Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

О ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Я. Н. Ройтенберг

(Москва)

В настоящей работе предлагается один из возможных методов построения функций Ляпунова для систем линейных разностных уравнений с переменными коэффициентами и получения достаточных условий асимптотической устойчивости тривиального решения указанных систем. Предлагаемый метод является развитием работы [1] автора, в которой изучались системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Этот метод позволяет указать в пространстве коэффициентов область, внутри которой функции, являющиеся переменными коэффициентами изучаемой системы уравнений, могут изменяться по произвольному закону, без нарушения устойчивости системы.

Задачи, в которых закон изменения во времени переменных коэффициентов заранее неизвестен, а известны лишь границы, в которых эти коэффициенты могут быть заключены, встречаются во многих приложениях [2].

1. Рассмотрим систему разностных уравнений

$$x_j(t+\tau)+\sum_{k=1}^{n} b_{jk}(t)\, x_k(t)=0 \qquad (j=1,\ldots,n) \tag{1.1}$$

Вводя функции

$$l_{jk}(t)=b_{jk}(t)+a_{jk} \qquad (a_{jk}=\mathrm{const}) \tag{1.2}$$

где a_{jk} — некоторые постоянные величины, условия выбора которых приводятся ниже, можно привести систему уравнений (1.1) к виду

$$x_j(t+\tau)=\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k(t)-\sum_{k=1}^{n} l_{jk}(t)\, x_k(t) \qquad (j=1,\ldots,n) \tag{1.3}$$

Наряду с системой уравнений (1.3) рассмотрим еще следующую систему линейных неоднородных разностных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$x_j(t+\tau)=\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k(t)+y_j(t) \qquad (j=1,\ldots,n) \tag{1.4}$$

Система скалярных уравнений (1.4) эквивалентна матричному уравнению

$$f(T)\, x(t)=y(t) \qquad (f(T)=ET-a) \tag{1.5}$$

Здесь

$$x(t)=\|x_j(t)\|, \qquad a=\|a_{jk}\|, \qquad y(t)=\|y_j(t)\| \tag{1.6}$$

E — единичная матрица, а через T обозначен оператор упреждения, определяемый соотношением

$$Tx(t)=x(t+\tau) \qquad (\tau=\mathrm{const}) \tag{1.7}$$

Определитель матрицы $f(T)$ будет

$$\det f(T) = \begin{vmatrix} T - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & T - a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.8}$$

Корни характеристического уравнения

$$\det f(\gamma) = 0 \tag{1.9}$$

обозначим так: действительные корни $\varkappa_g (g = 1, \ldots, s')$, комплексные сопряженные корни $\alpha_h \pm \beta_h i$ $(h = 1, \ldots, s'')$. Число корней характеристического уравнения $n = s' + 2s''$. Будем считать, что все корни характеристического уравнения (1.9) являются простыми. Этого можно достичь надлежащим выбором матрицы a.

Ниже потребуется общее решение однородного матричного уравнения

$$Tx - ax = 0 \tag{1.10}$$

Обозначая через ϑ целую часть t / τ, можно представить общее решение уравнения (1.10) в следующем виде:

$$x = \sum_{g=1}^{s'} v_g A_g(t) \varkappa_g^{\vartheta} + \sum_{h=1}^{s''} \{V_{s'+h}[A_{s'+h}(t) + iA_{s'+s''+h}(t)](\alpha_h + \beta_h i)^{\vartheta} +$$
$$+ V_{s'+s''+h}[A_{s'+h}(t) - iA_{s'+s''+h}(t)](\alpha_h - \beta_h i)^{\vartheta}\} \tag{1.11}$$

Здесь v_g — отличный от нуля столбец матрицы

$$F(\varkappa_g) = [F(T)]_{T=\varkappa_g}$$

где $F(T)$ — присоединенная матрица для матрицы $f(T)$. Через $V_{s'+h}$ обозначен отличный от нуля столбец матрицы $F(\alpha_h + \beta_h i)$, а через $V_{s'+s''+h}$ — одноименный столбец матрицы $F(\alpha_h - \beta_h i)$. Расположенные в одноименных строках элементы матриц-столбцов $V_{s'+h}$ и $V_{s'+s''+h}$ являются, таким образом, комплексными сопряженными величинами.

Входящие в выражение (1.11) функции $A_k^*(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$ являются произвольными действительными периодическими функциями с периодом τ. Вид этих функций можно определить из решения уравнения (1.5), если задать течение функций $x_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ на интервале времени $0 < t < \tau$.

Заметим, что так как, по предположению, все корни характеристического уравнения (1.9) — простые, то ранги матриц $F(\varkappa_g)$ и $F(\alpha_h + \beta_h i)$ равны единице, т. е. отличные от нуля столбцы каждой из этих матриц пропорциональны друг другу. Для удобства можно нормировать матрицы-столбцы $v_g, V_{s'+h}, V_{s'+s''+h}$, входящие в выражение (1.11), разделив все элементы каждой из этих матриц на один из ее элементов, отличный от нуля. При этом будет иметь место следующее соотношение:

$$v_g B_g = F(\varkappa_g) \tag{1.12}$$

Здесь B_g — строка матрицы $F(\varkappa_g)$, содержащая элемент, делением на который был получен столбец v_g. Аналогично

$$V_{s'+h} B_{s'+h} = F(\alpha_h + \beta_h i), \qquad V_{s'+s''+h} B_{s'+s''+h} = F(\alpha_h - \beta_h i) \tag{1.13}$$

причем одноименные элементы матриц-строк $B_{s'+h}$ и $B_{s'+s''+h}$ являются комплексными сопряженными величинами.

Обозначим через r коагулированную матрицу-строку, элементами которой являются входящие в выражение (1.11) матрицы-столбцы

$$r = \| v_1 \ldots v_{s'} \quad V_{s'+1} \ldots V_{s'+s''} \quad V_{s'+s''+1} \ldots V_{s'+2s''} \| \tag{1.14}$$

Введем теперь матрицу $\Xi = \|\Xi_j\|$ $(j = 1, \ldots, n)$ при помощи линейного преобразования

$$x = r\Xi \tag{1.15}$$

Так как $\Xi(t+\tau) = r^{-1}x(t+\tau)$, то, в соответствии с (1.5), имеем

$$T\Xi = k\Xi + r^{-1}y(t) \qquad (k = r^{-1}ar) \tag{1.16}$$

Здесь матрица k имеет следующий вид:

$$k = \begin{Vmatrix} \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta i & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\beta i \end{Vmatrix}, \qquad \varkappa = \begin{Vmatrix} \varkappa_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \varkappa_{s'} \end{Vmatrix}$$

$$\alpha \pm \beta i = \begin{Vmatrix} \alpha_1 \pm \beta_1 i & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{s''} \pm \beta_{s''} i \end{Vmatrix} \tag{1.17}$$

Соотношение (1.17) можно проверить так. Подставляя в уравнение (1.10) частное решение $x = r_\mu A_\mu^\vartheta(t)\gamma_\mu^\vartheta$ $(\mu = 1, \ldots, n)$, где r_μ — столбец матрицы (1.14), а γ_μ — корень характеристического уравнения (1.9), получим, что $(E\gamma_\mu - a)r_\mu A_\mu(t)\gamma_\mu^\vartheta = 0$ и, следовательно, $ar_\mu = r_\mu\gamma_\mu$. Так как матрица k является диагональной матрицей, у которой $k_{jj} = \gamma_j$, $k_{jl} = 0$ $(j \neq l)$, то из предыдущего соотношения следует, что $ar = rk$, а так как r — неособая матрица, то $r^{-1}ar = k$.

Матричное уравнение (1.16) эквивалентно следующей системе скалярных уравнений:

$$\begin{gathered} T\Xi_g = \varkappa_g\Xi_g + Y_g(t) \qquad (g = 1, \ldots, s') \\ T\Xi_{s'+h} = (\alpha_h + \beta_h i)\Xi_{s'+h} + Y_{s'+h}(t) \\ T\Xi_{s'+s''+h} = (\alpha_h - \beta_h i)\Xi_{s'+s''+h} + Y_{s'+s''+h}(t) \qquad (h = 1, \ldots, s'') \end{gathered} \tag{1.18}$$

где

$$Y(t) = r^{-1}y(t) \tag{1.19}$$

Введем новые переменные ξ_g $(g = 1, \ldots, s')$, η_h, ζ_h $(h = 1, \ldots, s'')$ при помощи соотношений

$$\begin{gathered} \Xi_g = \xi_g \qquad (g = 1, \ldots, s') \\ \Xi_{s'+h} = {}^1/_2(\eta_h - i\zeta_h), \qquad \Xi_{s'+s''+h} = {}^1/_2(\eta_h + i\zeta_h) \qquad (h = 1, \ldots, s'') \end{gathered} \tag{1.20}$$

Из соотношений (1.14) и (1.19) видно, что элементы матриц-столбцов $Y_{s'+h}(t)$ и $Y_{s'+s''+h}(t)$ будут комплексными сопряженными. Учитывая это, можно, в соответствии с (1.18), представить разностные уравнения, которым удовлетворяют новые переменные, в следующем виде:

$$\begin{aligned} T\xi_g &= \varkappa_g\xi_g + \sum_{k=1}^{n}(r^{-1})_{gk}y_k(t) \qquad (g = 1, \ldots, s') \\ T\eta_h &= \alpha_h\eta_h + \beta_h\zeta_h + 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n}(r^{-1})_{s'+h,\,k}y_k(t) \\ T\zeta_h &= -\beta_h\eta_h + \alpha_h\zeta_h - 2\,\mathrm{Im}\sum_{k=1}^{n}(r^{-1})_{s'+h,\,k}y_k(t) \qquad (h = 1, \ldots, s'') \end{aligned} \tag{1.21}$$

Вернемся теперь к исходному матричному уравнению (1.3). Для того чтобы система уравнений (1.21) была эквивалентна матричному разностному уравнению (1.3), необходимо, в соответствии с (1.4), принять, что

$$y_k(t) = -\sum_{\sigma=1}^{n} l_{k\sigma}(t)\, x_\sigma(t) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.22}$$

В соотношениях (1.22) остается еще выразить x_k через новые переменные ξ_g, η_h, ζ_h. Матричное соотношение (1.15) можно, в соответствии с (1.14), представить так:

$$x = \sum_{g=1}^{s'} v_g \Xi_g + \sum_{h=1}^{s''} (V_{s'+h} \Xi_{s'+h} + V_{s'+s''+h} \Xi_{s'+s''+h}) \tag{1.23}$$

Учитывая, что элементы матриц-столбцов $V_{s'+h}$ и $V_{s'+s''+h}$ являются комплексными сопряженными величинами и обозначая

$$V_{s'+h},\ V_{s'+s''+h} = v_{s'+h} \pm i v_{s'+s''+h} \tag{1.24}$$

получим, в соответствии с (1.20),

$$x = \sum_{g=1}^{s'} v_g \xi_g + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{s''} [(v_{s'+h} + i v_{s'+s''+h})(\eta_h - i\zeta_h) + \\ + (v_{s'+h} - i v_{s'+s''+h})(\eta_h + i\zeta_h)] \tag{1.25}$$

или

$$x = \sum_{g=1}^{s'} v_g \xi_g + \sum_{h=1}^{s''} (v_{s'+h} \eta_h + v_{s'+s''+h} \zeta_h) \tag{1.26}$$

Элементы матрицы x будут

$$x_\sigma = \sum_{g=1}^{s'} v_{g\sigma} \xi_g + \sum_{h=1}^{s''} (v_{s'+h,\,\sigma} \eta_h + v_{s'+s''+h,\,\sigma} \zeta_h) \qquad (\sigma = 1, \ldots, n) \tag{1.27}$$

Подставляя в правые части уравнений (1.21) вместо функций $y_k(t)$ их значения, согласно (1.22) и (1.27), можно привести уравнения (1.21) к виду

$$T\xi_g = \varkappa_g \xi_g + \sum_{k=1}^{s'} \mu_{gk}(t)\, \xi_k + \sum_{\lambda=1}^{s''} [\nu_{g\lambda}(t)\, \eta_\lambda + \rho_{g\lambda}(t)\, \zeta_\lambda] \qquad (g = 1, \ldots, s')$$

$$T\eta_h = \alpha_h \eta_h + \beta_h \zeta_h + \sum_{k=1}^{s'} \mu_{s'+h,\,k}(t)\, \xi_k + \sum_{\lambda=1}^{s''} [\nu_{s'+h,\,\lambda}(t)\, \eta_\lambda + \rho_{s'+h,\,\lambda}(t)\, \zeta_\lambda]$$

$$T\zeta_h = -\beta_h \eta_h + \alpha_h \zeta_h + \sum_{k=1}^{s'} \mu_{s'+s''+h,\,k}(t)\, \xi_k + \tag{1.28}$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{s''} [\nu_{s'+s''+h,\,\lambda}(t)\, \eta_\lambda + \rho_{s'+s''+h,\,\lambda}(t)\, \zeta_\lambda] \qquad (h = 1, \ldots, s'')$$

Система уравнений (1.28) эквивалентна исходной системе разностных уравнений (1.1).

Заметим теперь, что при переходе от исходных уравнений (1.1) к уравнениям (1.3) на выбор коэффициентов a_{jk} ограничений не накладывалось, а требовалось лишь выполнение соотношений (1.2). Ниже будет показано, что коэффициенты a_{jk} целесообразно выбирать так, чтобы все корни характеристического уравнения (1.9) были простыми и удовлетворяли условию

$$|\varkappa_g| < 1 \quad (g = 1, \ldots, s'), \qquad |\alpha_h + \beta_h i| < 1 \quad (h = 1, \ldots, s'') \tag{1.29}$$

при выполнении которого решения однородного уравнения (1.10) асимптотически стремятся к нулю при $t \to \infty$.

2. Система уравнений (1.28), так же как и исходная система (1.1), является системой линейных разностных уравнений с переменными коэффициентами. Однако для системы уравнений (1.28) можно указать простой метод построения функции Ляпунова, позволяющий получить достаточные условия устойчивости тривиального решения этой системы.

Возьмем функцию Ляпунова в таком виде:

$$V = -\sum_{g=1}^{s'} \xi_g^2 - \sum_{h=1}^{s''} (\eta_h^2 + \zeta_h^2) \tag{2.1}$$

Функция V является определенно-отрицательной. Ее первая разность

$$\Delta V = -\sum_{g=1}^{s'} [\xi_g^2(t+\tau) - \xi_g^2(t)] -$$

$$- \sum_{h=1}^{s''} [\eta_h^2(t+\tau) - \eta_h^2(t) + \zeta_h^2(t+\tau) - \zeta_h^2(t)] \tag{2.2}$$

после подстановки значений $\xi_g(t+\tau)$, $\eta_h(t+\tau)$, $\zeta_h(t+\tau)$ из уравнений (1.28) будет иметь следующий вид:

$$\Delta V = \sum_{g=1}^{s'} [(1-\varkappa_g^2)\xi_g^2 - 2\varkappa_g\xi_g\Lambda_g - \Lambda_g^2] +$$

$$+ \sum_{h=1}^{s''} \{[1-(\alpha_h^2+\beta_h^2)](\eta_h^2+\zeta_h^2) - 2[(\alpha_h\Lambda_{s'+h} - \beta_h\Lambda_{s'+s''+h})\eta_h +$$

$$+ (\beta_h\Lambda_{s'+h} + \alpha_h\Lambda_{s'+s''+h})\zeta_h] - \Lambda_{s'+h}^2 - \Lambda_{s'+s''+h}^2\} \tag{2.3}$$

где через Λ_j $(j = 1, \ldots, n)$ обозначены входящие в правые части уравнений (1.28) функции

$$\Lambda_j = \sum_{k=1}^{s'} \mu_{jk}(t)\xi_k + \sum_{\lambda=1}^{s''} [\nu_{j\lambda}(t)\eta_\lambda + \rho_{j\lambda}(t)\zeta_\lambda] \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

Как видно из (2.3) и (2.4), функция ΔV представляет собой квадратичную форму переменных ξ_g, η_h, ζ_h такого вида:

$$\Delta V = \sum_{g=1}^{s'} [1 - \varkappa_g^2 + \Psi_g(t)]\xi_g^2 +$$

$$+ \sum_{h=1}^{s''} \{[1-(\alpha_h^2+\beta_h^2) + \Psi_{s'+h}(t)]\eta_h^2 + [1-(\alpha_h^2+\beta_h^2) + \Psi_{s'+s''+h}(t)]\zeta_h^2\} +$$

$$+ 2c_{12}\xi_1\xi_2 + 2c_{13}\xi_1\xi_3 + \ldots + 2c_{1,\,s'+s''}\xi_1\eta_{s''} + \ldots + 2c_{1n}\xi_1\zeta_{s''} +$$

$$+ 2c_{23}\xi_2\xi_3 + \ldots + 2c_{2,\,s'+s''}\xi_2\eta_{s''} + \ldots + 2c_{2n}\xi_2\zeta_{s''} + \ldots + 2c_{n-1,\,n}\zeta_{s''-1}\zeta_{s''} \tag{2.5}$$

Коэффициенты c_{ij} $(i \neq j)$ квадратичной формы (2.5), так же как и функции $\Psi_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$, являются комбинациями исходных переменных коэффициентов $l_{jk}(t)$.

В частном случае, когда все исходные коэффициенты $l_{jk}(t) \equiv 0$ $(j, k = 1, \ldots, n)$, функция (2.5) принимает вид

$$\Delta V = \sum_{g=1}^{s'} (1-\varkappa_g^2)\xi_g^2 + \sum_{h=1}^{s''} [1-(\alpha_h^2+\beta_h^2)](\eta_h^2+\zeta_h^2) \tag{2.6}$$

Если корни характеристического уравнения (1.9) удовлетворяют условию (1.29)

$$|\varkappa_g| < 1 \quad (g = 1, \ldots, s'), \qquad |\alpha_h + \beta_h i| < 1 \quad (h = 1, \ldots, s'')$$

то функция (2.6) определенно-положительна и имеет знак, противоположный знаку функции Ляпунова V.

При выполнении условий (1.29) решение (1.11) матричного уравнения (1.10) асимптотически стремится к нулю при $t \to \infty$, т. е. тривиальное решение уравнения (1.10) асимптотически устойчиво.

В общем случае, когда функции $l_{jk}(t) \not\equiv 0$ $(j, k = 1, \ldots, n)$, необходимо рассмотреть квадратичную форму (2.5). Ее дискриминант имеет вид

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned} c_{gg} &= 1 - \varkappa_g^2 + \Psi_g(t) \qquad (g = 1, \ldots, s') \\ c_{s'+h,\, s'+h} &= 1 - (\alpha_h^2 + \beta_h^2) + \Psi_{s'+h}(t) \\ c_{s'+s''+h,\, s'+s''+h} &= 1 - (\alpha_h^2 + \beta_h^2) + \Psi_{s'+s''+h}(t) \qquad (h = 1, \ldots, s'') \end{aligned} \tag{2.8}$$

Если для любого значения $t > 0$ все главные диагональные миноры дискриминанта (2.7) не меньше некоторого положительного числа, то первая разность ΔV функции Ляпунова (2.1) будет знакоопределенной положительной функцией, и ее знак будет противоположным знаку функции Ляпунова.

Как показано в работе [3], где дано распространение теорем Ляпунова на уравнения в конечных разностях, такое свойство первой разности функции Ляпунова является достаточным условием асимптотической устойчивости тривиального решения системы уравнений в конечных разностях.

Таким образом, условия строгой положительности для любого момента времени $t > 0$ всех главных диагональных миноров дискриминанта (2.7) являются достаточными условиями асимптотической устойчивости тривиального решения исходной системы (1.1) разностных уравнений с переменными коэффициентами.

Так как полученные здесь условия устойчивости являются достаточными, а не необходимыми, то, варьируя вид функции V, можно иногда расширить получаемую из условий знакоопределенности функции ΔV область устойчивости в пространстве параметров системы. Для возможности варьирования можно принять функцию V в виде:

$$V = -\sum_{g=1}^{s'} p_g \xi_g^2 - \sum_{h=1}^{s''} (p_{s'+h} \eta_h^2 + p_{s'+s''+h} \zeta_h^2) \tag{2.9}$$

где коэффициенты p_j $(j = 1, \ldots, n)$ должны быть строго положительными. Выбор коэффициентов p_j можно подчинить определенным требованиям, например, обращение в нуль каких-либо слагаемых в главных диагональных минорах дискриминанта (2.7).

Требованию максимального расширения области устойчивости в пространстве интересующих параметров системы целесообразно подчинить и выбор входящих в выражения (1.2) коэффициентов a_{jk}.

3. В качестве примера рассмотрим следующую систему разностных уравнений:

$$Tx_1 - x_1 - kx_2 = 0, \qquad Tx_2 + m(t)x_1 - (1 - \lambda k)x_2 = 0 \tag{3.1}$$

В уравнениях (3.1) коэффициенты λ и k предполагаются существенно положительными.

Систему уравнений (3.1) представим в виде

$$Tx_1 - x_1 - kx_2 = 0, \qquad Tx_2 + \sigma x_1 - (1 - \lambda k)x_2 = g(t)x_1 \qquad (g(t) = \sigma - m(t)) \tag{3.2}$$

При этом коэффициент σ во втором уравнении (3.2) выберем так, чтобы у системы разностных уравнений

$$Tx_1 - x_1 - kx_2 = 0, \qquad Tx_2 + \sigma x_1 - (1 - \lambda k)x_2 = 0$$

характеристическое уравнение

$$\gamma^2 - (2 - \lambda k)\gamma + 1 - \lambda k + k\sigma = 0$$

имело пару комплексных корней $\gamma_1, \gamma_2 = \alpha \pm \beta i$, модуль которых

$$(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} < 1$$

Для этого коэффициент σ должен удовлетворять условиям

$$\sigma > {}^1/_4\lambda^2 k, \qquad 0 < 1 - \lambda k + k\sigma < 1$$

Перейдем теперь к новым переменным η и ζ, которые, в соответствии с (1.27), введем при помощи соотношений

$$x_1 = \eta, \qquad x_2 = -\frac{1-\alpha}{k}\eta + \frac{\beta}{k}\zeta \tag{3.3}$$

Разностные уравнения, которым удовлетворяют η и ζ, в соответствии с (3.2), будут

$$T\eta = \alpha\eta + \beta\zeta, \qquad T\zeta = [-\beta + k\beta^{-1}g(t)]\eta + \alpha\zeta \tag{3.4}$$

Функцию Ляпунова возьмем, согласно (2.1), в следующем виде:

$$V = -(\eta^2 + \zeta^2) \tag{3.5}$$

Первая разность функции V, в силу разностных уравнений (3.4), будет

$$\Delta V = c_{11}\eta^2 + 2c_{12}\eta\zeta + c_{22}\zeta^2 \tag{3.6}$$

где

$$c_{11} = 1 - \alpha^2 - [\beta - k\beta^{-1}g(t)]^2, \qquad c_{12} = -k\alpha\beta^{-1}g(t), \qquad c_{22} = 1 - (\alpha^2 + \beta^2) \tag{3.7}$$

Достаточные условия асимптотической устойчивости тривиального решения системы разностных уравнений (3.1) состоят в том, что для любого значения $t > 0$ главные диагональные миноры дискриминанта квадратичной формы (3.6)

$$D_1 = c_{11}(t), \qquad D_2 = c_{11}(t)\,c_{22}(t) - [c_{12}(t)]^2 \tag{3.8}$$

должны быть не меньше некоторого положительного числа.

При заданных значениях параметров системы λ и k можно из этих условий найти полосу

$$g_1 < g(t) < g_2$$

внутри которой функция $g(t)$ может изменяться по произвольному закону без нарушения устойчивости системы.

Поступила 14 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ройтенберг Я. Н. Об одном методе построения функций Ляпунова для линейных систем с переменными коэффициентами. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
2. Ройтенберг Я. Н. Корректируемый гирогоризонткомпас. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
3. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 1958, т. 1, № 1, 2, 5—6.