Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

ОБ УРАВНЕНИЯХ НЕВОЗМУЩЕННОЙ РАБОТЫ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

В. Д. Андреев

(Москва)

Рассматривается инерциальная система, автономно определяющая координаты объекта и параметры, характеризующие его ориентацию в пространстве, при помощи ньютонометров и гироскопов [1,2]. В отличие от [2], где определяемыми координатами были декартовы, рассматривается общий случай определения произвольных нестационарных косоугольных криволинейных координат. Выводятся уравнения невозмущенного функционирования такой инерциальной системы, когда за основу ее кинематической схемы взяты гиростабилизированная платформа или управляемая гирорама.

1. Введем правую ортогональную систему координат $O_1\xi^1\xi^2\xi^3$, начало которой совмещено с центром Земли, а ориентация осей неизменна по отношению к направлениям из центра Земли на удаленные звезды. Положение движущегося объекта (какой-либо его точки O) определим относительно $O_1\xi^1\xi^2\xi^3$ координатами $\varkappa^1$, $\varkappa^2$, $\varkappa^3$, так что

$$\xi^s = \xi^s(\varkappa^1, \varkappa^2, \varkappa^3, t), \qquad J = \frac{D(\xi^1, \xi^2, \xi^3)}{D(\varkappa^1, \varkappa^2, \varkappa^3)} \neq 0 \tag{1.1}$$

Здесь и далее латинские индексы пробегают значения от 1 до 3. Согласно второму соотношению (1.1) определитель Якоби функций ξ^s по координатам $\varkappa^n$ отличен от нуля, поэтому во всей области возможных движений объекта соотношения (1.1) обратимы.

Схему инерциальной системы навигации будем представлять себе следующим образом. В качестве ее основы используется гиростабилизированная платформа, оси которой совпадают с направлением осей ξ^s системы координат $O_1\xi^1\xi^2\xi^3$. На гиростабилизированной платформе установлены при помощи специальной кинематической схемы три ньютонометра, единичные векторы направлений осей чувствительности которых обозначим через $\mathbf{e}_s$, а показания их через n_{e_s}. Кинематическую схему будем предполагать такой, что она может обеспечить заданную зависимость ориентации направлений $\mathbf{e}_s$ от определенных инерциальной системой координат $\varkappa^s$ и времени: $\mathbf{e}_s = e_s(\varkappa^1, \varkappa^2, \varkappa^3, t)$. Направления $\mathbf{e}_s$ не компланарны.

Введем основной координатный базис [3,4], образованный векторами

$$\mathbf{r}_s = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varkappa^s}, \qquad \mathbf{r} = \xi^s \boldsymbol{\xi}_s \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из центра Земли O_1 в точку O объекта; $\boldsymbol{\xi}_s$ — единичные векторы осей ξ^s. Во втором равенстве (1.2), как и в дальнейшем, латинский индекс, повторенный дважды (вверху и внизу), обозначает суммирование по этому индексу от *1* до *3*. Векторы $\mathbf{r}_s$ в силу условия (1.1) некомпланарны. Введем также взаимный базис, образованный векторами $\mathbf{r}^s$, взаимными к векторам $\mathbf{r}_s$.

Наконец, введем метрический тензор A пространства, определяемого криволинейными координатами $\varkappa^s$. Ковариантные, контравариантные и смешанные составляющие этого тензора обозначим через a_{sk}, a^{sk}, a_s^k, так что

$$a_{sk} = \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{r}_k, \qquad a^{sk} = \mathbf{r}^s \cdot \mathbf{r}^k, \qquad a_s^k = \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{r}^k \tag{1.3}$$

Величинами, замеряемыми ньютонометрами, расположенными вдоль направлений $\mathbf{e}_s$, будут [2]

$$n_{e_s} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_s, \qquad \mathbf{n} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \mathbf{g}\,(\mathbf{r}) \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{g}\,(\mathbf{r})$ — напряженность поля тяготения Земли в точке O, характеризующей текущее местоположение объекта и определенной радиусом-вектором $\mathbf{r}$.

Пусть $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ — абсолютные скорость и ускорение точки O в системе координат $O_1\xi^1\xi^2\xi^3$. Ковариантные и контравариантные составляющие вектора $\mathbf{v}$ равны

$$v^s = \varkappa^{s\cdot} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \mathbf{r}^s, \qquad v_s = a_{sk} v^k \tag{1.5}$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени.

Дифференцируя вектор $\mathbf{v} = \mathbf{r}_s v^s$ по времени, получаем

$$\mathbf{w} = \mathbf{r}_s \varkappa^{s\cdot\cdot} + \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial \varkappa^k} \varkappa^{s\cdot} \varkappa^{k\cdot} + 2 \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial t} \varkappa^{s\cdot} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} \tag{1.6}$$

Чтобы выписать выражения для составляющих w_s, w^s вектора $\mathbf{w}$, введем символы Кристоффеля первого $\Gamma_{sk,m}$ и второго Γ_{sk}^m рода [3,4], а также символы $\Gamma_{00,s}$, $\Gamma_{0k,s}$ и Γ_{00}^s, Γ_{0k}^s, определяемые соотношениями

$$\Gamma_{00,s} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{r}_s, \qquad \Gamma_{0k,s} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial \varkappa^k} \cdot \mathbf{r}_s, \qquad \Gamma_{00}^s = a^{sn} \Gamma_{00,n}, \qquad \Gamma_{0k}^s = a^{sn} \Gamma_{0k,n} \tag{1.7}$$

Эти символы аналогичны по смыслу символам Кристоффеля, но не выражаются, в отличие от них, через составляющие метрического тензора. Символы $\Gamma_{00,s}$, $\Gamma_{0k,s}$ и Γ_{00}^s, Γ_{0k}^s характеризуют нестационарность координатной сетки $\varkappa^s$. В случае, если правые части первых равенств (1.1) не зависят явно от времени, т. е. координатная сетка стационарна, эти символы обращаются в нуль.

Из (1.6), (1.7) и определения символов Кристоффеля получаем

$$w^s = \varkappa^{s\cdot\cdot} + \Gamma_{mn}^s \varkappa^{m\cdot} \varkappa^{n\cdot} + 2\Gamma_{0n}^s \varkappa^{n\cdot} + \Gamma_{00}^s, \qquad w_s = a_{sr} w^r \tag{1.8}$$

Для стационарных координат формулы (1.8) превращаются, естественно, в обычные формулы ковариантного дифференцирования вектора $\mathbf{v}$.

Теперь из (1.4), (1.8)

$$n^s = \varkappa^{s\cdot\cdot} + \Gamma_{mn}^s \varkappa^{m\cdot} \varkappa^{n\cdot} + 2\Gamma_{0n}^s \varkappa^{n\cdot} + \Gamma_{00}^s - g^s, \qquad n_s = a_{sr} n^r \tag{1.9}$$

Здесь n^s, g^s, n_s, g_s — контравариантные и ковариантные составляющие векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{g}$ в основном базисе.

Вектор $\mathbf{g}$ задан в системе координат, связанной с Землей. Его можно считать заданным в системе координат $O_1, \xi^1\xi^2\xi^3$ лишь в предположении, что поле тяготения Земли сферично.

Введем систему координат $O_1\eta^1\eta^2\eta^3$, связанную жестко с Землей. Определим ее по отношению к системе координат $O_1, \xi^1\xi^2\xi^3$ направляющими косинусами α_{ij} $(= \alpha^{ij} = \alpha_i^j)$, так что единичные векторы $\boldsymbol{\eta}_s$ осей η^s

$$\boldsymbol{\eta}_s = \alpha_s^n \boldsymbol{\xi}_n \tag{1.10}$$

В системе координат $O_1, \eta^1\eta^2\eta^3$

$$\mathbf{g} = \operatorname{grad} U, \qquad U = U(\eta^1, \eta^2, \eta^3) \tag{1.11}$$

где U — силовая функция поля тяготения. Поэтому

$$g_s = \operatorname{grad}^l U\eta_{ls}, \qquad g^s = \operatorname{grad}^l U\eta_l^s \tag{1.12}$$

В последних равенствах через η_{ls} и η_l^s обозначены ковариантные и контравариантные составляющие орта $\boldsymbol{\eta}_l$ в основном базисе.

На основании формул (1.4), (1.9), (1.12) находим выражения для величин, измеряемых ньютонометрами,

$$n_{e_s} = (\varkappa^{k\cdot\cdot} + \Gamma_{mn}^k \varkappa^{m\cdot}\varkappa^{n\cdot} + 2\Gamma_{0n}^k \varkappa^{n\cdot} + \Gamma_{00}^k - \operatorname{grad}^l U\eta_l^k)\, e_{sk} \tag{1.13}$$

Здесь e_{sk} — ковариантные составляющие вектора $\mathbf{e}_s$ по векторам $\mathbf{r}_s$.

2. Перейдем к построению уравнений работы инерциальной системы. Задача заключается в том, чтобы по величинам (1.13), замеренным ньютонометрами, определить координаты $\varkappa^s$.

Первой операцией над показаниями ньютонометров должно быть интегрирование [2]. Поэтому из (1.13) получаем

$$\varkappa^{k\cdot} e_{sk} = \int_0^t [n_{e_s} + \varkappa^{k\cdot} e_{sk}^{\cdot} - (\Gamma_{mn}^k \varkappa^{m\cdot}\varkappa^{n\cdot} + 2\Gamma_{0n}^k \varkappa^{n\cdot} + \Gamma_{00}^k - \operatorname{grad}^l U\eta_l^k) e_{sk}]\, dt + $$
$$+ \varkappa^{k\cdot}(0)\, e_{sk}(0) \tag{2.1}$$

Разрешив левые части уравнений (2.1) относительно $\varkappa^{k\cdot}$, находим

$$\varkappa^{k\cdot} = (\varkappa^{m\cdot} e_{sm})\, E^{sk} / E \tag{2.2}$$

Здесь E — определитель, E^{sk} — алгебраическое дополнение s-й строки и k-го столбца матрицы $\|e_{sk}\|$. Теперь

$$\varkappa^k = \int_0^t \varkappa^{k\cdot}\, dt + \varkappa^k(0) \tag{2.3}$$

Если известны как функции $\varkappa^s$ и времени не e_{sk}, а направляющие косинусы единичных векторов $\mathbf{e}_s$ по отношению к осям стабилизированной платформы, т. е. по отношению к ортам $\boldsymbol{\xi}_s$ системы координат $O_1\xi^1\xi^2\xi^3$, то, обозначив эти направляющие косинусы через γ_s^l, получим $\mathbf{e}_s = \gamma_s^l \boldsymbol{\xi}_l$.

С другой стороны, $\mathbf{r}_k = (\partial\xi^l / \partial\varkappa^k)\, \boldsymbol{\xi}_l$. Поэтому

$$e_{sk} = \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{r}_k = \gamma_s^l \frac{\partial \xi^l}{\partial \varkappa^k} \tag{2.4}$$

К уравнениям (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) надо присоединить уравнения для η_l^k и связь η^l с $\varkappa^s$ и временем. Необходимые соотношения получаются из равенств [2]

$$\xi_l = \int_0^t (\xi_l \times \mathbf{u})\, dt + \xi_l(0), \qquad \mathbf{u} = u_\eta^s \boldsymbol{\eta}_s, \qquad \boldsymbol{\xi}_l = \alpha_l^k \boldsymbol{\eta}_k \tag{2.5}$$

Здесь $u_\eta{}^s$ — проекции вектора $\mathbf{u}$ угловой скорости вращения Земли на оси η^s, а α_l^k — введенные выше направляющие косинусы между осями $\xi^1\xi^2\xi^3$ и $\eta^1\eta^2\eta^3$.

Из второго равенства (2.5) и из (1.10)

$$\eta_l^k = \boldsymbol{\eta}_l \cdot \mathbf{r}^k = \alpha_{ls} a^{km} \frac{\partial \xi^s}{\partial \varkappa^m}, \qquad \eta^k = \alpha_s^k \xi^s \tag{2.6}$$

Соотношения (2.6), где ξ^s заданы равенствами (1.1), полностью определяют величины η_l^k и η^k, входящие в подынтегральные выражения правых частей формул (2.1).

Контравариантные составляющие η_l^k ортов $\boldsymbol{\eta}_l$ в основном базисе и координаты η^k могут быть вычислены и несколько иначе. Обратив уравнения (2.5), можно записать их в дифференциальной форме так

$$d\boldsymbol{\eta}_l \,/\, dt + \boldsymbol{\eta}_l \times \mathbf{u} = 0 \tag{2.7}$$

Из (2.7), проведя ковариантное дифференцирование $\boldsymbol{\eta}_l$, разрешив полученное уравнение относительно $\eta_l^{k\cdot}$ и проинтегрировав, находим

$$\eta_l^k = -\int_0^t [\eta_l^m (\Gamma_{sm}^k \varkappa^{s\cdot} + \Gamma_{0m}^k) + (\boldsymbol{\eta}_l \times \mathbf{u})\cdot \mathbf{r}^k]\, dt + \eta_l^k(0) \tag{2.8}$$

Для того чтобы раскрыть смешанные произведения векторов $\boldsymbol{\eta}_l$, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{r}^k$ в подынтегральных выражениях (2.8), удобно ввести символы Леви — Чивита

$$\varepsilon_{kns} = \mathbf{r}_k \cdot (\mathbf{r}_n \times \mathbf{r}_s), \qquad \varepsilon^{kns} = \mathbf{r}^k \cdot (\mathbf{r}^n \times \mathbf{r}^s) \tag{2.9}$$

С их помощью смешанное произведение $(\boldsymbol{\eta}_l \times \mathbf{u})\cdot \mathbf{r}^k$ может быть записано таким образом

$$(\boldsymbol{\eta}_l \times \mathbf{u})\cdot \mathbf{r}^k = \varepsilon^{ptk} \eta_{lp} u_t \tag{2.10}$$

Но $u_t = \mathbf{u}\cdot \mathbf{r}_t = u_\eta^i \eta_i^n a_{nt}$, $\eta_{lp} = \eta_l^q a_{qp}$. Поэтому равенство (2.10) превращается в следующее

$$(\boldsymbol{\eta}_l \times \mathbf{u})\cdot \mathbf{r}^k = \varepsilon^{ptk} \eta_l^q \eta_i^n a_{qp} a_{nt} u_\eta^i \tag{2.11}$$

Внося (2.11) в (2.8), приходим к соотношению

$$\eta_l^k = -\int_0^t [\eta_l^k (\Gamma_{sm}^k \varkappa^{s\cdot} + \Gamma_{0m}^k) + \varepsilon^{ptk} \eta_l^q a_{qp} a_{nt} \eta_i^n u_\eta^i]\, dt + \eta_l^k(0) \tag{2.12}$$

Наконец, из определения η^k, η_l^k и очевидного равенства $\mathbf{r} = \eta^k \boldsymbol{\eta}_k$ имеем

$$\eta^k = \frac{1}{2} \eta_k^s \frac{\partial (\mathbf{r})^2}{\partial \varkappa^s} \tag{2.13}$$

Здесь по индексу s ведется суммирование от 1 до 3.

Заметим, что первую группу уравнений (2.5), если воспользоваться определением символов Леви—Чивита, можно записать в раскрытом относительно α_l^k виде

$$\alpha_l^k = \int_0^t \frac{1}{J} \varepsilon_{ijk} \alpha_l^i u_{\eta}^j dt + \alpha_l^k(0) \tag{2.14}$$

где J — определитель Якоби (1.1).

Таким образом, уравнения невозмущенного функционирования инерциальной системы в том случае, когда направления $\mathbf{e}_s$ зависят от $\varkappa^s$ и времени произвольным образом, состоят из соотношений (2.1) — (2.3), (2.5), (2.14), (2.6), (1.11), или из равносильных им соотношений (2.1) — (2.3), (2.12), (2.13), (1.11). Эти соотношения определяют координаты $\varkappa^s$.

В рассматриваемой системе инерциальной навигации за основу кинематической схемы взята гиростабилизированная платформа. Углы поворотов колец карданова подвеса ее на объекте определяют, очевидно, ориентацию последнего по отношению к осям $\xi^1\xi^2\xi^3$, совпадающим с осями гиростабилизированной платформы. В то же время соотношения (1.2), (1.1) задают ориентацию векторов основного базиса, а соотношения $\mathbf{e}_s = \mathbf{e}_s(\varkappa^1, \varkappa^2, \varkappa^3, t)$ — направлений осей чувствительности ньютонометров. Следовательно, углы поворотов колец подвеса платформы на объекте вместе с (1.2), (1.1) определяют ориентацию последнего по отношению к базисным векторам, т. е. по отношению к координатным поверхностям $\varkappa^s = \text{const}$, а вместе с $\mathbf{e}_s = \mathbf{e}_s(\varkappa^1, \varkappa^2, \varkappa^3, t)$ — ориентацию по отношению к осям ньютонометров.

В п. 2 рассмотрена схема, в которой направления осей чувствительности $\mathbf{e}_s$ занимают произвольное положение. Было оговорено лишь, что эти направления некомпланарны и направляющие косинусы их с осями ξ^k известны как функции $\varkappa^s$ и времени. Интегрирование уравнений (1.13) было проведено путем выделения полных производных из сумм $\varkappa^{k\cdot\cdot} e_{sk}$. Разделение переменных проведено после первого интегрирования. Рассмотрим теперь другой способ.

3. Выберем направление осей чувствительности $\mathbf{e}_s$ так, чтобы показание каждого из трех ньютонометров содержало вторую производную по времени лишь одной из координат. Поставленному условию можно удовлетворить, выбрав e_{sk} так, что $e_{sk} = 0$, если $s \neq k$ и $e_{sk} = e_{ss} \neq 0$, если $s = k$. Такой выбор $\mathbf{e}_s$ означает, что направление $\mathbf{e}_s$ нормально $\mathbf{r}_k$ при $k \neq s$, а поэтому совпадает с вектором $\mathbf{r}^s$ взаимного базиса. Полученный результат легко было предвидеть, так как векторы $\mathbf{r}^s$ по своему определению нормальны к поверхностям равных значений координат, т. е. являются градиентными векторами. Из сказанного следует, что

$$\mathbf{e}_s = \frac{\mathbf{r}^s}{\sqrt{a^{ss}}}, \qquad \mathbf{e}_{ss} = \frac{1}{\sqrt{a^{ss}}} \tag{3.1}$$

Выражения (1.13) для величин n_{e_s} показаний ньютонометров принимают с учетом (3.1) вид (не суммировать по s!)

$$n_{e_s} = \frac{1}{\sqrt{a^{ss}}} (\varkappa^{s\cdot\cdot} + \Gamma_{mn}^s \varkappa^{m\cdot} \varkappa^{n\cdot} + 2\Gamma_{0n}^s \varkappa^{n\cdot} + \Gamma_{00}^s - \operatorname{grad}^l U \eta_l^s) \tag{3.2}$$

Чтобы избежать проведения вычислительных операций над показаниями ньютонометров до их интегрирования, преобразуем равенства (3.2), вычтя предварительно из левых и правых их частей величины $[{}^1/{}_2 \varkappa^{s\cdot} (a^{ss})^\cdot] (a^{ss})^{-3/2}$. Тогда получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\varkappa^{s\cdot}}{\sqrt{a^{ss}}} = n_{e_s} - \frac{1}{\sqrt{a^{ss}}} [\varkappa^{s\cdot} (\ln \sqrt{a^{ss}})^\cdot + \Gamma_{mn}^s \varkappa^{m\cdot} \varkappa^{n\cdot} + 2\Gamma_{0n}^s \varkappa^{n\cdot} + \Gamma_{00}^s - \operatorname{grad}^l U \eta_l^s] \tag{3.3}$$

Интегрируя (3.3), находим

$$\frac{\varkappa^{s\cdot}}{\sqrt{a^{ss}}}=\int_0^t\Big\{n_{e_s}-\frac{1}{\sqrt{a^{ss}}}[\varkappa^{s\cdot}(\ln\sqrt{a^{ss}})^{\cdot}+\Gamma_{mn}^{s}\varkappa^{m\cdot}\varkappa^{n\cdot}+2\Gamma_{0n}^{s}\varkappa^{n\cdot}+\Gamma_{00}^{s}-$$

$$-\operatorname{grad}^l U\eta_l^s]\Big\}dt+\frac{\varkappa^{s\cdot}(0)}{\sqrt{a^{ss}(0)}} \tag{3.4}$$

$$\varkappa^{s\cdot}=\left(\frac{\varkappa^{s\cdot}}{\sqrt{a^{ss}}}\right)\sqrt{a^{ss}},\qquad \varkappa^{s}=\int_0^t\varkappa^{s\cdot}dt+\varkappa^{s}(0)$$

Для определения η_l^s и η^s остаются, очевидно, в силе равенства (2.14), (2.5), (2.6) или (2.12), (2.13).

Ориентацию направлений осей чувствительности e_s определяют равенства (3.1) или соответствующая им таблица направляющих косинусов.

Ориентация объекта по отношению к направлениям $\mathbf{e}_s$ определяется этой таблицей и углами поворотов колец карданова подвеса платформы.

	ξ^1	ξ^2	ξ^3
$\mathbf{e}_s$	$\dfrac{\mathbf{r}^s\cdot\boldsymbol{\xi}_1}{\sqrt{a^{ss}}}$	$\dfrac{\mathbf{r}^s\cdot\boldsymbol{\xi}_2}{\sqrt{a^{ss}}}$	$\dfrac{\mathbf{r}^s\cdot\boldsymbol{\xi}_3}{\sqrt{a^{ss}}}$

(3.5)

4. Рассмотрим частный случай уравнений (3.4), (2.14), (2.5), (2.6), (1.11) или (3.4), (2.12), (2.13), (1.11), когда координаты $\varkappa^1$, $\varkappa^2$, $\varkappa^3$ — ортогональны.

В этом случае векторы основного базиса перпендикулярны друг другу. Векторы взаимного базиса совпадают по направлению с векторами основного. Отличны от нуля лишь диагональные составляющие метрического тензора a^{ss}, a_{ss}, которые выражаются через коэффициенты Ляме h_s

$$a_{ss}=1\,/\,a^{ss}=h_s^2 \tag{4.1}$$

Для ортогональных координат отличны от нуля лишь следующие символы Кристоффеля первого и второго рода [4]

$$\Gamma_{ss,k}=-h_s\frac{\partial h_s}{\partial\varkappa^s},\qquad \Gamma_{sk}^{s}=\Gamma_{ks}^{s}=\frac{\partial\ln h_s}{\partial\varkappa^k},\quad \Gamma_{sk,s}=\Gamma_{ks,s}=h_s\frac{\partial h_s}{\partial\varkappa^k}$$

$$\Gamma_{ss}^{k}=-\frac{h_s}{h_k^2}\frac{\partial h_s}{\partial\varkappa_k}\qquad \Gamma_{ss,s}=h_s\frac{\partial h_s}{\partial\varkappa^s},\quad \Gamma_{ss}^{s}=\frac{\partial\ln h_s}{\partial\varkappa^s} \tag{4.2}$$

Принимая во внимание (4.1), (4.2), получаем

$$(\ln\sqrt{a^{ss}})^{\cdot}=-\Gamma_{sk}^{s}\varkappa^{k\cdot}-\Gamma_{0s}^{s} \tag{4.3}$$

Теперь равенства (3.3) приобретают вид (не суммировать по s!)

$$\frac{d}{dt}(h_s\varkappa^{s\cdot})=n_{e_s}-h_s[\Gamma_{0s}^{s}\varkappa^{s\cdot}+\Gamma_{ks}^{s}\varkappa^{k\cdot}\varkappa^{s\cdot}+$$

$$+\Gamma_{kk}^{s}(\varkappa^{k\cdot})^2+2\Gamma_{0k}^{s}\varkappa^{k\cdot}+\Gamma_{00}^{s}-\operatorname{grad}^l U\eta_l^s] \tag{4.4}$$

где суммирование ведется по k, отличным от s. Согласно (1.7), (4.1)

$$\Gamma_{00,s}=\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t^2}\cdot\mathbf{r}_s,\qquad \Gamma_{00}^{s}=\frac{1}{h_s^2}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t^2}\cdot\mathbf{r}_s$$

$$\Gamma_{0k,s}=\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t\partial\varkappa^k}\cdot\mathbf{r}_s,\qquad \Gamma_{0k}^{s}=\frac{1}{h_s^2}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t\partial\varkappa^k}\cdot\mathbf{r}_s \tag{4.5}$$

Причем для ортогональных координат

$$\Gamma_{0k,\,s} = -\Gamma_{0s,\,k} \tag{4.6}$$

Последнее следует из того, что $\partial\,(\mathbf{r}_s \cdot \mathbf{r}_k)\,/\,\partial t = 0$. Из (4.4) находим

$$h_s\varkappa^{s\cdot} = \int\limits_0^t [n_{e_s} - h_s\,(\Gamma_{0s}^{s}\varkappa^{s\cdot} + \Gamma_{ks}^{s}\varkappa^{k\cdot}\varkappa^{s\cdot} + \Gamma_{kk}^{s}\,(\varkappa^{k\cdot})^2 + 2\Gamma_{0k}^{s}\varkappa^{k\cdot} + \Gamma_{00}^{s} -$$

$$-\operatorname{grad}^l U\eta_l^s)]\,dt + h_s\,(0)\,\varkappa^{s\cdot}\,(0)$$

$$\varkappa^{s\cdot} = \frac{1}{h_s}\,(\varkappa^{s\cdot}h_s), \qquad \varkappa^s = \int\limits_0^t \varkappa^{s\cdot}\,dt + \varkappa^s\,(0) \tag{4.7}$$

Формулы (4.7) заменяют (3.4), когда координаты ортогональны.

Перейдем к формулам (2.12), (2.13) и (2.14), (2.5), (2.6). С учетом (4.1), (4.2) равенства (2.12) упрощаются и принимают вид

$$\eta_l^k = -\int\limits_0^t [\eta_l^k\,(\Gamma_{kk}^{k}\varkappa^{k\cdot} + \Gamma_{0k}^{k} + \Gamma_{mk}^{k}\varkappa^{m\cdot}) + \eta_l^m\,(\Gamma_{0m}^{k} + \Gamma_{km}^{k}\varkappa^{k\cdot} + \Gamma_{mm}^{k}\varkappa^{m\cdot}) +$$

$$+\,\varepsilon^{ptk}\eta_l^p\eta_i^t h_i^2 h_p^2 u_\eta^i]\,dt + \eta_l^k\,(0) \tag{4.8}$$

Равенства (2.13) остаются без изменения, как и (2.5) и последнее равенство (2.6), из которого находится η^k. Первое же равенство (2.6) принимает вид

$$\eta_l^k = \alpha_{ls}\frac{1}{h_k^2}\frac{\partial \xi^s}{\partial \varkappa^k} \tag{4.9}$$

В случае ортогональной координатной сетки $J = h_1h_2h_3$, формулы (2.14) примут вид

$$\alpha_l^k = \int\limits_0^t \frac{1}{h_ih_jh_k}\,\varepsilon_{ijk}\alpha_l^i u_\eta^j\,dt + \alpha_l^k\,(0) \tag{4.10}$$

Таблица направляющих косинусов (3.5) представлена справа.

	ξ^1	ξ^2	ξ^3
$\mathbf{e}_s$	$\frac{1}{h_s}\frac{\partial \xi^1}{\partial \varkappa^s}$	$\frac{1}{h_s}\frac{\partial \xi^2}{\partial \varkappa^s}$	$\frac{1}{h_s}\frac{\partial \xi^3}{\partial \varkappa^s}$

(4.11)

В случае ортогональных криволинейных координат кинематическую схему инерциальной системы навигации можно, очевидно, построить и на основе управляемой гирорамы, так как направления $\mathbf{e}_s$ образуют в этом случае жесткий ортогональный трехгранник, которым может быть трехгранник платформы гирорамы.

Чтобы трехгранник, связанный с платформой гирорамы, оказался совмещенным с трехгранником, образованным векторами $\mathbf{r}_s$ основного базиса, необходимо сформировать моменты, приложение которых к гироскопам гирорамы обеспечивало бы это совмещение. В момент начала работы трехгранники предполагаются совмещенными.

Для формирования управляющих моментов необходимы выражения для проекций $\omega_{(s)}$ вектора абсолютной угловой скорости трехгранника $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ на направления его ребер в зависимости от координат $\varkappa^s$, их производных и времени. Ниже выводятся эти выражения.

5. Введем обозначения $\mathbf{p}_s = d\mathbf{r}_s/\,dt$. Векторы $\mathbf{p}_s$ представим так:

$$\mathbf{p}_s = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial\varkappa^s\partial\varkappa^n}\,\varkappa^{n\cdot} + \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t\,\partial\varkappa^s} \tag{5.1}$$

По определению символов Кристоффеля и символов Γ_{0s}^m

$$\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial\varkappa^s\partial\varkappa^n} = \Gamma_{sn}^m\mathbf{r}_m, \qquad \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t\partial\varkappa^s} = \Gamma_{0s}^m\mathbf{r}_m \tag{5.2}$$

Поэтому

$$\mathbf{p}_s = (\Gamma_{sn}^m \varkappa^{n\cdot} + \Gamma_{0s}^m)\, \mathbf{r}_m \tag{5.3}$$

Обозначим через p_{sk} и p_s^k ковариантные и контравариантные составляющие $\mathbf{p}_s$ по векторам $\mathbf{r}_k$ основного базиса. Из (5.3) находим

$$p_s^k = \Gamma_{sn}^k \varkappa^{n\cdot} + \Gamma_{0s}^k, \qquad p_{sk} = a_{mk} p_s^m \tag{5.4}$$

С другой стороны (не суммировать по s!),

$$\frac{d\mathbf{r}_s}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sqrt{a_{ss}}\left(\frac{\mathbf{r}_s}{\sqrt{a_{ss}}}\right)\right] \tag{5.5}$$

где $\mathbf{r}_s / \sqrt{a_{ss}}$ — единичные векторы направлений $\mathbf{r}_s$. Следовательно,

$$\mathbf{p}_s = \frac{(\sqrt{a_{ss}})^{\cdot}}{\sqrt{a_{ss}}}\mathbf{r}_s + \sqrt{a_{ss}}\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{r}_s}{\sqrt{a_{ss}}} \tag{5.6}$$

Так как векторы $\mathbf{r}_s$ основного базиса образуют жесткий триедр, то, обозначив через $\boldsymbol{\omega}$ абсолютную угловую скорость этого триедра, получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{r}_s}{\sqrt{a_{ss}}} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_s}{\sqrt{a_{ss}}} \tag{5.7}$$

Подставив (5.7) в (5.6), найдем связь векторов $\mathbf{p}_s$ с абсолютной угловой скоростью вращения базисного трехгранника

$$\mathbf{p}_s = \frac{(\sqrt{a_{ss}})^{\cdot}}{\sqrt{a_{ss}}}\mathbf{r}_s + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_s, \qquad p_{sk} = \frac{a_{sk}(\sqrt{a_{ss}})^{\cdot}}{\sqrt{a_{ss}}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_s)\cdot \mathbf{r}_k \tag{5.8}$$

При ортогональных $\mathbf{r}_s$ недиагональные составляющие метрического тензора равны нулю, поэтому при $s \neq k$ равенства (5.8) принимают вид

$$p_{sk} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_s)\cdot \mathbf{r}_k \qquad \text{или} \qquad p_{sk} = \omega^n (\mathbf{r}_n \times \mathbf{r}_s)\cdot \mathbf{r}_k \tag{5.9}$$

Вводя символы Леви — Чивита, получаем формулы $p_{sk} = \omega^n \varepsilon_{nsk}$, из которых после умножения на ε^{nsk} (не суммировать по s, k!) находятся контравариантные составляющие ω^n вектора $\boldsymbol{\omega}$ в основном базисе

$$\omega^n = \varepsilon^{nsk} p_{sk} \tag{5.10}$$

Вернувшись к (5.4), находим ω^n, ω_l через $\varkappa^s$, производные $\varkappa^{s\cdot}$ и время

$$\omega^n = \varepsilon^{nsk}(\Gamma_{sm,k}\varkappa^{m\cdot} + \Gamma_{0s,k}), \qquad \omega_l = a_{ln}\omega^n \tag{5.11}$$

По известным ковариантным составляющим ω_s вектора $\boldsymbol{\omega}$ легко находятся искомые проекции $\omega_{(s)}$ на направления $\mathbf{r}_s$

$$\omega_{(s)} = \frac{\omega_s}{\sqrt{a_{ss}}} = \sqrt{a_{ss}}\varepsilon^{snk}(\Gamma_{nm,k}\varkappa^{m\cdot} + \Gamma_{0n,k}) \tag{5.12}$$

Индексы n и k в (5.12), различны. В соответствии с (4.2) в (5.12) отличны от нуля лишь символы Кристоффеля, в которых либо $n = m$, либо $k = m$. Так как согласно (4.1) величины $h_s = \sqrt{a_{ss}}$, $J = h_1 h_2 h_3$, а символы Леви — Чивита равны $\varepsilon^{snk} = \pm 1 / J$, где знак правой части определяется порядком следования индексов s, n, k, то из (5.12)

$$\omega_{(1)} = \frac{1}{h_2 h_3}(\Gamma_{2m,3}\varkappa^{m\cdot} + \Gamma_{02,3}) = -\frac{1}{h_2 h_3}(\Gamma_{3m,2}\varkappa^{m\cdot} + \Gamma_{03,2}) \qquad (123) \tag{5.13}$$

Здесь первые выражения правых частей соответствуют расстановкам индексов s, n, k : 1 2 3, 2 3 1, 3 1 2. Вторые выражения — расстановкам: 1 3 2, 2 1 3, 3 2 1. Два различных выражения, которые даются формулами (5.13) для каждой проекции $\omega_{(s)}$ тождественно равны, так как $\Gamma_{sk,s} = -\Gamma_{ss,k}$, $\Gamma_{0k,s} = -\Gamma_{0s,k}$, что следует из (4.2), (4.6).

Если, в частности, символы $\Gamma_{0s,k}$ равны нулю, то есть координатная сетка $\varkappa^s$ не меняет со временем своего положения в системе $O_1\xi^1\xi^2\xi^3$, то

$$\omega_{(1)} = \frac{1}{h_2h_3}\Gamma_{2m,3}\varkappa^{m\cdot} = -\frac{1}{h_2h_3}\Gamma_{3m,2}\varkappa^{m\cdot} \qquad (123) \tag{5.14}$$

В этом случае, приняв во внимание выражения (4.2) символов Кристоффеля через коэффициенты Ляме, приходим к таким выражениям для $\omega_{(s)}$

$$\omega_{(1)} = -\frac{1}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial \varkappa^3}\varkappa^{2\cdot} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial \varkappa^2}\varkappa^{3\cdot} \qquad (123)$$

6. До сих пор, говоря о нестационарных криволинейных координатах, мы имели в виду общий случай, когда координатные поверхности $\varkappa^s = \mathrm{const}$ могли произвольно менять со временем свое положение по отношению к трехграннику $O_1\xi^1\xi^2\xi^3$. Это обстоятельство отражено в формулах (1.1), где в правые части явно входит время. Характер зависимости от явно входящего времени никак не оговорен.

Особый интерес представляет один частный случай этой зависимости. Речь идет о том случае, когда криволинейные координаты $\varkappa^s$ определяют положение объекта в системе координат $O_1\eta^1\eta^2\eta^3$, жестко связанной с Землей, будучи стационарными относительно трехгранника $O_1\eta^1\eta^2\eta^3$. Тогда

$$\eta^s = \eta^s(\varkappa^1, \varkappa^2, \varkappa^3) \tag{6.1}$$

По отношению к основной декартовой системе координат $O_1\xi^1\xi^2\xi^3$ координаты $\varkappa^s$ не стационарны.

Будем считать, что угловая скорость вращения Земли постоянна по величине, а ее направление неизменно в системе координат $O_1\xi^1\xi^2\xi^3$. Заметим, что до сих пор это обстоятельство не использовалось.

Пусть ось $O_1\xi^3$ системы координат $O_1\xi^1\xi^2\xi^3$ совпадает с $O_1\eta^3$, а последняя в свою очередь совпадает с направлением вектора $\mathbf{u}$ угловой скорости вращения Земли. Пусть также в начальный момент времени ($t = 0$) трехгранники $O_1\xi^1\xi^2\xi^3$ и $O_1\eta^1\eta^2\eta^3$ полностью совпадают. Тогда для любого момента времени

$$\xi^1 = \eta^1\cos ut - \eta^2\sin ut, \qquad \xi^2 = \eta^1\sin ut + \eta^2\cos ut, \qquad \xi^3 = \eta^3 \tag{6.2}$$

В рассматриваемом случае при вычислении элементов метрического тензора, коэффициентов Ляме, символов Кристоффеля — можно считать t равным нулю. Справедливость этого утверждения следует из того, что координатная сетка $\varkappa^s$ движется (вращается с угловой скоростью $\mathbf{u}$) как единое целое и свойства пространства, определяемого криволинейными координатами $\varkappa^s$, не зависят от времени. Конечно, справедливость сказанного можно установить и прямым вычислением.

Для символов $\Gamma_{0k,s}$ и $\Gamma_{00,s}$ приходим, используя (1.7), (6.2), к выражениям, также не зависящим от времени

$$\Gamma_{0k,s} = u\left(\frac{\partial\eta^1}{\partial\varkappa^k}\frac{\partial\eta^2}{\partial\varkappa^s} - \frac{\partial\eta^2}{\partial\eta^k}\frac{\partial\eta^1}{\partial\varkappa^s}\right), \qquad \Gamma_{00,s} = -\frac{u^2}{2}\frac{\partial}{\partial\varkappa^s}[(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2] \tag{6.3}$$

7. В заключение рассмотрим два примера: случай декартовых координат $\varkappa^s = \xi^s$ и случай геоцентрических координат $\varkappa^1 = r$, $\varkappa^2 = \lambda$, $\varkappa^3 = \varphi$, когда

$$\eta^1 = r\cos\varphi\cos\lambda, \qquad \eta^2 = r\cos\varphi\sin\lambda, \qquad \eta^3 = r\sin\varphi \tag{7.1}$$

Будем исходить из формул (4.8), (4.7), (2.13) и таблицы (4.11).

В случае декартовых координат $\varkappa^s = \xi^s$ все символы Кристоффеля и символы Γ_{0k}^s, Γ_{00}^s, $\Gamma_{0k,s}$, $\Gamma_{00,s}$ равны нулю. Коэффициенты Ляме h_s равны единице. Из (4.7) и (4.8) имеем

$$\xi^{s\cdot} = \int_0^t (n_{e_s} + \operatorname{grad}^l U\eta_l^s)\, dt + \xi^{s\cdot}(0), \quad \xi^s = \int_0^t \xi^{s\cdot} dt + \xi^s(0) \tag{7.2}$$

$$\eta_l^k = -\int_0^t \varepsilon^{ptk}\eta_l^p\eta_i^t u_\eta^i dt + \eta_l^k(0) \tag{7.3}$$

Полагая, как и в п. 6, что в начальный момент трехгранники $\xi^1\xi^2\xi^3$ и $\eta^1\eta^2\eta^3$ совпадают, и замечая, что при совпадении оси $O_1\eta^3$ с осью вращения Земли $u_\eta^3 = u$, $n_\eta^1 = u_\eta^2 = 0$, получим из (7.3): $\eta_3^1 = \eta_3^2 = \eta_1^3 = \eta_2^3 = 0$, $\eta_3^3 = 1$, а для отыскания остальных η_l^k — две системы интегральных уравнений второго порядка

$$\eta_1^1 = -\int_0^t \eta_1^2 u dt + 1, \qquad \eta_1^2 = \int_0^t \eta_1^1 u dt; \qquad \eta_1^2 = -\int_0^t \eta_2^2 u dt, \qquad \eta_2^2 = \int_0^t \eta_2^1 u dt + 1 \tag{7.4}$$

Если принять, как в п. 6, $u = \text{const}$, то из (7.4) находим

$$\eta_1^1 = \cos ut, \qquad \eta_2^1 = -\sin ut, \qquad \eta_1^2 = \sin ut, \qquad \eta_2^2 = \cos ut \tag{7.5}$$

Наконец, из (2.13) имеем $\eta^k = \eta_k^s\xi^s$. Теперь из (7.5)

$$\eta^1 = \xi^1\cos ut + \xi^2\sin ut, \qquad \eta^2 = -\xi^1\sin ut + \xi^2\cos ut, \qquad \eta^3 = \xi^3$$

что совпадает с (6.2). Воспользовавшись вместо (4.8), (2.13) соотношениями (4.10), (4.9), (2.6), получим, что $\alpha_l^k = \eta_l^k$, а из (4.10) те же значения для α_l^k, что для η_l^k, после чего из (2.6) приходим снова к равенствам (7.5).

Обратимся ко второму примеру. Здесь коэффициенты Ляме равны

$$h_1 = 1, \qquad h_2 = r\cos\varphi, \qquad h_3 = r \tag{7.6}$$

Отличны от нуля символы Кристоффеля второго рода

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = -\operatorname{tg}\varphi, \qquad \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma_{22}^1 = -r\cos^2\varphi$$
$$\Gamma_{22}^3 = \sin\varphi\cos\varphi, \qquad \Gamma_{33}^1 = -r \tag{7.7}$$

Согласно (6.3) и (7.1) оказываются отличными от нуля также символы

$$\Gamma_{00}^1 = -u^2 r\cos^2\varphi, \qquad \Gamma_{00}^3 = u^2\sin\varphi\cos\varphi, \qquad \Gamma_{01}^2 = u/r$$
$$\Gamma_{02}^1 = -ur\cos^2\varphi, \qquad \Gamma_{02}^3 = u\sin\varphi\cos\varphi, \qquad \Gamma_{03}^2 = -u\operatorname{tg}\varphi \tag{7.8}$$

С учетом (7.6), (7.7), (7.8) уравнения (4.7) превращаются в следующие

$$r^{\cdot} = \int_0^t [n_1 + r(\varphi^{\cdot 2} + (u + \lambda^{\cdot})^2\cos^2\varphi) + \operatorname{grad}^l U\eta_l^1]\, dt + r^{\cdot}(0) \tag{7.9}$$

$$r\cos\varphi\lambda^{\cdot} = \int_0^t \left[n_2 - (\lambda^{\cdot} + 2u)(r^{\cdot}\cos\varphi - r\varphi^{\cdot}\sin\varphi) + \frac{1}{r\cos\varphi}\operatorname{grad}^l U\eta_l^2\right] dt + $$
$$+ r(0)\cos\varphi(0)\,\lambda^{\cdot}(0)$$

$$r\varphi^{\cdot} = \int_0^t \left[n_3 - (r^{\cdot}\varphi^{\cdot} + r\sin\varphi\cos\varphi(\lambda^{\cdot} + u)^2) + \frac{1}{r}\operatorname{grad}^l U\eta_l^3\right] dt + r(0)\,\varphi^{\cdot}(0)$$

$$= \int_0^t r^{\cdot} dt + r(0), \qquad \lambda = \int_0^t \frac{1}{r\cos\varphi}(r\cos\varphi\lambda^{\cdot})\, dt + \lambda(0), \qquad \varphi = \int_0^t \frac{1}{r}(r\varphi^{\cdot})\, dt + \varphi(0)$$

Уравнения (4.8) с учетом (7.6), (7.7), (7.8) принимают вид

$$\eta_l^1 = -\int_0^t [-\eta_l^2 r\cos^2\varphi(\lambda^\cdot + u) - \eta_l^3 r\varphi^\cdot + u(\eta_l^2\eta_3^3 - \eta_l^3\eta_3^2) r^2\cos\varphi]\,dt + \eta_l^1(0)$$

$$\eta_l^2 = -\int_0^t \Big[\eta_l^1 \frac{(\lambda^\cdot + u)}{r} - \eta_l^3(\lambda^\cdot + u)\,\mathrm{tg}\,\varphi + \eta_l^2\Big(\frac{r^\cdot}{r} - \mathrm{tg}\,\varphi\varphi^\cdot\Big) + \tag{7.10}$$

$$+ u(\eta_l^3\eta_3^1 - \eta_l^1\eta_3^3)\frac{1}{\cos\varphi}\Big]dt + \eta_l^2(0)$$

$$\eta_l^3 = -\int_0^t \Big[\eta_l^2\sin\varphi\cos\varphi(\lambda^\cdot + u) + \eta_l^1\frac{\varphi^\cdot}{r} + \eta_l^3\frac{r^\cdot}{r} + u\cos\varphi(\eta_l^1\eta_3^2 - \eta_l^2\eta_3^1)\Big]dt + \eta_l^3(0)$$

Если считать $u = \mathrm{const}$, то уравнениям (7.10) удовлетворяют следующие значения η_l^s:

$$\begin{aligned} &\eta_1^1 = \cos\varphi\cos\lambda, && \eta_1^2 = -\frac{\sin\lambda}{r\cos\varphi}, && \eta_1^3 = -\frac{\sin\varphi\cos\lambda}{r} \\ &\eta_2^1 = \cos\varphi\sin\lambda, && \eta_2^2 = \frac{\cos\lambda}{r\cos\varphi}, && \eta_2^3 = -\frac{\sin\varphi\sin\lambda}{r} \\ &\eta_3^1 = \sin\varphi, && \eta_3^2 = 0, && \eta_3^3 = \frac{\cos\varphi}{r} \end{aligned} \tag{7.11}$$

Заметим, что при $u = \mathrm{const}$ величины η_s^k можно, разумеется, получить, не прибегая к уравнениям (4.8), а непосредственно из определения $\eta_l^s = \mathbf{\eta}_l \cdot \mathbf{r}_s / h_2$ и равенств (7.1) и $\eta^k = \eta_k^s \xi^s$, что может служить проверкой правильности вычислений.

Из (2.13) и (7.10) получаем выражения для η^1, η^2, η^3 совпадающие с (7.1).

Если воспользоваться вместо (4.8), (2.13) формулами (4.9), (2.6), то из (4.10), (7.5), (7.3) получим такие уравнения для определения α_l^k:

$$\alpha_l^1 = \int_0^t \alpha_l^2\,u\,dt + \alpha_l^1(0),$$

$$\alpha_l^2 = -\int_0^t \alpha_l^1\,u\,dt + \alpha_l^2(0),$$

$$\alpha_l^3 = \alpha_l^3(0) \tag{7.12}$$

	ξ^1	ξ^2	ξ^3
$\mathbf{e}_1$	$\cos\varphi\cos(\lambda + ut)$	$\cos\varphi\sin(\lambda + ut)$	$\sin\varphi$
$\mathbf{e}_2$	$-\sin(\lambda + ut)$	$\cos(\lambda + ut)$	0
$\mathbf{e}_3$	$-\sin\varphi\cos(\lambda + ut)$	$-\sin\varphi\sin(\lambda + ut)$	$\cos\varphi$

Из них получаются те же значения для α_l^k, которые в случае декартовых координат $\varkappa^s = \xi^s$ получаются для η_l^k. Из соотношений $\eta^k = \eta_k^s\xi^s$ находим $\xi^1 = r\cos\varphi\cos(\lambda + ut)$, $\xi^2 = r\cos\varphi\sin(\lambda + ut)$, $\xi^3 = r\sin\varphi$. После этого в соответствии с (4.11), (7.6) получаются направляющие косинусы осей чувствительности ньютонометров, представленные здесь справа.

Наконец, из (5.13), (7.6), (7.7), (7.8) находим

$$\omega_{(1)} = (u + \lambda^\cdot)\sin\varphi, \qquad \omega_{(2)} = -\varphi^\cdot, \qquad \omega_{(3)} = (u + \lambda^\cdot)\cos\varphi$$

Поступила 4 IX 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Об уравнениях задачи определения местоположения объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
2. Андреев В. Д. Об общих уравнениях инерциальной навигации. ПММ, 1964, т. 29, вып. 2.
3. Кильчевский Н. А. Элементы тензорного исчисления и его приложения в механике. Гостехиздат, 1954.
4. Лурье А. И. Аналитическая механика, Физматгиз, 1961.