ по формуле $g(\mathbf{x}(0)) = \mathbf{x}(t)$.

Поле $\mathbf{v}'$ будем считать близким к $\mathbf{v}$, если «координаты» $f$ отображения $g$ в (3.1) малы. В этом случае, очевидно, мало также возмущение скорости $\delta\mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$. Связь между $\delta\mathbf{v}$ и $\mathbf{f}$ дается следующей формулой (4.2).

*Лемма* 4.1. Если для любого замкнутого контура $\gamma$ в $D$

$$\oint_{g_{-t}\gamma} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \oint_{\gamma} \mathbf{v}' \, d\mathbf{x}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0 \tag{4.1}$$

то

$$\mathbf{v}' - \mathbf{v} = t(\mathbf{f} \times \mathbf{r}) + {}^1/_2 t^2 \, \mathbf{f} \times \{\mathbf{fr}\} + O(t^3) + \operatorname{grad} \alpha \tag{4.2}$$

где $\alpha$ — однозначная функция, а $\mathbf{r} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$.

*Доказательство леммы.* По формуле Стокса

$$\frac{d}{dt} \oint_{g_{-t}\gamma} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = -\frac{1}{dt} \iint \mathbf{r} \, ds = \oint_{g_{-t}\gamma} \mathbf{f} \times \mathbf{r} \, d\mathbf{x} \tag{4.3}$$

---

[1] Другой вариационный принцип, относящийся к нестационарным течениям, указал и использовал при исследовании устойчивости Р. Фиортофт [3].

Так как якобиан $g_{-t}^*$ равен единице, то имеем

$$\oint\limits_{g_{-t}\gamma} \mathbf{f}\times\mathbf{r}\,d\mathbf{x} = \int\limits_{\gamma} g_t^*\mathbf{f}\,(g_{-t}\mathbf{x})\times g_t^*\mathbf{r}\,(g_{-t}\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \qquad (4.4)$$

Но по определению $g_t$ имеем $g_t^*\mathbf{f}\,(g_{-t}\,\mathbf{x}) = \mathbf{f}\,(\mathbf{x})$. Поэтому (4.3) и (4.4) дают

$$\frac{d}{dt}\oint\limits_{g_{-t}\gamma} \mathbf{v}\,d\mathbf{x} = \oint\limits_{\gamma} \mathbf{f}\times\mathbf{r}\,(t)\,d\mathbf{x} \qquad (4.5)$$

Здесь поле $\mathbf{r}\,(t)$ определено формулой

$$\mathbf{r}\,(\mathbf{x},\,t) = g_t^*\mathbf{r}\,(g_{-t}\mathbf{x}) \qquad (4.6)$$

Дифференцируя (4.6), находим

$$\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t=0} = \{\mathbf{fr}\}, \qquad \mathbf{r}\,(t) = \mathbf{r} + \{\mathbf{fr}\}\,t + O\,(t^2) \qquad (4.7)$$

Но по условию (4.1)

$$\frac{d}{dt}\oint\limits_{g_{-t}\gamma} \mathbf{v}\,d\mathbf{x} = \oint\limits_{\gamma} \frac{\partial\mathbf{v}'}{\partial t}\,d\mathbf{x}, \qquad \mathbf{v}'\,|_{t=0} = \mathbf{v} \qquad (4.8)$$

Интегрируя (4.5) и (4.6) по $t$, находим из (4.6)

$$\oint\limits_{\gamma} (\mathbf{v}' - \mathbf{v})\,d\mathbf{x} = \oint\limits_{\gamma}\int\limits_{0}^{t} \mathbf{f}\times[\mathbf{r} + \{\mathbf{f},\,\mathbf{r}\}\,t + O\,(t^2)]\,dt\,d\mathbf{x}$$

что эквивалентно (4.2).

*Доказательство основной теоремы.* Если $\mathbf{v}'$ — близкое к стационарному течению $\mathbf{v}$ равнозавихренное течение, то, согласно (4.2), первая вариация

$$\delta\mathbf{v} = \mathbf{f}\times\mathbf{r} + \operatorname{grad}\alpha$$

Поэтому

$$\delta E = \iiint \mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{v}\,d\mathbf{x} = \iiint \mathbf{v}\cdot(f\times r + \operatorname{grad}\alpha)\,d\mathbf{x} = \iiint [\mathbf{f}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\alpha]\,d\mathbf{x}$$

Для стационарного течения, согласно (2.2),

$$\mathbf{r}\times\mathbf{v} = -\operatorname{grad}\lambda$$

Поэтому

$$\delta E = \iiint (\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\alpha - \mathbf{f}\cdot\operatorname{grad}\lambda)\,d\mathbf{x} = 0$$

Этот результат получается интегрированием по частям с учетом равенств

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{f} = 0; \qquad (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,|_{\Gamma} = 0, \quad (f,\,n)\,|_{\Gamma} = 0$$

Теорема доказана.

**§ 5. Формула второй вариации.** Согласно лемме (4.1)

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \delta\mathbf{v} + \delta^2\mathbf{v} + O\,(f^3)$$

где

$$\delta\mathbf{v} = \mathbf{f}\times\mathbf{r} + \operatorname{grad}\alpha_1, \qquad \delta^2\mathbf{v} = \tfrac{1}{2}\,[\mathbf{f}\times\{\mathbf{fr}\}] + \operatorname{grad}\alpha_2$$

Соответственно

$$2\delta^2 E = \iiint \left[(\delta\mathbf{v})^2 + 2(\mathbf{v}\cdot\delta^2\mathbf{v})\right] dx = \iiint \left[(\delta\mathbf{v})^2 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{f}\times\{\mathbf{fr}\} + 2\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\alpha_2\right] dx$$

Интегрируя последний член по частям, получаем в переменных $\mathbf{f}$, введенных в § 4, для второй вариации энергии $E$ на «листе» $F$, равнозавихренных с $\mathbf{v}$ полей, следующую форму:

$$2\delta^2 E = \iiint (\delta\mathbf{v})^2 + \mathbf{v}\times\mathbf{f}\{\mathbf{f}\cdot\mathbf{r}\}\,dx \tag{5.1}$$

Это выражение (5.1) будет квадратичной формой относительно $\mathbf{f}$, так как $\delta\mathbf{v}$, выражаемое через $\mathbf{f}$ линейно, равна

$$\delta\mathbf{v} = \mathbf{f}\times\mathbf{r} + \operatorname{grad}\alpha_1$$

где $\alpha_1$ определяется из условий $\operatorname{div}\delta\mathbf{v} = 0$ и $(\delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})|_\Gamma = 0$ и потому линейно зависит от $\mathbf{f}$. Заметим также, что, согласно формуле (2.3), $\{\mathbf{fr}\} = \delta\mathbf{r}$.

Аналогом теоремы 1.2 будет следующая теорема.

*Теорема* 5.1. Если квадратичная форма (5.1) знакоопределена, то течение $\mathbf{v}$ устойчиво относительно малых конечных возмущений. Под малым возмущением здесь понимается такое, для которого малы $\delta\mathbf{v}$ и $\mathbf{f}$, т. е. $\delta\mathbf{v}$ и $\delta\mathbf{r}$ или форма $|\delta^2 E|$.

Форма (5.1) является первым интегралом линейной задачи о малых колебаниях вблизи стационарного течения $\mathbf{v}$. В соответствии с теоремой (1.3), спектр этой задачи симметричен относительно обеих осей. Отсюда

*Теорема* 5.2. Если какое-нибудь возмущение стационарного течения $\mathbf{v}$ затухает, то другое возмущение нарастает и течение $\mathbf{v}$ неустойчиво.

Автору не удалось найти течений $\mathbf{v}$, для которых квадратичная форма $\delta^2 E$ знакоопределена при трехмерных возмущениях. Однако в специально симметричных случаях теорема 5.1 дает простые критерии устойчивости.

**§ 6. Дополнительные интегралы.** Обобщая теорему 1.2, предположим, что уравнение Эйлера (2.1) имеет первый интеграл $M$ такой, что для стационарного течения $\mathbf{v}$

$$\delta M = \iiint \mathbf{A}\cdot\delta\mathbf{v}\,dx \qquad (\mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{v} = \operatorname{grad}\alpha) \tag{6.1}$$

Предположение (6.1) выполнено в следующих трех примерах.

*Пример* 6.1. Для интеграла энергии $M_1 = E$ имеем

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} = [\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}] = \operatorname{grad}\lambda$$

согласно (2.2).

*Пример* 6.2. Если область $D$ и течение $\mathbf{v}$ инвариантны относительно сдвигов вдоль оси $x$, то сохраняется интеграл

$$M_2 = \iiint \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_x\,dx\,dy\,dz$$

Для него $A = \mathbf{e}_x$ и $\mathrm{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{v} = \operatorname{grad}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_x)$.

*Пример* 6.3. Если область $D$ и течение $\mathbf{v}$ инвариантны относительно вращений вокруг оси $z$, то сохраняется

$$M_3 = \iiint (\mathbf{v}\times\mathbf{R}\cdot\mathbf{e}_z)\,dx\,dy\,dz$$

где $R$ — радиус-вектор точки $x$, $y$, $z$. В этом случае

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\times\mathbf{e}_z, \qquad \mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{v} = \operatorname{grad}(\mathbf{v}\times\mathbf{R}\cdot\mathbf{e}_z)$$

*Теорема* 6.1. Значение интеграла $M$ на поле скоростей стационарного течения $\mathbf{v}$ экстремально по сравнению со значениями на близких равнозавихренных полях, если только $M$ удовлетворяет условию (6.1).

Доказательство идентично доказательству теоремы (1.2). Соответствующие формулы второй вариации имеют вид

$$2\delta^2 M_2 = \iiint (\mathbf{e}_x \times \mathbf{f}) \{\mathbf{fr}\} \, dx \, dy \, dz \tag{6.2}$$

$$2\delta^2 M_3 = \iiint (R \times \mathbf{e}_z \times \mathbf{f}) \{\mathbf{fr}\} \, dx \, dy \, dz \tag{6.3}$$

Для устойчивости $\mathbf{v}$ достаточна знакоопределенность какой-нибудь линейной комбинации

$$\lambda_1 \delta^2 M_1 + \lambda_2 \delta^2 M_2 + \lambda_3 \delta^2 M_3$$

Проиллюстрируем применение теоремы 5.1 и формул (5.1), (6.2), (6.3) на примере плоских течений.

**§ 7. Плоские возмущения плоских течений.** Пусть течение $\mathbf{v}$ имеет функцию тока $\psi(x, y)$, так что

$$\mathbf{v} = \psi_y, \ -\psi_x, \ 0; \qquad \mathbf{r} = 0, \ 0, \ -\Delta\psi \tag{7.1}$$

Подставляя (7.1) в (5.1), получаем после небольшого вычисления, учитывая $\{\mathbf{fr}\} = \delta\mathbf{r}$, указанную в [1] формулу

$$2\delta^2 E = \iint \left[ (\delta\mathbf{v})^2 + \frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi} (\delta\mathbf{r})^2 \right] dx \, dy \tag{7.2}$$

Из (7.2) и теоремы 5.1 вытекает

*Следствие* 7.1 (ср. [1]). В любой области плоские течения с вогнутым профилем скоростей ($\nabla\psi \,/\, \nabla\Delta\psi > 0$) устойчивы относительно конечных плоских возмущений.

Обратимся к специально симметричным течениям. Случай плоскопараллельных течений (теорема Релея) рассмотрен подробно в [1]. Рассмотрим течение по концентрическим окружностям в круговом кольце. После небольшого вычисления формула (6.3) в плоском случае приводится к виду

$$2\delta^2 M_3 = \frac{\frac{1}{2}\nabla R^2}{\nabla\Delta\psi} (\delta\mathbf{r})^2 \tag{7.3}$$

Из (7.3) и теоремы (5.1) вытекает

*Следствие* 7.2. Плоское круговое течение в круговом кольце устойчиво относительно конечных малых плоских возмущений, если вихрь монотонно меняется с радиусом.

Действительно, если $\nabla R^2 \,/\, \nabla\Delta\psi$ сохраняет знак, то при надлежащем $\lambda$ форма

$$\delta^2 H = \delta^2 E + \lambda \delta^2 M_3$$

положительно определена.

Заметим, наконец, что проведенное в [1] исследование параллельных течений с одной точкой перегиба переносится благодаря формуле (7.3) на круговые течения.

Поступила 14 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости. Докл. АН СССР, 1965, т. 162, № 5.
2. Moreau G. G. Mecanique des Fluides — une methode de «Cinematique Fonstionnelle» et hudrodinamique. Compt. rend. Acad. France, 1959, vol. 249, No. 21, p. 2156.
3. Fjørtoft R. Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex, Geofis. Publ. Norske Vid. Akad., Oslo, 1960, vol. 17, No. 6, p. 52.