Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

К ЗАДАЧЕ ОБ УСПОКОЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

В. И. Бондаренко, Н. Н. Красовский, Ю. М. Филимонов

(Нижний Тагил, Свердловск)

Описывается процедура решения одной задачи об оптимальном успокоении линейной управляемой системы, основанная на методе наискорейшего спуска.

1. Рассмотрим управляемую систему, описываемую векторным линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \tag{1.1}$$

Здесь через x обозначен n-мерный вектор фазовых координат управляемого объекта, через u — скалярная функция, описывающая управляющее воздействие.

Задача об оптимальном управлении $u^\circ(t)$, которое за данное время T переводит систему (1.1) из состояния x_0 в состояние $x(T)$ при условии минимума величины:

$$J(u) = \max\left\{\max_\tau |u(\tau)|,\ \theta \int_0^T |u(\tau)|\,d\tau\right\} = \min \qquad (\theta = \text{const}) \tag{1.2}$$

приводится к следующей проблеме [1].

Найти числа l_i $(i = 1, \ldots, n)$ и систему Δ отрезков $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ на $[0, T]$, при которых достигается:

$$\min_l \max_\Delta \int_\Delta \left|\sum_{i=1}^n l_i h_i(\tau)\right| d\tau = \gamma \tag{1.3}$$

при условии

$$\sum_{i=1}^n l_i c_i = 1, \qquad \mu(\Delta) = \min\left[\frac{1}{\theta},\ T\right]$$

Здесь

$$h_i(\tau) = \sum_{j=1}^n f_{ij}(-\tau)\, b_j \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (c = -x_0)$$

При этом $f_{ij}(t)$ — элементы фундаментальной матрицы $F(t)$ однородной системы (1.1); $\mu(\Delta)$ — суммарная длина системы отрезков $[\tau_k, \tau_{k+1}]$.

Оптимальное управление $u^\circ(\tau)$ после решения задачи (1.3) определяется равенствами

$$u^\circ(\tau) = \frac{1}{\gamma}\operatorname{sign}\sum_{i=1}^n l_i^\circ h_i(\tau) \quad \text{при } \tau \in \Delta^\circ \qquad u^\circ(\tau) = 0 \quad \text{при } \tau \overline{\in} \Delta^\circ \tag{1.4}$$

где l_i° $(i = 1, \ldots, n)$ и Δ° — решения задачи (1.3).

Будем предполагать, что система (1.1) вполне управляема [2]. Величина

$$\rho(l) = \max\nolimits_{\Delta} \int\limits_{\Delta} \left| \sum_{i=1}^{n} l_i h_i(\tau) \right| d\tau, \qquad \mu(\Delta) = \min \left[\frac{1}{\theta}, \ T \right] \tag{1.5}$$

положительна при всех l_i $(i = 1, \ldots, n)$, удовлетворяющих условию $l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2 > 0$ и в пространстве $\{l_i\}$ эта величина обладает свойствами нормы. Поэтому для решения задачи отыскания минимума в (1.3) можно применить процедуру определения l_i° и Δ° методом наискорейшего спуска по величинам l_i.

2. Для процедуры наискорейшего спуска в задаче (1.3) необходимо вычислять производные $\partial\rho \,/\, \partial l_i$ величины $\rho(l)$. Вычислим эти величины, учитывая, что функции $h_i(\tau)$ в выражении (1.3) являются весьма гладкими. Пусть для определенности $c_n \neq 0$. Тогда $\rho(l)$ можно представить в следующей записи:

$$\rho(l) = \max\nolimits_{\Delta} \int\limits_{\Delta} \left| \sum_{i=1}^{m} l_i g_i(\tau) + g_n(\tau) \right| d\tau \qquad (m = n - 1) \tag{2.1}$$

где функции $g_i(\tau)$, $g_n(\tau)$ известным образом выражаются через функции $h_i(\tau)$. Рассмотрим случай, когда $\mu(\Delta) = 1 \,/\, \theta < T$, так как в случае $\Delta = [0, T]$ производные $\partial\rho \,/\, \partial l_i$ имеют вид

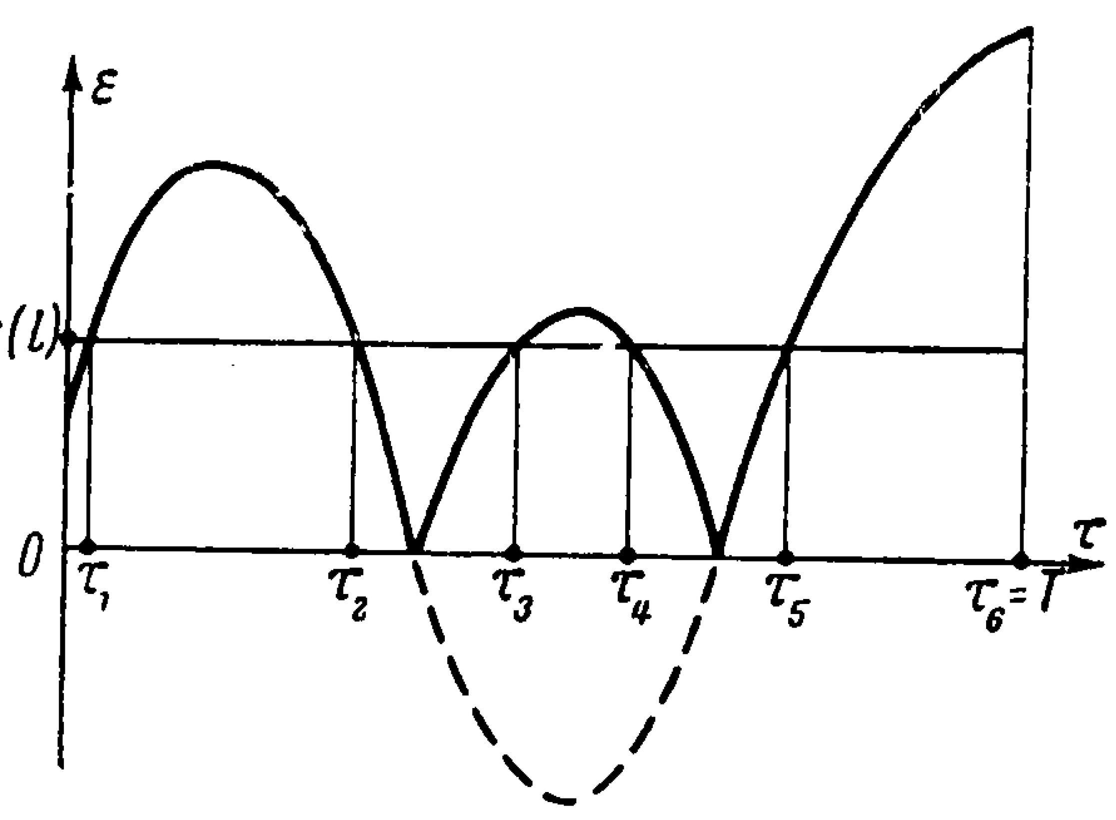
$$\frac{\partial \rho}{\partial l_i} = \int\limits_0^T g_i(\tau) \operatorname{sign} \left(\sum_{j=1}^{m} l_j g_j(\tau) + g_n(\tau) \right) d\tau \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.2}$$

и в процедуре спуска $\rho(l)$ по l_i не встречается особенностей. В (2.1) достигается $\max_\Delta$ на системе отрезков $[\tau_k, \ \tau_{k+1}]$ $(k = 1, \ldots, s - 1)$, расположенных в области наибольших значений функции

$$w(\tau, l) = |g(\tau, l)|$$
$$g(\tau, l) = \sum_{i=1}^{m} l_i g_i(\tau) + g_n(\tau) \tag{2.3}$$

На концах отрезков $\tau = \tau_k$, не совпадающих с $\tau = 0$ или с $\tau = T$, функция (2.3) принимает равные значения

$$w(\tau, l) = \varepsilon(l)$$



Фиг. 1

Пусть числа l_i как-то выбраны и для этих значений найдена система отрезков $\Delta(l)$, обеспечивающая $\max_\Delta$ в (2.1). Примем для определенности, например, что точка $\tau = 0$ не входит в число точек τ_k, а точка $\tau = T$ является точкой τ_s. Тогда имеет место картина, изображенная на фиг. 1.

Предположим сначала, что при изменении l_i на Δl_i значения τ_k лишь сдвигаются, но при этом не возникает новых корней τ_k у уравнения

$$w(\tau, l) = \varepsilon(l) \tag{2.4}$$

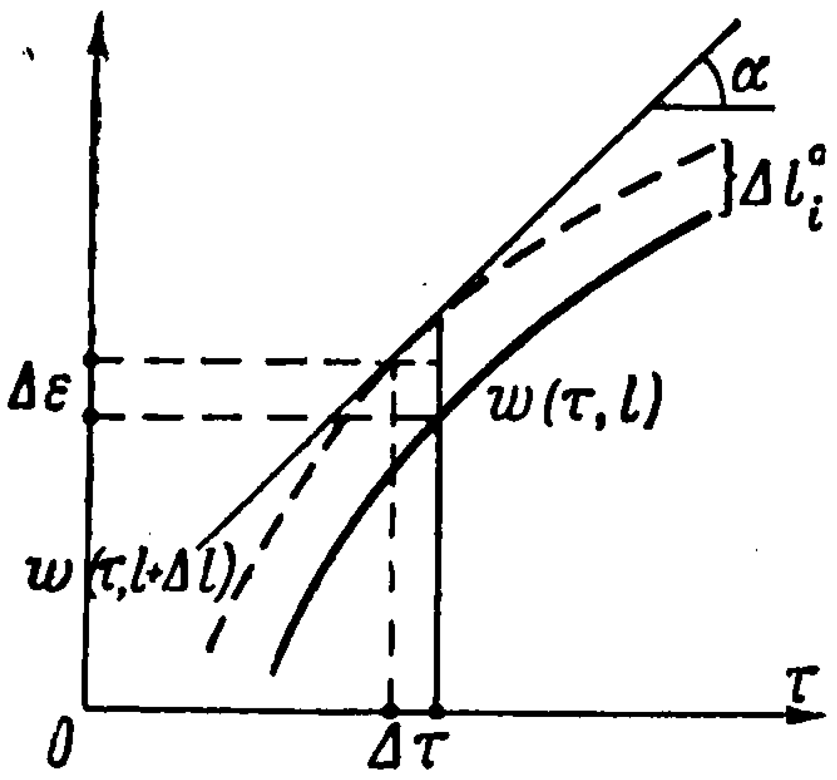
В этом случае изменение $\Delta\rho$ и $\Delta\varepsilon$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка описывается равенствами

$$\Delta\rho = \Delta l_i \int\limits_{\Delta(l)} g_i(\tau, l)\,\mathrm{sign}\, g(\tau, l)\,d\tau \qquad (2.5)$$

$$\Delta l_i \sum_{k=1}^{s^*} \frac{g_i(\tau_k)\,\mathrm{sign}\, g(\tau_k, l)}{|[g_\tau'(\tau, l)]_{\tau=\tau_k}|} - \Delta\varepsilon \sum_{k=1}^{s^*} \frac{1}{|[g_\tau'(\tau, l)]_{\tau=\tau_k}|} = 0 \qquad (2.6)$$

(см. фиг. 2, где $\mathrm{tg}\,\alpha = g_\tau'(\tau, l)$ и $\Delta l_i^\circ = \Delta l_i g_i(\tau)\,\mathrm{sign}\, g(\tau, l)$).

Символ s^* в (2.6) означает, что суммирование производится по всем τ_k, не совпадающим с концами отрезка $[0, T]$. Равенство (2.6) выводится из условия $\mu(\Delta) = 1/\theta = \mathrm{const}$. На основании (2.5), (2.6) получаем следующие выражения для частных производных:



Фиг. 2

$$\frac{\partial\rho}{\partial l_i} = \int\limits_{\Delta(l)} g_i(\tau, l)\,\mathrm{sign}\, g(\tau, l)\,d\tau \qquad (2.7)$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial l_i} = \sum_{k=1}^{s^*} \frac{g_i(\tau_k)\,\mathrm{sign}\, g(\tau_k, l)}{|[g_\tau'(\tau, l)]_{\tau=\tau_k}|} \Big/ \sum_{k=1}^{s^*} \frac{1}{|[g_\tau'(\tau, l)]_{\tau=\tau_k}|}$$

Рассмотрим теперь случай, когда у уравнения (2.4) могут появиться новые корни τ_k при произвольно малых Δl_i. Этот случай может возникнуть лишь тогда, когда на прямой $w = \varepsilon(l)$ лежат наибольшие значения функции $w(\tau, l)$. Пусть сначала это имеет место при $\tau_1 = 0$ или $\tau_s = T$, причем $g_\tau'(\tau, l) \neq 0$, $\tau = \tau_1$ или $\tau = \tau_s$.

В этом случае, если выполняется условие

$$\Delta\varepsilon < \Delta l_i g_i(\tau_j)\,\mathrm{sign}\, g(\tau_j, l) \qquad (j = 1 \text{ или } j = s) \qquad (2.8)$$

в равенстве (2.6) появляются дополнительные слагаемые вида

$$\frac{\Delta l_i g_i(\tau_j)\,\mathrm{sign}\, g(\tau_j, l)}{|[g_\tau'(\tau, l)]_{\tau=\tau_j}|} - \frac{\Delta\varepsilon}{|[g_\tau'(\tau, l)]_{\tau=\tau_j}|} \qquad (j = 1 \text{ или } j = s) \qquad (2.9)$$

Заметим, что при учете в равенстве (2.6) членов вида (2.9) необходимо учитывать различие правой и левой производных

$$\partial\varepsilon^+ / \partial l_i, \quad \partial\varepsilon^- / \partial l_i$$

Пусть теперь наибольшее значение функции $w(\tau, l)$ лежит на прямой $w = \varepsilon(l)$ при $\tau = \tau_j$, где τ_j — внутренняя точка отрезка $[0, T]$. Примем, что при этом $[g_\tau''(\tau_j, l)] \neq 0$, так как противный случай является исключительным и маловероятен. В этом случае в равенстве (2.6) появляются слагаемые вида

$$\left(\frac{8(\Delta l_i g_i(\tau_j, l)\,\mathrm{sign}\, g(\tau_j, l) - \Delta\varepsilon)}{|g_\tau''(\tau_j, l)|}\right)^{1/2} \qquad (2.10)$$

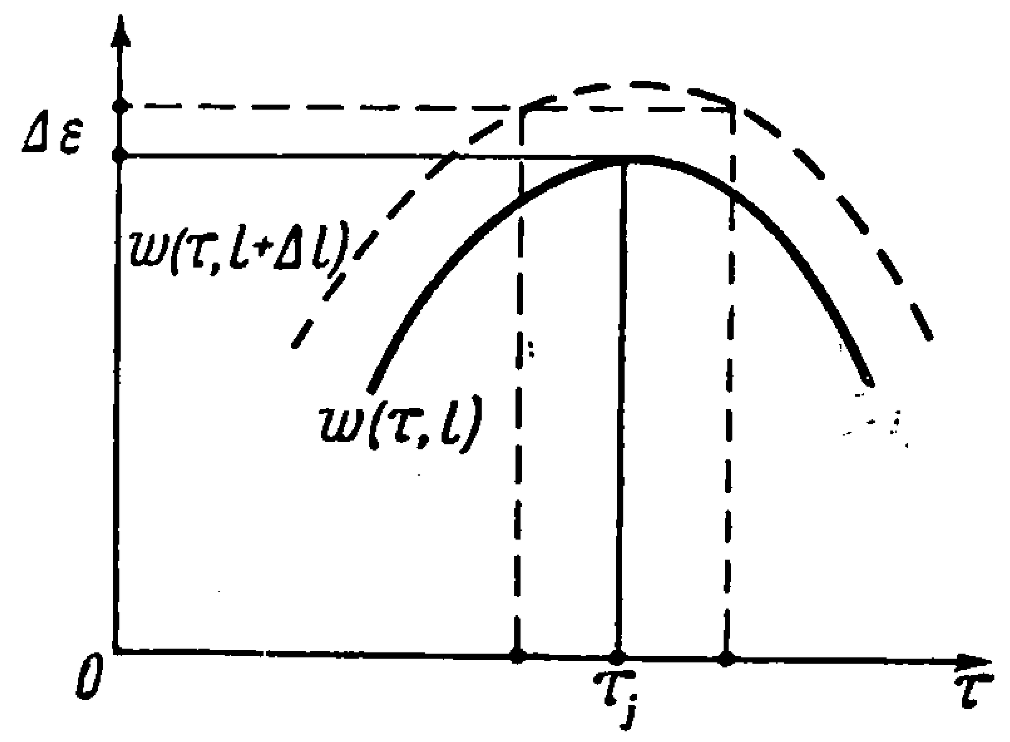
при условии, что из (2.6) следует положительность подкоренного выражения ((фиг. 3), где $\Delta l_i^\circ = \Delta l_i g_i(\tau)\,\mathrm{sign}\, g(\tau, l)$). Здесь также следует учитывать различие правой и левой производных. Члены вида (2.10) появляются в (2.6) также и в случае, когда $\tau_j = 0$ или $\tau_j = T$ и $g_\tau'(\tau, l) = 0$ при $\tau = \tau_j$. В этом случае лишь множитель 8 под корнем в левой части (2.10) заменяется множителем 2. Значения производных $\partial\rho / \partial l_i$ с учетом сделанных замечаний и определяют процедуру решения задачи (1.3), а вместе с ней — и задачу об оптимальном управлении системой (1.1). При этом пока наибольшие значения функции $w(\tau, l)$ остаются достаточно далеко от прямой $w = \varepsilon(l)$, наискорейший спуск величины $\rho(l)$, определенной (2.1), должен осуществляться вдоль направлений:

$$\Delta l_i = -\nu \frac{\partial\rho}{\partial l_i}, \qquad \Delta\varepsilon = -\nu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varepsilon}{\partial l_i} \frac{\partial\rho}{\partial l_i}$$

где производные

$$\partial\rho / \partial l_i, \qquad \partial\varepsilon / \partial l_i$$

вычисляются по формулам (2.7).



Фиг. 3

При подходе к таким значениям l_i, когда наибольшие значения функции $w(\tau, l)$ оказываются вблизи прямой $w = \varepsilon(l)$, следует учитывать возможность появления новых корней (а также возможность исчезновения старых корней). Тогда в процедуру спуска необходимо вносить коррективы, обусловленные этими обстоятельствами, и учитывать члены вида (2.9) и (2.10). При этом наискорейший спуск определяется с учетом того, что величины $\partial\varepsilon^+ / \partial l_i$, $\partial\varepsilon^- / \partial l_i$ могут быть различными.

В случаях, когда наибольшее значение $w(\tau, l)$ лежит вдали от прямой $w = \varepsilon(l)$, но $h_i'(\tau_k) = 0$, также надо учитывать члены вида (2.10), однако такие случаи являются исключительными, и их обсуждать не будем. Следует отметить, что изложенный метод определения на каждом шаге вычисления системы отрезков Δ при численном решении на цифровых машинах имеет тот недостаток, что приводит к накоплению ошибки. Поэтому при практическом пользовании этим методом необходимо через некоторое количество шагов вычисления проверять условие сохранения заданной меры системы отрезков Δ.

От этого недостатка свободен следующий метод приближенного вычисления для каждого фиксированного набора чисел l_i $(i = 1, \ldots, n)$ системы Δ отрезков $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ заданной меры, для которых достигается максимум (2.1), а также необходимых для вычисления $\partial\rho / \partial l_i$ согласно (2.7), а равно и самой величины $\rho(l)$ (2.1). Разобьем отрезок $[0, T]$ на r равных частей точками $\tau_k^* = k\Delta\tau$ $(k = 0, \ldots, r)$. Вычислим $w(\tau_k^*, l) = w_k$, где функция $w(\tau, l)$ определена равенством (2.3). Расположим полученные числа w_k в порядке убывания: $w_{k_1} \geqslant w_{k_2} \geqslant \ldots \geqslant w_{k_r}$.

Определим число s из условия

$$s = E\left\{\frac{\mu(\Delta)}{\Delta\tau}\right\}$$

Тогда приближенно искомая система отрезков Δ будет

$$[\tau_{kj}^*, \tau_{kj}^* + \Delta\tau] \quad (j = 1, \ldots, s)$$

Значение функции (2.1) определится равенством

$$\rho(l) \approx \Delta\tau \sum_{j=1}^{s} w_{kj}$$

Аналогично определяются и величины $\partial\rho / \partial l_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Точность вычисления, естественно, повышается с увеличением числа r.

Указанный приближенный метод вычисления системы отрезков Δ легко реализуется на универсальной цифровой машине.

3. Рассмотрим некоторые частные задачи, которые могут быть решены на основе метода, изложенного в п. 1 настоящей работы.

Задача 3.1. Пусть $u^\circ(t, \theta)$ — оптимальное управление для задачи п. 1. Найти такое значение параметра $\theta = \theta^*$, входящего в функционал (1.2), чтобы оптимальное управление $u^\circ(t, \theta^*)$ удовлетворяло дополнительному условию

$$\max_\tau |u^\circ(\tau, \theta^*)| = H$$

где H — заданное постоянное число.

Из способа [1] определения $\max_\tau |u^\circ(\tau, \theta)|$ следует непрерывная и монотонная зависимость этой величины от параметра θ.

Отсюда вытекает, что задача 3.1 заведомо разрешима, если существуют два таких значения параметра θ, равные θ_1 и θ_2, для которых выполняется условие:

$$\max_\tau |u^\circ(\tau, \theta_1)| < H < \max_\tau |u^\circ(\tau, \theta_2)|$$

В этом случае приближенное определение θ^* может быть, например, сведено к последовательному делению отрезка $[\theta_1, \theta_2]$ и решению задачи п. 1 для найденных значений θ.

Задача 3.2. Часто ресурсы управления в системе ограничены. Это означает, что двигатель, развивая определенное усилие, может работать только в течение ограниченного времени. Поэтому представляет интерес задача определения области начальных положений системы (1.1), из любой точки которой возможно оптимальное управление $u^\circ(t)$, переводящее систему за время T в начало координат и доставляющее минимум (1.2) при условии, что двигатель может развивать усилие $|u| \leqslant H$ в течение времени $\mu(\Delta) = 1/\theta < T$. Эта задача приводится к проблеме: найти область допустимых значений вектора x_0, для которых

$$\min_l \max_\Delta \int_\Delta \left| \sum_{i=1}^{n} l_i h_i(\tau) \right| d\tau \geqslant \frac{1}{H} \tag{3.1}$$

при условиях

$$c_i = -x_{i0}, \qquad \sum_{i=1}^{n} l_i c_i = 1, \qquad \mu(\Delta) = \frac{1}{\theta}, \qquad h(\tau) = F(-\tau) B$$

Получим оценку для указанной области. Обозначим левую часть (3.1) через $G(x)$. Найдем значение $G(x)$ для точек

$$x^{(1)}(a^{-1}, 0, \ldots, 0), \ x^{(2)}(0, a^{-1}, \ldots, 0), \ldots, x^{(n)}(0, \ldots, a^{-1}) \quad (a > 0)$$

Обозначим

$$G(x^i) = G_i \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad d = \min\{G_i\}$$

Гиперплоскости

$$\sum_{i=1}^{n} l_i c_i^j = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{3.2}$$

отвечающие точкам x^j, образуют n-мерный параллелепипед в пространстве l

$$\prod_{i=1}^{n} (a^2 - l_i^2) = 0 \tag{3.3}$$

Максимальное удаление точек этого параллелепипеда от начала координат, очевидно, есть

$$\rho = a\sqrt{n} \tag{3.4}$$

Расстояние гиперплоскостей (3.2) от начала координат пространства l определяется величиной

$$R = \frac{1}{\sqrt{c_1^2 + \cdots + c_n^2}} = \frac{1}{\|x\|_2} \tag{3.5}$$

Здесь символом $\| x \|_2$ обозначен модуль вектора x. Пусть точка x удовлетворяет условию

$$\|x\|_2 \leqslant \frac{1}{a\sqrt{n}} \tag{3.6}$$

Докажем, что для x, удовлетворяющих неравенству (3.6), будет

$$G(x) \geqslant d$$

Пусть x — любая точка, удовлетворяющая неравенству (3.6). В силу (3.6), соответствующий вектор l пересечет какую-нибудь грань параллелепипеда (3.3). Поэтому этот вектор можно представить в виде $l = \eta l'$, где $\eta \geqslant 1$, а вектор l' оканчивается на грани параллелепипеда (3.3). Следовательно,

$$G(x) = \eta \int_\Delta \Big| \sum_{i=1}^n l_i' h_i(\tau) \Big| d\tau \geqslant \int_\Delta \Big| \sum_{i=1}^n l_i' h_i(\tau) \Big| d\tau > d$$

Число d может быть изменено выбором числа a. Рассмотрим число λa. Новое значение величин G_i при этом будет λG_i, а новое значение числа d будет λd.

Полагая $a = 1$, $\lambda d = 1 / H$ и учитывая (3.6), получаем искомую оценку

$$\|x\|_2 \leqslant \frac{Hd}{\sqrt{n}} \tag{3.7}$$

4. В качестве иллюстрации рассмотрим следующие примеры.

Пример 4.1. Пусть движение управляемой системы описывается дифференциальными уравнениями

$$x_1^{\cdot} = x_2, \qquad x_2^{\cdot} = -\alpha x_1 + \beta x_3, \qquad x_3^{\cdot} = u \tag{4.1}$$

Требуется определить управление $u(t)$, приводящее систему (4.1) за время $0 \leqslant t \leqslant T$ к состоянию равновесия ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) при условии минимума функционала (1.2). Приведем решение задачи для следующих числовых данных:

$$\alpha = 14 \cdot 10^{-7}, \qquad \beta = 3 \cdot 10^{-3}, \qquad T = 5360, \qquad \theta = {}^1/_{134}$$

Начальное положение системы (4.1) таково:

$$x_{10} = 37 \cdot 10^{-3}, \qquad x_{20} = 0, \qquad x_{30} = 0 \tag{4.2}$$

Фундаментальная матрица решений однородной системы (4.1) имеет вид

$$F(t) = \begin{pmatrix} \cos at & a^{-1}\sin at & b(1-\cos at) \\ -a\sin at & \cos at & ab\sin at \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Здесь $a = \sqrt{\alpha} = 1.17 \cdot 10^{-3}$; $b = \beta / \alpha = 2 \cdot 19$. Функции $h_i(\tau)$ $(i = 1, 2, 3)$ имеют вид

$$h_1(\tau) = b(1 - \cos a\tau), \qquad h_2(\tau) = -ab\sin a\tau, \qquad h_3(\tau) = 1 \tag{4.4}$$

Числа c_i равны

$$c_1 = -37 \cdot 10^{-3}, \qquad c_2 = 0, \qquad c_3 = 0 \tag{4.5}$$

В соответствии с п. 1 настоящей работы, для определения искомого управления $u^\circ(t)$ нужно решить задачу

$$\min_l \max_\Delta \int_\Delta |\, l_1 b (1 - \cos a\tau) - l_2 ab \sin a\tau + l_3 \,|\, d\tau = \gamma \qquad (4.6)$$

при условиии

$$l_1 c_1 + l_2 c_2 + l_3 c_3 = 1. \qquad \operatorname{mes} \Delta = 134$$

Решение задачи (4.6) выполнено на цифровой машине «Урал-2» методом наискорейшего спуска в соответствии с результатами п. 2 настоящей статьи. При этом получено

$$\gamma = 7930, \qquad l_1^\circ = -27, \qquad l_2^\circ = 1.03, \qquad l_3^\circ = 59$$

Система отрезков Δ° определяется так:

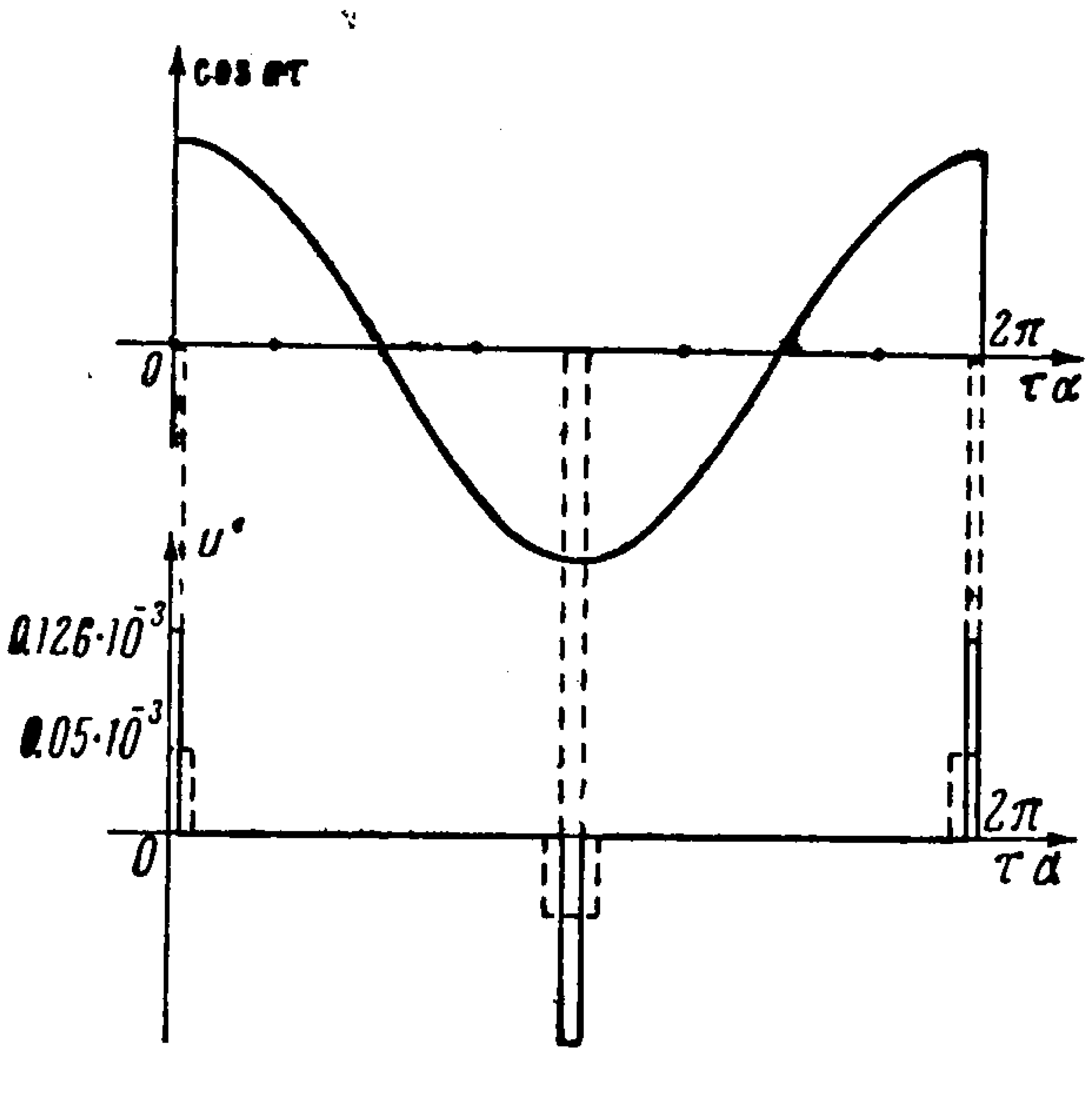
$$[0,34], \qquad [2646, 2713], \qquad [5326, 5360]$$

Следовательно, оптимальное управление $u^\circ(\tau)$ на основании (1.4) определится так:

$$u^\circ(\tau) = 0.126 \cdot 10^{-3} \operatorname{sign} \cos a\tau \quad \text{при } \tau \text{ на } \Delta^\circ, \qquad u^\circ(\tau) = 0 \quad \text{при } \tau \text{ вне } \Delta^\circ \qquad (4.7),$$

график оптимального управления (4.7) приведен на фиг. 4.

Отметим, что к рассмотренной задаче может быть сведена задача о коррекции плоского движения материальной точки около круговой орбиты в центральном поле [3], если исследовать проблему в линейном приближении. При неограниченном увеличении θ решение задачи будет сходиться к импульсному управлению, аналогичному тому, какое рассмотрено в [3]. Следует, впрочем, подчеркнуть, что, в отличие от [3], здесь задача рассмотрена лишь в линейном приближении.



Фиг. 4

Пример 4.2. Пусть теперь необходимо найти такое значение параметра θ, входящего в функционал (1.2), чтобы оптимальное управление в примере 4.1 удовлетворяло дополнительному условию

$$\max_\tau |\, u(\tau) \,| = 5 \cdot 10^{-5} \qquad (4.8)$$

В соответствии с п. 3 настоящей работы, задача (4.6) решалась для следующих значений параметра $\theta = 403, 348, 335$. При этом получены следующие значения для чисел $1/\gamma =$

$$= 4.23 \cdot 10^{-5},\ 4.87 \cdot 10^{-5},\ 5.05 \cdot 10^{-5}$$

Значение параметра θ, при котором выполняется условие (4.8), оказалось равным $\theta^* = 338$.

Оптимальное управление в этом случае определяется выражениями

$$u^\circ(\tau) = 5 \cdot 10^{-5} \operatorname{sign} \cos a\tau \quad \text{при } \tau \text{ на } \Delta^\circ, \qquad u^\circ(\tau) = 0 \text{ при } \tau \text{ вне } \Delta^\circ \quad (4.9),$$

при этом система отрезков Δ° определяется так

$$[0, 84], \qquad [2595, 2764], \qquad [5275, \ 5360]$$

График найденной функции управления (4.9) показан на фиг. 4 пунктиром.

Поступила 10 VI 1965 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. К задаче об успокоении линейной системы при минимальной интенсивности управления. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
2. Калман Р. Е. Об общей теории управления. Тр. I конгресса ИФАК, 1961.
3. Лейтман Д. Ж. и др. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. Изд-во «Наука», 1965.