Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

О ПРИНЦИПЕ СВЕДЕНИЯ В КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ВРЕМЕНИ

Ю. С. Осипов

(Свердловск)

Рассматривается задача об устойчивости установившихся движений, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с запаздыванием времени, когда характеристическое уравнение системы первого приближения имеет m корней с нулевыми действительными частями и не имеет корней с положительными действительными частями.

Показано, что, как и в случае обыкновенных уравнений [1], эта задача эквивалентна задаче об устойчивости движения некоторой конечномерной подсистемы порядка m, получаемой при выделении критических степеней свободы. При этом развивается подход к теории критических случаев систем с последействием, разработанный С. Н. Шимановым [2,3].

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим систему, возмущенное движение которой описывается уравнениями вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + A_\tau x(t-\tau) + X(x(t), x(t-\tau)) \tag{1.1}$$

Здесь x — n-вектор; $\tau = \mathrm{const} > 0$ — величина запаздывания; A, A_τ — постоянные матрицы соответствующих размерностей; $X(x, y)$ — n-вектор-функция, удовлетворяющая в области

$$\|x\| < H, \qquad \|y\| < H \qquad (H = \mathrm{const}) \tag{1.2}$$

условию Липшица

$$\|X(x^{(1)}, y^{(1)}) - X(x^{(2)}, y^{(2)})\| \leqslant q(\|x^{(1)} - x^{(2)}\| + \|y^{(1)} - y^{(2)}\|) \tag{1.3}$$

с малой величиной q

$$q = L(\|x^{(1)}\| + \|x^{(2)}\| + \|y^{(1)}\| + \|y^{(2)}\|)^\gamma \tag{1.4}$$

где L, γ — положительные постоянные. Условия (1.3), (1.4) характеризуют нелинейность добавки $X(x(t), x(t-\tau))$ в (1.1).

В (1.2) — (1.4), как и везде в дальнейшем,

$$\|v\| = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{1/2} \tag{1.5}$$

Рассмотрим пространство $C_{[-\tau,0]}$ непрерывных функций, заданных на отрезке $[-\tau, 0]$. В книге [4] (стр. 157) показано, что в пространстве $C_{[-\tau,0]}$ уравнению (1.1) соответствует дифференциально-операторное уравнение

$$dx_t(\vartheta)/dt = Px_t(\vartheta) + R[x_t(0), x_t(-\tau)] \tag{1.6}$$

Здесь $x_t(\vartheta) = x(t+\vartheta)\ (-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$ — отрезок траектории системы (1.1), соответствующий моменту времени t; оператор P определяется равенством

$$Px(\vartheta) = \begin{cases} dx(\vartheta)/d\vartheta & (-\tau \leqslant \vartheta < 0) \\ Ax(0) + A_\tau x(-\tau) & (\vartheta = 0) \end{cases} \tag{1.7}$$

Нелинейный оператор $R[x(0), x(-\tau)]$ равен

$$R[x(0), x(-\tau)] = \begin{cases} 0 & (-\tau \leqslant \vartheta < 0) \\ X(x(0), x(-\tau))) & (\vartheta = 0) \end{cases} \tag{1.8}$$

Везде в дальнейшем считается, что аргумент ϑ меняется в пределах $-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0$. Спектр оператора P (1.7) определяется [4] (стр. 164) корнями характеристического уравнения

$$\det[A - \lambda E + A_\tau e^{-\lambda\tau}] = 0 \tag{1.9}$$

Предположим, что уравнение (1.9) имеет m корней λ_i с $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, а остальные корни имеют отрицательные действительные части. Известно, что m — число конечное.

Пусть собственному числу λ_σ кратности m_σ соответствует l_σ цепочек Жордана корневых элементов оператора P (1.7)

$$d_\sigma[\vartheta; k_\sigma\ i_\sigma]$$

$$(i_\sigma = 0, \ldots, m_\sigma[k_\sigma];\ k_\sigma = 1, \ldots, l_\sigma;\ l_\sigma + m_\sigma[1] + \ldots + m_\sigma[l_\sigma] = m_\sigma;\ m_1 + \ldots + m_r = m)$$

(значению $i_\sigma = 0$ отвечает собственный элемент) [5].

Тогда сопряженный с (1.7) оператор [5]

$$-P^*x(-\vartheta) = \begin{cases} dx(-\vartheta)/d(-\vartheta) & (-\tau \leqslant \vartheta < 0) \\ Ax(0) + A_\tau x(\tau) & (\vartheta = 0) \end{cases} \tag{1.10}$$

имеет r собственных чисел $\lambda_\sigma^* = -\lambda_\sigma$ кратности m_σ; каждому из них отвечает l_σ цепочек Жордана корневых злементов оператора P^* (1.10)

$$d_\sigma^*[-\vartheta; k_\sigma, i_\sigma]$$

$$(i_\sigma = 0, \ldots, m_\sigma[k_\sigma];\ k_\sigma = 1, \ldots, l_\sigma;\ l_\sigma + m_\sigma[1] + \ldots + m_\sigma[l_\sigma] = m_\sigma;\ m_1 + \ldots + m_r = m)$$

(В (1.10) и везде в дальнейшем, знак $/$ означает транспонирование.)

Обозначим [5] символом (φ, γ) величину $(\gamma(-\vartheta) \in C_{[0,\tau]})$

$$(\varphi, \gamma) = \varphi'(0)\gamma(0) + \int_{-\tau}^{0} \varphi'(\vartheta) A_\tau' \gamma(\vartheta + \tau)\, d\vartheta \tag{1.11}$$

и будем представлять каждый элемент $\varphi(\vartheta) \in C_{[-\tau, 0]}$ в виде

$$\varphi(\vartheta) = z(\vartheta) + \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{k_\sigma=1}^{l_\sigma} \sum_{i_\sigma=0}^{m_\sigma[k_\sigma]} d_\sigma[\vartheta; k_\sigma, i_\sigma]\, y_\sigma[k_\sigma, i_\sigma] \tag{1.12}$$

полагая постоянные $y_\sigma[k_\sigma, i_\sigma]$ равными

$$y_\sigma[k_\sigma, i_\sigma] = f_\sigma[\varphi(\vartheta); k_\sigma, m_\sigma[k_\sigma] - i_\sigma] = (\varphi, d_\sigma^*[k_\sigma, m_\sigma[k_\sigma] - i_\sigma]) \tag{1.13}$$

Из (1.12), (1.13) следует, что $z(\vartheta)$ — элемент функционального подпространства L_f, определяемого равенствами

$$(L_f)\quad f_\sigma[z(\vartheta); k_\sigma, i_\sigma] = 0, \quad (i_\sigma = 0, \ldots, m_\sigma[k_\sigma];\ k_\sigma = 1, \ldots, l_\sigma;\ \sigma = 1, \ldots, r) \tag{1.14}$$

В силу (1.12), для элемента $x_t(\vartheta)$ траектории системы (1.1) имеем

$$x_t(\vartheta) = z_t(\vartheta) = \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{k_\sigma=1}^{l_\sigma} \sum_{i_\sigma=0}^{m_\sigma[k_\sigma]} d_\sigma[\vartheta;\, k_\sigma,\, i_\sigma] y_\sigma[t;\, k_\sigma,\, i_\sigma] \qquad (1.15)$$

где $y_\sigma[t;\, k_\sigma,\, i_\sigma] = f_\sigma[x_t(\vartheta);\, k_\sigma,\, m_\sigma[k_\sigma] - i_\sigma]$. Переменные $z_t(\vartheta), y(t) = \{y_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)\} = \{y_\sigma[t;\, k_\sigma,\, i_\sigma],\ i_\sigma = 0, \ldots, m_\sigma[k_\sigma];\ \ k_\sigma = 1, \ldots,\ l_\sigma(\sigma = 1, \ldots, r)\}$ удовлетворяют уравнениям

$$dy(t)/dt = Gy(t) + Y[y(t),\, z_t(0),\, z_t(-\tau)] \qquad (1.16)$$

$$dz_t(\vartheta)/dt = Pz_t(\vartheta) + Z[y(t),\, z_t(0),\, z_t(-\tau),\, \nu] \qquad (1.17)$$

Здесь

$$G = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_m \end{bmatrix} = \text{const} \qquad (m \times m\text{-матрица}) \qquad (1.18)$$

Коэффициенты α_i равны либо нулю, либо единице — в зависимости от структуры выделенной части спектра $\{\lambda_i;\ \operatorname{Re}\lambda_i = 0;\ i = 1, \ldots, m\}$оператора P—определенного (1.7); m вектор-функция $Y[y, z(0), z(-\tau)]$ и вещественный n-вектор-оператор $Z[y,\, z(0),\, z(-\tau),\, \vartheta]$ определяются так:

$$Y[y,\, z(0),\, z(-\tau)] = \{Y_i(i = 1, \ldots, m)\} = \Big\{Y_\sigma[y,\, z(0),\, z(-\tau);\, k_\sigma,\, i_\sigma] =$$

$$= d_\sigma^*[0;\, k_\sigma,\, m_\sigma[k_\sigma] - i_\sigma]\, X\Big(z(0) + \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{k_\sigma=1}^{l_\sigma} \sum_{i_\sigma=0}^{m_\sigma[k_\sigma]} d_\sigma[0;\, k_\sigma,\, i_\sigma]\, y_\sigma[k_\sigma,\, i_\sigma] \qquad (1.19)$$

$$z(-\tau) + \ldots\Big);\ \ i_\sigma = 0, \ldots, m_\sigma[k_\sigma];\ k_\sigma = 1, \ldots, l_\sigma(\sigma = 1, \ldots, r)\Big\}$$

$$Z[y,\, z(0),\, z(-\tau),\, \vartheta] = R\Big[z(0) + \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{k_\sigma=1}^{l_\sigma} \sum_{i_\sigma=0}^{m_\sigma[k_\sigma]} d_\sigma[0;\, k_\sigma,\, i_\sigma]\, y_\sigma[k_\sigma,\, i_\sigma] \qquad (1.20)$$

$$z(-\tau) + \ldots\Big] - \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{k_\sigma=1}^{l_\sigma} \sum_{i_\sigma=0}^{m_\sigma[k_\sigma]} d_\sigma[\vartheta;\, k_\sigma\, i_\sigma]\, Y_\sigma[y,\, z(0),\, z(-\tau);\, k_\sigma,\, i_\sigma]$$

Пусть выделенная часть спектра содержит q нулевых и p чисто мнимых чисел;

$$\{\lambda_{r_i} = 0\ \ (i = 1, \ldots, q\},\quad \{\lambda_{s_k};\ \operatorname{Re}\lambda_{s_k} = 0;\ \lambda_{s_k} \neq 0\ \ (k = 1, \ldots, p)\},\quad p + q = m$$

Переходя к действительной форме уравнений, введем обозначения

$$v = \{v_i(i = 1, \ldots, m)\} = \{y_{r_j}(j = 1, \ldots, q);\ \operatorname{Re} y_{s_k},\ \operatorname{Im} y_{s_k}(k = 1, \ldots, p/2)\} \qquad (1.21)$$

$$F[v,\, z(0),\, z(-\tau)] = \{F_i;\ \ i = 1, \ldots, m\} = \qquad (1.22)$$

$$= \{Y_{r_j};\ j = 1, \ldots, q;\ \operatorname{Re} Y_{s_k};\ \operatorname{Im} Y_{s_k};\ \ k = 1, \ldots, p/2 \quad \text{при } y_{r_j} = v_j(j = 1, \ldots, q)$$

$$\operatorname{Re} y_{s_k} = v_{q+k};\ \operatorname{Im} y_{s_k} = v_{q+k+1}, \qquad (k = 1, \ldots, p/2)\}$$

$$Z[v,\, z(0),\, z(-\tau),\, \vartheta] = \qquad (1.23)$$

$$= \{Z[y,\, z(0),\, z(-\tau),\, \vartheta] \quad \text{при } y_{r_j} = v_j;\ Y_{r_j} = F_j\ \ (j = 1, \ldots, q);\ \operatorname{Re} y_{s_k} = v_{q+k}$$

$$\operatorname{Im} y_s = v_{q+k+1},\ \operatorname{Re} Y_{s_k} = F_{q+k},\ \operatorname{Im} Y_s = F_{q+k+1}\ (k = 1, \ldots, p/2)\}$$

Тогда уравнения движения (1.16), (1.17) можно представить в виде)

$$dv/dt = Qv + F[v, z_t(0), z_t(-\tau)] \tag{1.24}$$

$$dz_t(\vartheta)/dt = Pz_t(\vartheta) + Z[v, z(0), z(-\tau), \vartheta] \tag{1.25}$$

Здесь постоянная $m \times m$ матрица Q имеет вид

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{r_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{r_2} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_{r_q} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \tag{1.26}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{Im}\lambda_{s_1} & \alpha_{s_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \operatorname{Im}\lambda_{s_1} & 0 & 0 & \alpha_{s_1} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\operatorname{Im}\lambda_{s_{p/2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \operatorname{Im}\lambda_{s_{p/2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Задачи об устойчивости систем (1.1) и (1.24), (1.25) эквивалентны.

Как и в случае систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями [1], возникает вопрос: определяют ли свойства устойчивости «укороченной» системы

$$dv/dt = Qv + F[v, 0, 0] \tag{1.27}$$

аналогичные свойства полной системы (1.24), (1.25) (т. е. системы (1.1))?

Ниже, в § 2, дан ответ на этот вопрос в предположении, что правые части системы (1.24), (1.25) стеснены некоторыми ограничениями. Как и в случае обыкновенных уравнений [1], можно показать, что при аналитических правых частях системы (1.1) существует преобразование, приводящее систему (1.24), (1.25) к виду, когда эти условия выполнены. Доказательство последнего утверждения здесь опущено.

Доказательство принципа сведения проводится здесь аналогично доказательству[1] этого принципа в случае обыкновенных уравнений [1].

§ 2. Принцип сведения. Введем в пространстве $C_{[-\tau,0]}$ метрику

$$\|\varphi(\vartheta)\|_\tau = \sup\left(\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(\vartheta)|^2\right)^{1/2} \tag{2.1}$$

В силу (1.3), (1.4) функции $F[v, z(0), z(-\tau)]$, $Z[v, z(0), z(-\tau), \vartheta]$ в области

$$(G) \qquad \|v\| < H_1, \qquad \|z(\vartheta)\|_\tau < H_1 \tag{2.2}$$

удовлетворяют условию Липшица с малыми множителями

$$\|F[v', z'(0), z'(-\tau)] - F[v'', z''(0), z''(-\tau)]\| \leqslant \tag{2.3}$$

$$\leqslant q_1(\|v' - v''\| + \|z'(\vartheta) - z''(\vartheta)\|_\tau)$$

$$q_1 = L_1(\|v'\| + \|v''\| + \|z'(\vartheta)\|_\tau + \|z''(\vartheta)\|_\tau)^\gamma \quad (L_1 = \text{const} > 0)$$

$$\|Z[v', z'(0), z'(-\tau), \vartheta] - Z[v'', z''(0), z''(-\tau), \vartheta]\|_\tau \leqslant$$

$$\leqslant q_2(\|v' - v''\| + \|z'(\vartheta) - z''(\vartheta)\|_\tau) \tag{2.4}$$

$$q_2 = L_2(\|v'\| + \|v''\| + \|z'(\vartheta)\|_\tau + \|z''(\vartheta)\|_\tau)^\gamma \quad (L_2 = \text{const} > 0)$$

[1] Н. П. Еругин отметил [6], что доказательство в книге [1] содержит серьезную неточность. В настоящей статье это замечание учтено, и доказательство дополнено.

Здесь величина γ та же самая, что и в (1.4), положительная постоянная H_1 определенным образом вычисляется по постоянной H из (1.2) в соответствии с (1.12), (1.5), (2.1).

Приведем некоторые определения [1]. Рассмотрим систему уравнений

$$dv / dt = F[v, t] \tag{2.5}$$

где непрерывная m-вектор-функция $F[v, t]$ в области (2.1) удовлетворяет условию Липшица

$$\| F[v^{(1)}, t] - F[v^{(2)}, t] \| \leqslant L \| v^{(1)} - v^{(2)} \| \qquad (L = \text{const} > 0)$$

и $F[0, t] \equiv 0$. Пусть в области (2.1) функция $F[v, t]$ допускает представление

$$F[v, t] = F_1[v, t] + F_2[v, t] \tag{2.6}$$

где $F_2[v, t]$ означает совокупность членов порядка по v выше N, причем

$$\| F_2[v, t] \| \leqslant K \| v \|^{N+\gamma} \qquad (K = \text{const} > 0, N = \text{const} \geqslant 1) \tag{2.7}$$

где величина γ та же, что и в условиях (2.3), (2.4).

Определение 2.1. Невозмущенное движение $v = 0$ системы (2.5) называется устойчивым вне зависимости от членов порядка выше N, если для любого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, существует такое положительное число $\eta(\varepsilon, K)$, зависящее только от ε и K, что для всех решений уравнений (2.5), для которых в начальный момент $t = 0$ выполняются условия

$$\| v(0) \| \leqslant \eta(\varepsilon, K) \tag{2.8}$$

будут при всех $t > 0$ выполняться неравенства

$$\| v(t) \| < \varepsilon \tag{2.9}$$

при любом выборе функции $F_2[v, t]$, удовлетворяющей в области (2.1) оценке (2.7).

Определение 2.2. Невозмущенное движение $v = 0$ системы (2.5) называется неустойчивым вне зависимости от членов порядка выше N, если при тех же условиях относительно функции $F_2[v, t]$ существует положительное число $\varepsilon(K)$, зависящее только от K, такое, что как бы мало ни было число $\eta > 0$, найдется вектор $v^\circ(K, \eta)$, зависящий только от K и η, для которого $\| v^\circ(K, \eta) \| \leqslant \eta$, и при этом решение $v(t)$ уравнений (2.5) с начальным условием

$$v(0) = v^\circ(K, \eta) \tag{2.10}$$

будет в некоторый момент времени $t = t_1 = \text{const}$ удовлетворять равенству

$$\| v(t_1) \| = \varepsilon(K) \tag{2.11}$$

Теорема 2.1. Пусть правые части системы (1.24), (1.25) в области (2.1), кроме условий (2.3), (2.4), удовлетворяют также условиям.

(1) Невозмущенное движение $v = 0$ «укороченной» системы (1.27) устойчиво (асимптотически устойчиво) или неустойчиво вне зависимости от членов порядка выше N в смысле определений 2.1, 2.2.

(2) Оператор $Z[v, 0, 0, \vartheta]$ удовлетворяет оценке

$$\| Z[v, 0, 0, \vartheta] \|_\tau \leqslant L_4 \| v \|^{N+\gamma_1} \qquad (L_4 = \text{const} > 0, \ \gamma_1 = \text{const} > 0) \tag{2.12}$$

Тогда свойства устойчивости системы (1.24), (1.25) (а следовательно, и системы (1.1)) совпадают со свойствами устойчивости «укороченной» системы (1.27).

Доказательство. Пусть невозмущенное движение $v = 0$ «укороченной» системы (1.27) устойчиво (в смысле определения 2.1).

Не нарушая общности, можно считать, что матрица Q (1.26) равна

$$Q = \{Q\}_{\alpha_i = 0} + Q^* \tag{2.13}$$

где матрица Q^* удовлетворяет оценке

$$\| Q^* \| < \varepsilon_1 \qquad (\varepsilon_1 \text{ — произвольное положительное число}) \tag{2.14}$$

В самом деле, этого всегда можно добиться неособым линейным вещественным преобразованием векторной переменной v.

Рассмотрим в подпространстве L_f (1.14) уравнения

$$\frac{du_t(\vartheta)}{dt} = Pu_t(\vartheta), \qquad u_t(\vartheta) \in L_f\,(1.14) \tag{2.15}$$

Всякое решение $u_t(\vartheta)$ системы (2.15) (с $u_0(\vartheta) \in L_f$ (1.14)) удовлетворяют оценке [5]

$$\| u_t(\vartheta)\|_\tau \leqslant B \| u_0(\vartheta)\|_\tau \exp[-\beta t] \qquad (B, \beta = \mathrm{const} > 0) \tag{2.16}$$

Но тогда на основании результатов из книги [4] (стр. 191—193) в подпространстве L_f (1.14) может быть построен непрерывный функционал $V[u(\vartheta)]$, удовлетворяющий оценкам

$$c_1 \| u(\vartheta)\|_\tau^2 \leqslant V[u(\vartheta)] \leqslant c_2 \| u(\vartheta)\|_\tau^2 \tag{2.17}$$

$$\limsup_{\Delta t \to +0} \left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(2.15)} \leqslant -c_3 \| u(\vartheta)\|_\tau^2 \tag{2.18}$$

$$| V[u^{(1)}(\vartheta)] - V[u^{(2)}(\vartheta)]| \leqslant c_4 \| u^{(1)}(\vartheta) - u^{(2)}(\vartheta)\|_\tau \max(\| u^{(1)}(\vartheta)\|_\tau, \| u^{(2)}(\vartheta)\|_\tau) \tag{2.19}$$

Здесь $c_1, \ldots, c_4$ — положительные постоянные.

Выполним в (1.24), (1.25) преобразование переменных, полагая

$$z(\vartheta) = \| v \|^N \cdot \xi(\vartheta) \tag{2.20}$$

Преобразованием (2.20) будем пользоваться лишь в той области $G_\xi \subset G$ (2.1) пространства $\{v, z(\vartheta)\}$, где величина $\| \xi(\vartheta)\|_\tau$ ограничена

$$(G_\xi) \qquad \| \xi(\vartheta)\| < H_2 \tag{2.21}$$

Здесь H_2 — некоторая положительная постоянная.

В переменных $v(t)$, $\xi_t(\vartheta)$ уравнения движения (1.24), (1.25) принимают вид

$$\frac{dv}{dt} = Qv + F[v, 0, 0] + F^*[v, \xi_t(0), \xi_t(-\tau)] \tag{2.22}$$

$$\frac{d\xi_t(\vartheta)}{dt} = P\xi_t(\vartheta) - N\| v \|^{-2} v'Qv\xi_t(\vartheta) + Z^*[v, \xi_t(0), \xi(-\tau), \vartheta] \tag{2.23}$$

где функции

$$F^*[v, \xi(0), \xi(-\tau)] = F[v, \| v \|^N \xi(0), \| v \|^N \xi(-\tau)] - F[v, 0, 0] \tag{2.24}$$

$$Z^*[v, \xi(0), \xi(-\tau), \vartheta] = \| v \|^{-N} Z[v, \| v \|^N \xi(0), \| v \|^N \xi(-\tau), \vartheta] - \\ - N \| v \|^{-2} v'F[v, \| v \|^N \xi(0), \| v \|^N \xi(-\tau)] \tag{2.25}$$

в области G_ξ (2.21), в силу условий (2.3), (2.4), (2.12), удовлетворяют оценкам

$$\| F^*[v, \xi(0), \xi(-\tau)]\| \leqslant L_5 \| v \|^{N+\gamma} \qquad (L_5 = \mathrm{const} > 0) \tag{2.26}$$

$$Z^*[0, \xi(0), \xi(-\tau), \vartheta] \equiv 0 \tag{2.27}$$

Зададимся произвольным положительным числом $\varepsilon < H_2$. Рассмотрим в области G_ξ (2.21) гиперповерхность M_1

$$(M_1) \qquad V[\xi(\vartheta)] = l_1(\varepsilon) \tag{2.28}$$

где $l_1(\varepsilon)$ — постоянная, удовлетворяющая условию

$$0 < l_1(\varepsilon) < c_1 \varepsilon^2 \tag{2.29}$$

Тогда в силу (2.17) выполняются оценки

$$\mu(\varepsilon) \leqslant \| \xi(\vartheta)\|_\tau < \varepsilon \quad \text{при } \xi(\vartheta) \text{ из } M_1 \tag{2.30}$$

где $\mu(\varepsilon)$ — некоторая положительная постоянная.

Вычислим $\limsup \Delta V / \Delta t$ при $\Delta t \to +0$ в силу (2.23) на гиперповерхности M_1 (2.28), учитывая оценки (2.17) — (2.19), (2.30). Для краткости введем обозначения: $\xi_t[\vartheta; (2.23)]$ — элемент траектории системы (2.23), $\xi_t[\vartheta; (2.15)]$ — элемент траектории системы (2.15).

Имеем

$$\limsup_{\Delta t\to+0}\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(2.23)}\leqslant\limsup_{\Delta t\to+0}\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(2.15)}+\limsup_{\Delta t\to+0}\frac{1}{\Delta t}\mid V[\,\xi_{t+\Delta t}\,[\vartheta;\,(2.23)]]\,-$$

$$-\,V\,[\xi_{t+\Delta t}\,[\vartheta;\,(2.15)]]\,|\leqslant-c_3\,\|\,\xi_t\,(\vartheta)\|_\tau{}^2+c_4\limsup_{\Delta t\to+0}\frac{1}{\Delta t}\,[\|\,\xi_{t+\Delta t}\,[\vartheta;\,(2.23)]\,-$$

$$-\,\xi_{t+\Delta t}\,[\vartheta;\,(2.15)]\|_\tau\max\,(\|\,\xi_{t+\Delta t}\,[\vartheta;\,(2.23)]\|_\tau,\,\|\,\xi_{t+\Delta t}\,[\vartheta;\,(2.15)]\|_\tau)]\leqslant-c_3\,\|\,\xi_t\,(\vartheta)\|_\tau{}^2\,+$$

$$+\,N\,\|\,v\,\|^{-2}\,|\,v'Qv\,|\,\|\,\xi_t\,(\vartheta)\|_\tau{}^2+c_4\,\|\,\xi_t\,(\vartheta)\|_\tau\,\|\,Z^*\,[v,\,\xi_t\,(0),\,\xi_t\,(-\tau),\,\vartheta]\|_\tau$$

Здесь предполагалось, что $\xi_t\,[\vartheta;\,(2.23)]=\xi_t\,[\vartheta;\,(2.15)]$.

Учитывая, что $v'\{Q\}\,v\equiv 0$, при $d_i=0$ и выбирая число ε_1 в (2.14) из условия $\varepsilon_1<c_3\,/\,N$, получаем на гиперповерхности M_1 (2.28) оценку

$$\left\{\limsup_{\Delta t\to+0}\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(2.23)}\right\}_{\xi\,(\vartheta)\in M_1}\leqslant-\,(c_3-N\varepsilon_1)\,\mu^2\,(\varepsilon)+c_4\varepsilon\,\|\,Z^*\,[v,\,\xi\,(0),\,\xi\,(-\tau),\,\vartheta]\|_\tau \qquad (2.31)$$

Из свойства (2.27) функции $Z^*\,[v,\,\xi\,(0),\,\xi\,(-\tau),\,\vartheta]$ и оценки (2.31) вытекает, что существует положительное число $h\,(\varepsilon)<\varepsilon$ такое, что

$$\left\{\limsup_{\Delta t\to+0}\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(2.23)}\right\}_{\xi\,(\vartheta)\in M_1}<0\qquad\text{при }\|\,v\,\|\leqslant h\,(\varepsilon)<\varepsilon \qquad (2.32)$$

Пусть $\xi_t{}^\circ\,(\vartheta)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию

$$\xi_t{}^\circ\,(\vartheta)\in G_\xi\,(2.21)\qquad\text{при }t\geqslant 0 \qquad (2.33)$$

Положим в (2.22) $\xi_t\,(\vartheta)=\xi_t{}^\circ\,(\vartheta)$. Получим уравнения

$$dv\,/\,dt=Qv+F_1\,[v]+F^*\,[v,\,t] \qquad (2.34)$$

Здесь функция $F_1\,[v]$ означает совокупность членов порядка выше N в функции $F\,[v,\,0,\,0]$ из (1.27), и, следовательно, функция

$$F^*\,[v,\,t]=F\,[v,\,0,\,0]-F_1\,[v]+F^*\,[v,\,\xi_t{}^\circ\,(0),\,\xi_t{}^\circ\,(-\tau)]$$

в силу (2.26) и условия (1) теоремы, удовлетворяет при $\xi_t{}^\circ\in G_\xi$ (2.21) оценке

$$\|\,F^*\,[v,\,t]\|\leqslant K_1\,\|\,v\,\|^{N+\gamma} \qquad (2.35)$$

Здесь K_1 — положительная постоянная, зависящая только от структуры уравнений (2.22) и не зависящая от того или иного частного выбора $\xi_t{}^\circ\,(\vartheta)\in G_\xi$ (2.21). Согласно условию об устойчивости «укороченной» системы (1.27) вне зависимости от членов порядка выше N, по числу $h\,(\varepsilon)$ можно указать положительное число $\delta\,(h\,(\varepsilon),\,K_1)$ такое, что для всех решений (2.34), удовлетворяющих при $t=0$

$$\|\,v\,(0)\|\leqslant\delta\,(h\,(\varepsilon),\,K_1) \qquad (2.36)$$

будет иметь место при всех $t>0$ оценка

$$\|\,v\,(t)\|<h\,(\varepsilon) \qquad (2.37)$$

Если же функция $\xi_t{}^\circ\,(\vartheta)$ удовлетворяет (2.33) на интервале $[0,\,T=\mathrm{const}]$, то все решения (2.34), удовлетворяющие в начальный момент времени $t=0$ неравенству (2.36), будут удовлетворять на всем этом интервале неравенству (2.37).

Рассмотрим в пространстве $\{v,\,z\,(\vartheta)\}$ гиперповерхность M_2

$$(M_2)\qquad V\,[z\,(\vartheta)]=l_2\,(\varepsilon) \qquad (2.38)$$

где $l_2\,(\varepsilon)$ — некоторое достаточно малое положительное число, которым распорядимся в дальнейшем. Определим в пространстве $\{v,\,z\,(\vartheta)\}$ две области G_1 и G_2, полагая

$$(G_1)\qquad\|\,v\,\|\leqslant\eta\,(\varepsilon),\quad V\,[\xi\,(\vartheta)]\leqslant l_1\,(\varepsilon) \qquad (2.39)$$

$$(G_2)\quad\|\,v\,\|\leqslant\eta\,(\varepsilon),\quad V\,[\xi\,(\vartheta)]\geqslant l_1\,(\varepsilon),\quad V\,[z\,(\vartheta)]\leqslant l_2\,(\varepsilon) \qquad (2.40)$$

Здесь $\eta\,(z)$ — положительное число, удовлетворяющее условиям

$$\eta\,(\varepsilon)\leqslant\delta\,(h\,(\varepsilon),\,K_1) \qquad (2.41)$$

$$V\,[\xi\,(\vartheta)]<l_1\,(\varepsilon)\quad\text{при}\quad\|\,\xi\,(\vartheta)\,\|_\tau\leqslant\eta\,(\varepsilon) \qquad (2.42)$$

В силу свойства (2.17), такой выбор числа $\eta(\varepsilon)$ возможен.

Из (2.17), (2.39), (2.40) следует, что объединение G^* областей G_1 и G_2 ($G^* = G_1 \cup G_2$) содержит нулевой элемент $\{v = 0,\ z(\vartheta) = 0\}$ в качестве внутренней точки. При достаточно малом $l_2(\varepsilon)$ имеем $G^* \subset G$ (2.1).

Предположим сначала, что начальные возмущения принадлежат области G_1 (2.39). Так как $G_1 \subset G_\xi$ (2.21), то уравнения движения можно рассматривать в форме (2.22), (2.23). Пусть $v(t)$, $\xi_t(\vartheta)$ — произвольное решение (2.22), (2.23), для которого в начальный момент $t = 0$ выполняются неравенства

$$\| v(0) \| \leqslant \eta(\varepsilon), \qquad \| \xi_0(\vartheta) \|_\tau \leqslant \eta(\varepsilon) \tag{2.43}$$

Из (2.43) вытекает, что при всех $t > 0$ выполняются неравенства

$$\| v(t) \| < \varepsilon, \qquad \| \xi_t(\vartheta) \|_\tau < \varepsilon \tag{2.44}$$

В самом деле, второе неравенство (2.44), выполняясь при $t = 0$, по непрерывности будет выполняться при достаточно малых t. Пусть $t = T$ — первый момент времени, для которого $\| \xi_t(\vartheta) \|_\tau = \varepsilon$. Но тогда на основании (2.28) — (2.30)

$$V[\xi_T(\vartheta)] > l_1(\varepsilon) \tag{2.45}$$

откуда и в силу выбора $\eta(\varepsilon)$ по (2.42) вытекает, что существует момент времени $t = t_1 \in (0, T)$ такой, что одновременно будут выполняться условия

$$\xi_{t_1}(\vartheta) \in M_1, \qquad \left\{ \limsup_{\Delta t \to +0} \left(\frac{\Delta V}{\Delta t} \right) \right\}_{\xi_{t_1} \in M_1} \geqslant 0 \tag{2.46}$$

Функция $\xi_t(\vartheta)$ при $t \in (0, T)$ удовлетворяет условию (2.33). Далее, так как функция $v(t)$ будет одним из решений уравнений (2.34) при $\xi_t{}^\circ(\vartheta) = \xi_t(\vartheta)$ и число $\eta(\varepsilon)$ выбрано в соответствии (2.41), то для $v(t)$ во всем интервале времени $(0, T)$ будет выполняться неравенство (2.37) и, следовательно, неравенство (2.32). Последнее противоречит (2.46). Итак, при всех $t > 0$ выполняется неравенство (2.45). Но тогда из предыдущих рассуждений вытекает, что при всех $t > 0$ функция $v(t)$ удовлетворяет неравенству (2.37), откуда в силу условия $h(\varepsilon) < \varepsilon$, следует, что при всех $t > 0$ имеет место первая оценка (2.44).

Таким образом, доказана условная устойчивость невозмущенного движения $v(t) = 0$, $z_t(\vartheta) = 0$ системы (1.24), (1.25) относительно начальных возмущений $v(0)$, $z_0(\vartheta)$ из области G_1 (2.39), стесненных условиями (2.43)

Покажем, что из такой условной устойчивости следует устойчивость движения $v(t) = 0$, $z_t(\vartheta) = 0$ относительно любых достаточно малых начальных возмущений.

Выберем в (2.40) число $l_2(\varepsilon)$ из условий

$$l_2(\varepsilon) < \varepsilon, \qquad l_2(\varepsilon) < c_1 c_2 \mu^2(\varepsilon)\, \eta^{2N}(\varepsilon) \tag{2.47}$$

$$\limsup_{\Delta t \to +0} \left(\frac{\Delta V[z_t(\vartheta)]}{\Delta t} \right)_{(1.24),(1.25)} < 0 \tag{2.48}$$

при $z(\vartheta)$ из M_2 (2.38) в области G_2 (2.40).

Второе условие (2.47) означает, что в пространстве $\{v, z(\vartheta)\}$ гиперповерхность $V[z(\vartheta)] = l_2(z)$ (2.38) пересекает гиперповерхность $V[\xi(\vartheta)] = l_2(\varepsilon)$ (2.28) при $\| v \| \leqslant \eta(\varepsilon)$, так что из области G_2 (2.40) нельзя вывести элемент $\{v, z(\vartheta)\}$, непрерывно деформируя его и не пересекая гиперповерхности (2.28) или (2.38).

Выбор числа $l_2(\varepsilon)$, удовлетворяющего также и условию (2.48), возможен. В самом деле, вычислим $\lim\sup \Delta V[z_t(\vartheta)]\, \Delta t$ при $\Delta t \to +0$ вдоль движения системы (1.24), (1.25). Учитывая при этом оценки (2.17) — (2.19), получаем

$$\limsup_{\Delta t \to +0} \left(\frac{\Delta V[z_t(\vartheta)]}{\Delta t} \right)_{(1.24),(1.25)} \leqslant -c_3 \| z_t(\vartheta) \|_\tau{}^2 +$$

$$+ c_4 \| z_t(\vartheta) \| \left(\| Z[v, 0, 0, \vartheta] \|_\tau + \| Z[v, z_t(0), z_t(-\tau), \vartheta] - Z[v, 0, 0, \vartheta] \|_\tau \right) \tag{2.49}$$

Так как в области G_2 (2.40), в силу (2.17), выполняется условие

$$\|v\|^N \leqslant \frac{1}{\sqrt{c_1 \mu_*(\varepsilon)}} \|z(\vartheta)\|_\tau \tag{2.50}$$

то из оценок (2.4), (2.12), (2.52), (2.38), (2.17), (2.49) и вытекает возможность выбора $l_2(\varepsilon)$, удовлетворяющего (2.47), (2.48).

Рассмотрим произвольное движение $v(t)$, $z_t(\vartheta)$ системы (1.24), (1.25), начальное возмущение которого $\{v(0), z_0(\vartheta)\}$ лежит в области G_2 (2.40).

В силу выбора числа $l_2(\varepsilon)$ по (2.47), (2.48), движение $v(t)$ $z_t(\vartheta)$, начинающееся из точки $\{v(0), z_0(\vartheta)\} \in G_2$, либо все время остается в области G_2 — и тогда по построению последней при всех $t > 0$ будут выполняться неравенства

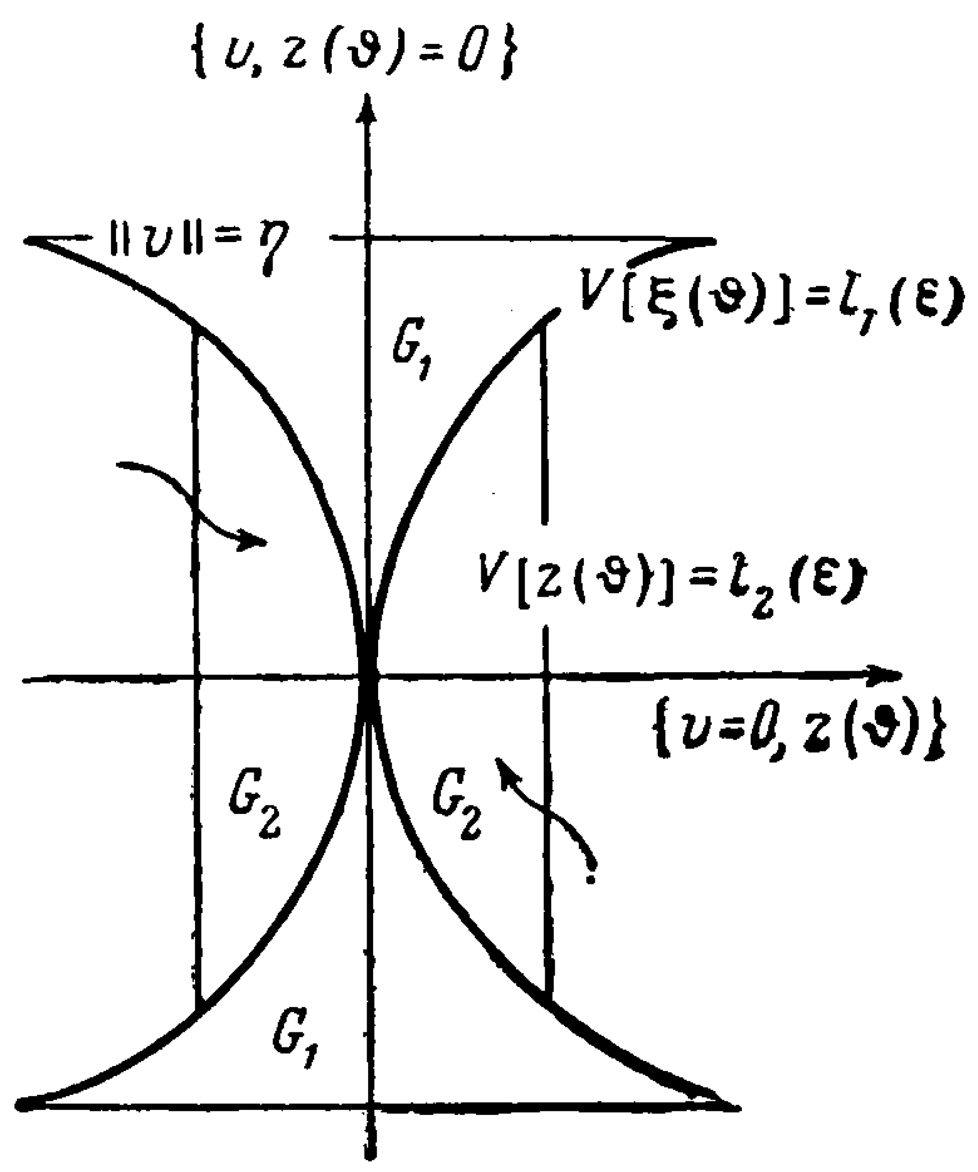
$$\|v(t)\| < \varepsilon, \qquad \|z_t(\vartheta)\|_\tau < \varepsilon \tag{2.51}$$

(более того $\lim v(t) = 0$, $\lim z_t(\vartheta) = 0$ при $t \to \infty$), либо движение $v(t)$, $z_t(\vartheta)$ покидает область G_2 (2.40) через гиперповерхность (2.28) и при этом обязательно при $\|v\| \leqslant \eta(\varepsilon)$. В последнем случае, попадая в область G_1 (2.39), движение $v(t)$, $z_t(\vartheta)$ по ранее доказанному все время остается в области

$$\|v\| < h(\varepsilon), \qquad V[\xi(\vartheta)] \leqslant l_1(\varepsilon) \tag{2.52}$$

Таким образом, устойчивость невозмущенного движения $v(t) = 0$, $z_t(\vartheta) = 0$ системы (1.24), (1.25) (а следовательно, и устойчивость невозмущенного движения $x = 0$ системы (1.1)) вытекает из устойчивости движения $v = 0$ «укороченной» системы (1.27) (в смысле определения 2.1).

Геометрический смысл проведенных рассуждений пояснен на фигуре.



Пусть теперь невозмущенное движение $v = 0$ системы (1.27) асимптотически устойчиво. Рассмотрим произвольное движение $v(t)$, $\xi_t(\vartheta)$ системы (2.22), (2.23) с начальными условиями

$$\|v(0)\| \leqslant \eta, \qquad \|\xi_0(\vartheta)\|_\tau \leqslant \eta \tag{2.53}$$

где η — достаточно малое положительное число. В силу условий теоремы и на основании доказанного, невозмущенное движение $v = 0$, $\xi_t(\vartheta) = 0$ системы (2.22), (2.23) устойчиво, и, следовательно, функция $\xi^t(\vartheta)$ удовлетворяет условию (2.33). Но тогда при $\xi_t^\circ(\vartheta) = \xi_t(\vartheta)$ невозмущенное движение $v = 0$ системы (2.34) будет асимптотически устойчивым. А так как функция $v(t)$ является одним из решений (2.34) при $\xi_t^\circ(\vartheta) = \xi_t(\vartheta)$, то она необходимо удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim v(t) = 0 \text{ при } t \to \infty \tag{2.54}$$

при достаточно малом η в (2.53).

Можно показать, что $\xi_t(\vartheta)$ также удовлетворяет (2.54).

Пусть l — произвольное, сколь угодно малое положительное число. Рассмотрим множество M_3 функций $\xi(\vartheta)$

$$(M_3) \qquad \xi(\vartheta) \in G_\xi \text{ (2.21)}, \qquad V[\xi(\vartheta)] \geqslant l \tag{2.55}$$

Подставим в (2.23) функцию $v(t)$, и при условии (2.54) вычислим $\lim\sup \Delta V / \Delta t$ при $\Delta t \to +0$ в силу полученных уравнений, одним из решений которых будет функция $\xi_t(\vartheta)$. Повторяя рассуждения, которые использовались при выводе оценки (2.32), и учитывая предельное соотношение (2.54) для функции $v(t)$, заключаем, что существует такой момент времени $t = t_1$, начиная с которого будет выполняться неравенство

$$\left\{\limsup_{\Delta t \to +0} \left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(2.23)}\right\}_{\xi(\vartheta) \in M_3} < -\gamma \quad \text{при } t > t_1 \tag{2.56}$$

для всех решений уравнений (2.23) при $v = v(t)$ и, в частности, для $\xi_t(\vartheta)$. В (2.56) величина γ — некоторая положительная постоянная. Из (2.56) вытекает, что существует момент $t = t_2 > t_1$, начиная с которого выполняется неравенство

$$V[\xi_t(\vartheta)] < l \tag{2.57}$$

В самом деле, если бы такого момента $t = t_2$ не существовало, т. е. $\xi_t(\vartheta) \in M_3$ при $t > t_1$, то для $w(t) = V[\xi_t(\vartheta)]$ согласно (2.56) выполнялось бы неравенство $w(t) \leqslant w(t_1) - \gamma(t - t_1)$, противоречащее при $t > w(t_1) / \gamma + t_1$ оценке (2.17).

Таким образом, неравенство (2.57) выполняется при всех $t \geqslant t_2 = \text{const}$. Но тогда из (2.17), (2.57), в силу произвольности l, вытекает предельное соотношение

$$\lim \xi_t(\vartheta) = 0 \qquad \text{при } t \to \infty$$

которое вместе с (2.54) завершает доказательство асимптотической устойчивости движения $v = 0$, $z_t(\vartheta) = 0$ системы (1.24), (1.25) относительно начальных возмущений, стесненных условием $\|\xi_0(\vartheta)\|_\tau \leqslant \eta$.

Из доказанной условной асимптотической устойчивости вытекает асимптотическая устойчивость невозмущенного движения $v = 0$, $z_t(\vartheta) = 0$ системы (2.22), (2.23) относительно любых достаточно малых начальных возмущений $v(0)$, $z_0(\vartheta)$.

Доказательство этого утверждения полностью повторяет соответствующие рассуждения из доказательства устойчивости движения $v = 0$, $z_t(\vartheta) = 0$ (см.стр. 817—818), а потому здесь не приводится.

Наконец, пусть невозмущенное движение $v = 0$ «укороченной» системы (1.27) неустойчиво (в смысле определения 2.2).

Рассмотрим уравнения (2.34). Согласно условию о неустойчивости, для «укороченной» системы (1.27), вне зависимости от членов порядка выше N, существует положительное число $\varepsilon(K_1)$, зависящее только от K_1, такое, что как бы мало ни было число $\eta > 0$, найдется вектор $v^\circ(K_1, \eta)$, зависящий только от K_1 и η, для которого $\|v^\circ(K_1, \eta)\| \leqslant \eta$, и при этом решение $v(t)$ уравнений (2.34) с начальным условием

$$v(0) = v^\circ(K_1, \eta) \tag{2.58}$$

будет в некоторый момент $t = t_1 = \text{const}$ удовлетворять равенству

$$\|v(t_1)\| = h(\varepsilon) < \varepsilon \tag{2.59}$$

где $h(\varepsilon)$ определено в (2.32).

Предположим, что невозмущенное движение $v(t) = 0$, $z_t(\vartheta) = 0$ системы (1.24), (1.25) устойчиво: существует такое положительное число η, что для всех решений уравнений (1.24), (1.25) с начальными условиями

$$\|v(0)\| \leqslant \eta, \qquad \|z_0(\vartheta)\|_\tau \leqslant \eta \tag{2.60}$$

будут при всех $t > 0$ выполняться неравенства

$$\|v(t)\| < h(\varepsilon), \qquad \|z_t(\vartheta)\|_\tau < h(\varepsilon) \tag{2.61}$$

Выделим решение $v^*(t)$, $z_t^*(\vartheta)$ с начальными условиями

$$v^*(0) = v^\circ(K_1, \eta) \tag{2.62}$$

$$z_0^*(\vartheta) = \varphi(\vartheta), \; (\|\varphi(\vartheta)\|_\tau < \min(\eta, \|v^\circ\|^N \sqrt{l_1(\varepsilon)} / \sqrt{c_2})) \tag{2.63}$$

Из (2.63), в силу (2.17), для функции $\xi_t^*(\vartheta) = \|v^*(t)\|^{-N} z_t^*(\vartheta)$ в начальный момент времени $t = 0$ вытекает оценка

$$V[\xi_0^*(\vartheta)] < l_1(\varepsilon) \tag{2.64}$$

Но тогда из (2.32) и (2.68) следует неравенство

$$V[\xi_t^*(\vartheta)] < l_1(\varepsilon) \quad \text{при } t > 0 \tag{2.65}$$

Из последнего, в силу (2.29), вытекает оценка

$$\|\xi_t^*(\vartheta)\|_\tau < \varepsilon \quad \text{при } t > 0 \tag{2.66}$$

и, следовательно, $\xi_t^*(\vartheta)$ удовлетворяет условию (2.33).

Положим $\xi_t^\circ(\vartheta) = \xi_t^*(\vartheta)$ в (2.34). Тогда решение полученных уравнений с начальными условиями $v(0) = v^\circ(K_1, \eta)$ будет совпадать с функцией $v^*(t)$ по крайней мере до тех пор, пока $\|v(t)\| < h(\varepsilon)$. Но для $v(t)$ выполняется условие (2.59). Последнее противоречит (2.61).

Таким образом, из неустойчивости невозмущенного движения $v = 0$ «укороченной» системы (1.27) (в смысле определения 2.2) вытекает неустойчивость невозмущенного движения $v = 0$, $z_t(\vartheta) = 0$ системы (1.24), (1.25). Теорема доказана.

Примечание 2.1. Заметим, что при доказательстве принципа сведения нигде существенно не использовался тот факт, что уравнения движения (1.24), (1.25) стационарны.

Данный принцип сведения справедлив и для нестационарной системы (1.24), (1.25), и доказательство в основных чертах повторяет приведенное выше, если выполняются условия.

(1) Матрица $Q(t)$ представима в виде суммы кососимметрической матрицы и матрицы со сколь угодно малыми коэффициентами.

(2) Решения уравнений (2.15) удовлетворяют оценке

$$\|u_t(\vartheta)\|_\tau \leqslant B\|u_0(\vartheta)\|_\tau \exp[-\alpha(t - t_0)]$$

где B, α — положительные постоянные. (Это условие эквивалентно условию существования непрерывного функционала $V[u(\vartheta), t]$, удовлетворяющего (2.17)—(2.19)).

(3) Оператор $Z[v, 0, 0, \vartheta, t]$ удовлетворяет оценке (2.12).

Примечание 2.2. При оформлении настоящей работы автору стало известно, что принцип сведения для систем с запаздыванием доказан независимо от него и другим способом С. Н. Шимановым.

Автор благодарит Н. Н. Красовского за ценные замечания.

Поступила 30 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат, 1952.
2. Шиманов С. Н. Об устойчивости в критическом случае одного нулевого корня для систем с последействием. ПММ, 1960, т. 24, вып. 1.
3. Шиманов С. Н. Критический случай пары мнимых корней для систем с последействием. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.
4. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.
5. Шиманов С. Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием. Дифференциальные уравнения, 1965, т. 1, вып. 1.
6. Еругин Н. П. Рецензия на книгу Малкина «Теория устойчивости движения». Вестн. Ленингр. ун-та, 1953, № 5.