Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

ОБЩАЯ ЗАДАЧА О СИНХРОНИЗАЦИИ В ПОЧТИ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЕ

Р. Ф. Нагаев

(Ленинград)

Делается попытка рассмотреть задачу о синхронизации в почти консервативной системе слабосвязанных динамических объектов с максимально общих позиций. Необходимость в таких обобщениях обусловлена стремлением разработать единый метод исследования многочисленных проявлений явления синхронизации в природе и технике [1]. С этой целью вводится достаточно общая классификация типов консервативных связей, которая, по-видимому, может быть распространена на весьма широкий класс систем взаимодействующих объектов. Подробно обсуждается физический смысл и способ введения малого параметра связи, что позволяет отчетливо представить специфику системы. Показано, что характер устойчивого синхронного режима в системе существенным образом зависит от рода связи, и выясняются условия, при которых оказывается справедливым обобщенный интегральный критерий устойчивости синхронного режима в системе [2]. В заключение рассматривается вырожденный осо ый случай, приводящий, в частности, к квазилинейной постановке задачи.

§ 1. Типы связей и основные динамические характеристики системы. Рассмотрим систему k динамических объектов со слабыми взаимными связями. Движение произвольного i-го объекта в системе будем характеризовать прежде всего $l \times 1$ вектором-столбцом собственных парциальных обобщенных координат

$$q_i = (q_{i1}, \ldots, q_{l_i})$$

Способ введения собственных координат объекта полагается независящим от характера связей и в этом смысле не вполне произвольным. Поэтому собственные координаты полностью сохраняют свой физический смысл даже при полном отсутствии связей между объектами. Вид зависимости динамических характеристик объекта, определяемых только посредством его собственных обобщенных координат и скоростей, от всех этих величин инвариантен относительно типа связей. Так, «собственная» кинетическая энергия

$$T_i = {}^1/_2\, \mathbf{q}_i^{\cdot\prime} \mathbf{A}_i(\mathbf{q}_i)\, \mathbf{q}_i^{\cdot} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{A}_i$ — симметрическая ($\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i'$) «инерционная» $l_i \times l_i$ матрица, и «собственная» потенциальная энергия объекта

$$\Pi_i = \Pi_i(\mathbf{q}_i) \tag{1.2}$$

имеют вид соответствующих характеристик объекта при отсутствии связей. Здесь и далее штрихом обозначается транспонирование соответствующей матрицы.

При появлении взаимодействия объекты в системе приобретают в общем случае некоторую дополнительную подвижность, так что для описания их движения во взаимосвязанной системе необходимо еще задать

$m \times 1$ вектор-столбец дополнительных обобщенных координат

$$x = (x_1, \ldots, x_m)$$

При этом общая кинетическая и обобщенная потенциальная энергии объектов в системе запишутся в виде

$$T^* = \sum_{i=1}^{k} T_i + \Delta T^*, \qquad \Pi^* = \sum_{i=1}^{k} \Pi_i + \Delta\Pi^* \tag{1.3}$$

Здесь

$$\Delta T^* = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{q}_i^{\prime\cdot} \mathbf{A}_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{q})\, \mathbf{x}^{\cdot} + \tfrac{1}{2} \mathbf{x}^{\prime\cdot} \mathbf{A}_m(\mathbf{x}, \mathbf{q})\, \mathbf{x}^{\cdot}, \qquad \Delta\Pi^* = \mathbf{x}' \mathbf{C}(\mathbf{q}, \nu t) + \ldots \tag{1.4}$$

— добавочные кинетическая и потенциальная энергии объектов [1]. Будем полагать, что некоторая часть внешнего $2\pi / \nu$-периодического возмущения, которое, вообще говоря, может передаваться на объекты посредством связующих элементов, такова, что она может быть включена в состав $\Delta\Pi^*$.

Далее будем связывать с совокупностью дополнительных обобщенных координат $x_1, \ldots, x_m$ представление о несущем теле или несущей системе тел с m степенями свободы. При этом будем полагать, что координаты $x_1, \ldots, x_m$ являются абсолютными в том смысле, что они полностью описывают движение несущей системы. Взаимодействие, осуществляемое при помощи несущей системы, всегда связано с появлением новых степеней свободы у взаимосвязанной системы объектов. Будем называть их связями первого рода.

Кинетическая и потенциальная энергии несущей системы имеют вид

$$T^{(1)} = {}^1/_2 \mathbf{x}^{\prime\cdot} \mathbf{M}_m(\mathbf{x})\, \mathbf{x}^{\cdot}, \qquad \Pi^{(1)} = {}^1/_2 \mathbf{x}' \mathbf{C}_m \mathbf{x} + \ldots \tag{1.5}$$

Несущая система может обладать распределенными параметрами и вследствие этого иметь бесконечное счетное число степеней свободы. Однако при этом всегда предусматривается возможность введения нормальных координат $x_1, x_2, \ldots$ для описания движения несущей системы. Иными словами, для любого m, в частности $m = \infty$, координаты $x_1, \ldots, x_m$ могут быть выбраны так, что симметрические $m \times m$ матрицы $\mathbf{M}_m|_{x=0}$ и $\mathbf{C}_m$ примут вид

$$\mathbf{M}_m|_{x=0} = \operatorname{diag}(m^{(1)}, \ldots, m^{(m)}), \qquad \mathbf{C}_m = \operatorname{diag}(c^{(1)}, \ldots, c^{(m)}) \tag{1.6}$$

Процесс решения задачи в случае наличия несущей системы с распределенными параметрами описан в работе [2] для довольно общего случая, но, вообще говоря, нуждается в строгом математическом обосновании.

Появление между объектами связей иной природы, или связей второго рода, необязательно связано с увеличением числа степеней свободы взаимосвязанной системы. Однако в общем случае для описания динамики их элементов необходимо, кроме $\mathbf{x}, \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_k$, задать еще $n \times 1$ вектор-столбец y обобщенных координат $y_1, \ldots, y_n$, которые, естественно, не нужны для описания движения несущей системы и объектов.

---

[1] В выражении для $\Delta\Pi^*$ и выражении (1.5) для $\Pi^{(1)}$ выписаны лишь первые слагаемые разложений соответствующих величин в степенные ряды по $x_1, \ldots, x_m$.

Кинетическая и обобщенная потенциальная энергии элементов связей 2-го рода будут соответственно

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \mathbf{y}^{\cdot\prime} \mathbf{N}_n (\mathbf{y}, \mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y}^{\cdot} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{q}_i^{\cdot\prime} \mathbf{N}_{in} (\mathbf{y}, \mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y}^{\cdot} + \sum_{i,\, j=1}^{k} \frac{1}{2} \mathbf{q}_i^{\cdot\prime} \mathbf{N}_{ij} (\mathbf{y}, \mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{q}_j^{\cdot} +$$

$$+ \mathbf{x}^{\cdot\prime} \mathbf{N}_{mn} (\mathbf{y}, \mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y}^{\cdot} + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{q}_i^{\cdot\prime} \mathbf{N}_{im} (\mathbf{y}, \mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{x}^{\cdot} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^{\cdot\prime} \mathbf{N}_m (\mathbf{y}, \mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{x}^{\cdot} \qquad (1.7)$$

$$\Pi^{(2)} = \Pi^{(2)} (\mathbf{y}, \mathbf{q}, \mathbf{x}, \nu t)$$

Таким образом, внешнее одночастотное возмущение может быть передано на объекты только посредством связей как первого, так и второго рода.

§ 2. Критерии слабости взаимодействия между объектами. Под слабостью взаимодействия или, что то же самое, слабостью связей будем понимать возможность эффективного введения при исследовании системы достаточно малого положительного параметра связи μ такого, что при $\mu = 0$ объекты в системе можно считать изолированными. При этом с самого начала значения динамических и кинематических характеристик движения объектов в интересующей нас области условимся считать величинами порядка 1, т. е.

$$\mathbf{q} = O(1), \qquad \mathbf{A} = O(1), \qquad \mathbf{C} = O(1)$$

что в определенном смысле предопределяет равноправное положение объектов в системе.

Воздействия, передаваемые посредством связей, малы. Следовательно, после наложения связей общие динамические характеристики системы изменяются незначительно. Общие кинетическая и потенциальная энергии системы удовлетворяют соотношениям

$$T = T^* + T^{(1)} + T^{(2)} = \sum_{i=1}^{k} T_i + O(\mu), \quad \Pi = \Pi^* + \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} = \sum_{i=1}^{k} \Pi_i + O(\mu) \qquad (2.1)$$

Принимая во внимание существенную положительность слагаемых в соотношениях (2.1), отметим условия, при которых они могут быть удовлетворены.

1) Поскольку компоненты $l_i \times m$ матрицы A_{im} характеризуют инерционные свойства i-го объекта в целом и, следовательно, имеют порядок 1, оценка

$$\Delta T^* = O(\mu)$$

окажется справедливой, лишь если изменение координат несущей системы в процессе движения мало, т. е.

$$\mathbf{x} = \mu \boldsymbol{\xi} \qquad (\boldsymbol{\xi} = O(1)) \qquad (2.2)$$

2) Для малости динамических характеристик несущей системы при этом достаточно, чтобы

$$\mathbf{M}_m = \frac{\mathbf{M}_m{}^\circ}{\mu} + O(1), \qquad \mathbf{C}_m = \frac{\mathbf{C}_m{}^\circ}{\mu} + O(1) \qquad (2.3)$$

причем компоненты $m \times m$ квадратных матриц $\mathbf{M}_m{}^\circ$ и $\mathbf{C}_m{}^\circ$ постоянны

3) Инерционные и силовые характеристики элементов связей второго рода малы, так что

$$
\begin{gathered}
\mathbf{N}(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \mathbf{x}) = \mu \mathbf{N}^\circ(\mathbf{y}, \mathbf{q}) + O(\mu^2) \\
T^{(2)} = \mu \left(\tfrac{1}{2} \mathbf{y}'^{\cdot} \mathbf{N}_n{}^\circ \mathbf{y}^{\cdot} + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{q}_i'^{\cdot} \mathbf{N}_{im}^\circ \mathbf{y}^{\cdot} + \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} \mathbf{q}_i'^{\cdot} \mathbf{N}_{ij}^\circ \mathbf{q}_j^{\cdot} \right) + O(\mu^2) \qquad (2.4) \\
\Pi^{(2)} = \mu \pi^{(2)}(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \nu t) + O(\mu^2)
\end{gathered}
$$

Таким образом, если слабость связей первого рода предопределяется малостью колебаний несущего тела, то слабость связей второго рода обусловлена малостью соответствующих им обобщенных импульсов. Как следствие вышесказанного, фиксируем факт линейности уравнений движения системы по колебательным координатам несущего тела (с точностью до величин порядка μ^2).

Наконец, введем предположение о консервативной природе взаимодействия между объектами в системе (с той же степенью точности). Обобщенные непотенциальные силы $\mathbf{Q}_i = (Q_{i1}, \ldots, Q_{il_i})$ по координатам объектов носят, таким образом, парциальный характер и малы. Целесообразность последнего допущения была выяснена в работе [3].

§ 3. Уравнения движения системы в форме Раусса и порождающая система задачи о синхронизации. Введем в рассмотрение векторы-столбцы обобщенных импульсов объектов

$$
\mathbf{p}_i = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_i^{\cdot}} = \mathbf{A}_i \mathbf{q}_i^{\cdot} + \mu \ldots \qquad (3.1)
$$

Обращая системы (3.1), будем иметь

$$
\mathbf{q}_i^{\cdot} = \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{p}_i + \mu \mathbf{q}_i^{\cdot(1)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}^{\cdot}, \mathbf{y}, \mathbf{y}^{\cdot}) + \mu^2 \ldots \qquad (3.2)
$$

Последующее исследование, в котором большое значение будет иметь выяснение физического смысла тех или иных величин, входящих в уравнения движения системы, удобнее всего провести, составляя известные уравнения Раусса, обычно используемые при наличии циклических координат. С этой целью введем функцию Раусса

$$
\begin{aligned}
R = T - \sum_{i=1}^{k} \mathbf{p}_i' \mathbf{q}_i^{\cdot} = -\tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{p}_i' \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{p}_i + \mu \Big(\tfrac{1}{2} \boldsymbol{\xi}'^{\cdot} \mathbf{M}_m{}^\circ \boldsymbol{\xi}^{\cdot} + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{p}_i' \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{A}_{im}^\circ \boldsymbol{\xi}^{\cdot} + \\
+ \tfrac{1}{2} \mathbf{y}'^{\cdot} \mathbf{N}_n{}^\circ \mathbf{y}^{\cdot} + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{p}_i' \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{N}_{in}^\circ \mathbf{y}^{\cdot} + \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} \mathbf{p}_i' \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{N}_{ij}^\circ \mathbf{A}_j^{-1} \mathbf{p}_j \Big) + \mu^2 \ldots \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

и кинетический потенциал Раусса

$$
L_R = R - \Pi = -\sum_{i=1}^{k} H_i + \mu L_0 + \mu^2 \ldots, \qquad L_0 = \Delta L^* + L^{(1)} + L^{(2)} \qquad (3.4)
$$

В соотношениях (3.4) с точностью до величин порядка μ^2

$$
H_i = \tfrac{1}{2} \mathbf{p}_i' \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{p}_i + \Pi_i \qquad (3.5)
$$

есть «собственная» энергия (функция Гамильтона) i-го парциального объекта,

$$
\mu \Delta L^* = \mu \Big(\sum_{i=1}^{k} \mathbf{p}_i' \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{A}_{im}{}^\circ \boldsymbol{\xi}^{\cdot} - \mathbf{C}' \boldsymbol{\xi} \Big) \qquad (3.6)
$$

— добавочный кинетический потенциал объектов, обусловленный малыми колебаниями несущей системы,

$$\mu L^{(1)} = \mu\,(^1/_2\,\xi^{\cdot\prime}\mathbf{M}_m{}^\circ\xi^\cdot - {}^1/_2\xi'\mathbf{C}_m{}^\circ\xi) \tag{3.7}$$

— кинетический потенциал несущей системы,

$$\mu L^{(2)} = \mu\left(\frac{1}{2}\,\mathbf{y}^{\cdot\prime}\mathbf{N}_n{}^\circ\mathbf{y}^\cdot + \sum_{i=1}^{k}\mathbf{p}_i'\mathbf{A}_i^{-1}\mathbf{N}_{in}{}^\circ\mathbf{y}^\cdot + \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{k}\mathbf{p}_i'\mathbf{A}_i^{-1}\mathbf{N}_{ij}{}^\circ\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{p}_j - \pi^{(2)}\right) \tag{3.8}$$

— кинетический потенциал элементов связей второго рода.

Уравнения движения взаимосвязанной системы объектов в форме Раусса можно получить, например, при помощи обычного вариационного способа на основании центрального уравнения Лагранжа [4] и имеют вид

$$\begin{gathered}
\mathbf{q}_i^\cdot - \frac{\partial H_i}{\partial \mathbf{p}_i} = -\mu\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i}(\Delta L^* + L^{(2)}) + \mu^2\ldots \\
\mathbf{p}_i^\cdot + \frac{\partial H_i}{\partial \mathbf{q}_i} = \mu\left[\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i}(\Delta L^* + L^{(2)})\right] + \mu^2\ldots \qquad (i = 1, \ldots, k) \\
\mathbf{M}_m{}^\circ\xi^{\cdot\cdot} + \mathbf{C}_m{}^\circ\xi + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \xi^\cdot} - \frac{\partial}{\partial \xi}\right)\Delta L^* + \mu\ldots = 0 \\
\mu\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^\cdot} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\right)L^{(2)} + \mu^2\ldots = 0
\end{gathered} \tag{3.9}$$

Порождающая система задачи [1] по координатам объектов естественным образом распадается на k автономных консервативных подсистем

$$\mathbf{q}_i^{\circ\cdot} = \frac{\partial H_i}{\partial \mathbf{p}_i^\circ}, \qquad \mathbf{p}_i^{\circ\cdot} = -\frac{\partial H_i}{\partial \mathbf{q}_i^\circ} \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{3.10}$$

каждая из которых в некоторой области G_i парциального фазового пространства ($\mathbf{q}_i$, $\mathbf{p}_i$) допускает лишь один однозначный аналитический первый интеграл энергии и имеет орбитально устойчивое частное решение

$$\mathbf{q}_i^\circ = \mathbf{q}_i^\circ(\varphi_i, c_i), \qquad \mathbf{p}_i^\circ = \mathbf{p}_i^\circ(\varphi_i, c_i) \tag{3.11}$$

причем 2π-периодическое в обобщенном смысле [5] по собственной быстровращающейся фазе

$$\varphi_i = \omega_i t + \alpha_i \tag{3.12}$$

Решение (3.11) непрерывным образом зависит от произвольного фазового сдвига α_i и параметра c_i, который на траекториях рассматриваемого решения взаимно однозначно и непрерывно связан с постоянной энергии

$$H_i(q_i^\circ, p_i^\circ) = h_i(c_i) \tag{3.13}$$

Частота (угловая скорость) решения может меняться вдоль траектории решения (3.11) внутри G_i в пределах диапазона

$$\omega_i \in [\omega_i^{(1)}, \omega_i^{(2)}] \tag{3.14}$$

Зависимость частоты решения (3.11) от постоянной энергии, заданную параметрически

$$h_i = h_i(c_i), \qquad \omega_i = \omega_i(c_i)$$

[1] При выборе порождающей системы, как и в работе [3], надо иметь в виду, что некоторые слагаемые порядка μ могут быть извлечены из левых частей уравнений объектов (3.9) и отнесены к $L^{(2)}$.

будем называть скелетной кривой i-го объекта применительно к рассматриваемому решению.

Возможность вхождения системы в синхронизм в случае достаточно слабых связей (μ — достаточно мало) предопределяется наличием синхронного порождающего приближения [3], т. е. наличием равенств

$$\omega_1 = \ldots = \omega_k = \nu \tag{3.15}$$

Иными словами, пересечение частотных диапазонов порождающих объектов (полоса пропускания системы) должно быть не пусто и включать в себя частоту внешнего возмущения

$$[\omega^{(1)}, \omega^{(2)}] = \bigcap_{i=1}^{k} [\omega_i^{(1)}, \omega_i^{(2)}] \in \nu \tag{3.16}$$

Уравнения движения элементов связей в порождающем приближении допускают устойчивое $2\pi / \nu$-периодическое решение

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\tau, c_1, \ldots, c_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) \qquad (\tau = \nu t,\ \mathbf{u} = (\xi_1^\circ, \ldots, \xi_m^\circ, y_1^\circ, \ldots, y_n^\circ)) \tag{3.17}$$

Величины $c_1, \ldots, c_k$ в выражении (3.17) однозначно определяются из соотношений (3.15). Наличие ограниченного решения (3.17) подразумевает, в частности, что частоты свободных малых колебаний несущей системы, определяемые из уравнения

$$|\mathbf{C}_m^\circ - \lambda_s^2 \mathbf{M}_m^\circ| = 0 \tag{3.18}$$

удовлетворяют условию

$$\lambda_s \neq r\nu \qquad (s = 1, \ldots, m,\ r = 1, 2, \ldots)$$

§ 4. **Общий случай существенно нелинейных объектов.** Система уравнений (3.9) при помощи неособенной замены только переменных связи ξ, $\xi^\cdot$, y и $y^\cdot$ может быть приведена к системе

$$2\ (\sum_{i=1}^{N} l_i + m + n)$$

равнений первого порядка, разрешенных относительно производных. Так же при этом уравнения движения объектов с точностью до величин порядка μ включительно по существу не изменятся, а уравнения движения по координатам связи, в силу исходных допущений, не содержат никаких особенностей, непосредственно к системе (3.9) оказываются применимыми известные теоремы о существовании и устойчивости периодических решений при достаточно малом значении параметра [2,5].

Ниже рассмотрен наиболее общий случай, когда все объекты в порождающем приближении существенно неизохронны в том смысле, что везде внутри G_i зависимость $\omega_i = \omega_i(c_i)$ существенна, и

$$\omega_i^{(2)} - \omega_i^{(1)} = O(1), \qquad \text{или} \qquad d\omega_i / dc_i = O(1) \tag{4.1}$$

частотный диапазон объекта немал.

В этом случае параметры $c_1, \ldots, c_k$, характеризующие синхронное порождающее приближение, определяются однозначно из соотношений

(3.15), и его неизолированность связана исключительно с наличием произвольных фазовых сдвигов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Условие существования синхронного режима в системе при этом совпадает с условием наличия вещественных решений системы уравнений

$$P_i = F_i + R_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k) \qquad \left(F_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_i' q_i^{\cdot} d\tau\right) \tag{4.2}$$

есть средняя за период мощность непотенциальных сил i-го объекта в порождающем приближении, а функции фазовых сдвигов R после несложных преобразований, включающих интегрирование по частям, приводятся к виду

$$R_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\mathbf{p}_i'^{\cdot}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} + \mathbf{q}_i'^{\cdot}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i}\right)\left(\Delta L^* + L^{(2)}\right)d\tau = \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, \ldots, k) \tag{4.3}$$

Величину

$$\Lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \frac{\nu}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_0\, d\tau \tag{4.4}$$

будем называть интегралом действия связи в порождающем приближении.

Заметим, что средние за период значения собственных динамических характеристик парциальных объектов в порождающем приближении не зависят от фазовых сдвигов; поэтому

$$\frac{2\pi}{\nu}R_i = \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\int_0^{2\pi} L_R\, d\tau = \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\int_0^{2\pi} L\, d\tau \tag{4.5}$$

причем L есть общий кинетический потенциал системы.

Осуществим преобразование вириала над уравнением малых колебаний несущей системы в порождающем приближении. С этой целью помножим его слева на вектор-строку $\xi^{\circ\prime}$; тогда нетрудно прийти к следующему скалярному тождеству

$$\frac{d}{dt}(\xi^{\circ\prime}\mathbf{M}_m{}^{\circ}\xi^{\circ}) - 2L^{(1)} + \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{k}\mathbf{p}_i{}^{\circ\prime}\mathbf{A}_i^{-1}\mathbf{A}_{im}\xi^{\circ} - \Delta L^* = 0$$

Осредняя последнее соотношение за период, будем иметь

$$\frac{\nu}{2\pi}\int_0^{2\pi}(2L^{(1)} + \Delta L^*)\,d\tau = 0 \tag{4.6}$$

Итак, для любых значений фазовых сдвигов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ средний за период добавочный кинетический потенциал объектов равен удвоенному интегралу действия несущей системы, взятому с обратным знаком. Имея в виду (4.6), запишем выражение для интеграла действия связи (4.4) в виде

$$\Lambda = \frac{\nu}{2\pi}\int_0^{2\pi}(L^{(2)} - L^{(1)})\,d\tau \tag{4.7}$$

Устойчивость исследуемого синхронного режима в системе по первому приближению может быть изучена примерно так, как это сделано в работе [2]. При этом окажется, что для устойчивости в малом синхронных движений объектов необходимо (но недостаточно), чтобы корни уравнения

$$\left| \frac{1}{k_i} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} - \delta_{ij} \varkappa \right| = 0 \tag{4.8}$$

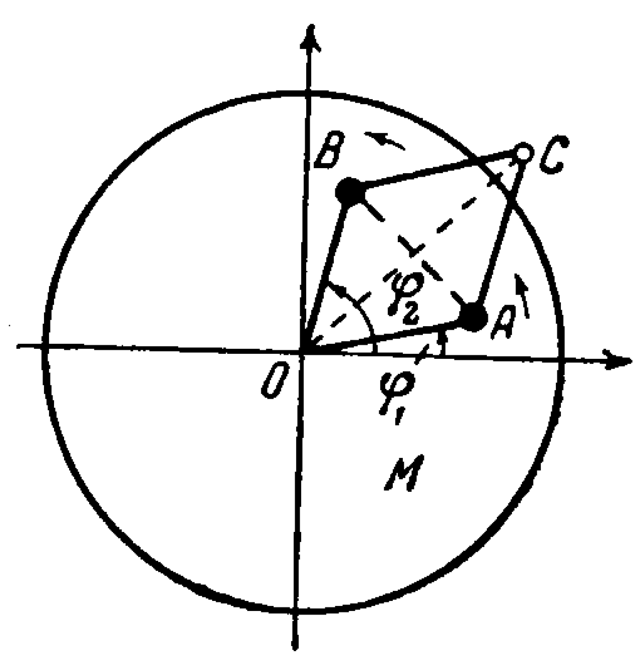
были вещественными и отрицательными. В уравнении (4.10) величину

$$k_i = \frac{(dh_i / dc_i)}{(d\omega_i / dc_i)} \bigg|_{\omega_i = \nu} \tag{4.9}$$

характеризующую скорость изменения энергии i-го парциального объекта с изменением частоты его движения в зоне стабилизации синхронной частоты в системе, будем называть коэффициентом крутизны скелетной кривой объекта. Достаточные условия устойчивости синхронного режима в системе, которые для случая существенно различных объектов носят, по-видимому, весьма нетривиальный характер, были найдены в работе [3] для частного случая объектов с одной степенью свободы в системе со связями второго рода.

Как и в предшествующих исследованиях [1-3], условие существования и устойчивости синхронного режима в системе одинаковых или, точнее, почти одинаковых чисто консервативных объектов ($k_1 = \ldots = k_k = k$) сводится к требованию экстремума интеграла действия связи Λ относительно порождающих фазовых сдвигов. При этом характер экстремума (максимум или минимум) определяется, во-первых, родом связи и, во-вторых, знаком коэффициента крутизны объектов.

Характер фазировки в устойчивых синхронных движениях объектов, таким образом, существенно зависит от рода связи (см. (4.7)). При определенных условиях связи разных родов могут полностью или частично «гасить» действие друг друга, в результате чего система будет выпадать из синхронизма вследствие наличия непотенциальных неодинаковостей случайного характера.



Рассмотрим простейший пример, иллюстрирующий вышеописанные свойства.

Пусть дана система, состоящая из двух одинаковых почти консервативных механических вибраторов, вращающихся в одном направлении вокруг одной и той же оси. Связь между вибраторами первого рода осуществляется посредством массивного несущего тела массы M, а связь второго рода — посредством массы m_0, помещенной в вершине C шарнирного стержневого ромба $OACB$.

Связи между вибраторами действительно малы, если достаточно малы отношения

$$\mu_1 = m / M, \qquad \mu_2 = m_0 / m$$

где m — одинаковые массы вибраторов. При этом синхронное движение вибраторов в порождающем приближении носит характер равномерного вращения с угловой скоростью ν

$$\varphi_1{}^\circ = \nu t + \alpha_1, \qquad \varphi_2{}^\circ = \nu t + \alpha_2$$

Кинетические энергии соответственно элементов связи первого и второго рода с точностью до величин порядка μ^2 не зависят от времени и равны

$$T^{(1)} = \mu_1 2m\varepsilon^2\nu^2 \left[1 + \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\right], \qquad T^{(2)} = \mu_2 m\varepsilon^2\nu^2 \left[1 + \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\right]$$

Интеграл действия связи в порождающем приближении (4.7) запишется в виде

$$\mu\Lambda = m\varepsilon^2\nu^3 (\mu_2 - 2\mu_1) \left[1 + \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\right]$$

Несложный анализ приводит к следующим заключениям.

1. При отсутствии связей второго рода существует устойчивый противофазный режим синхронного вращения вибраторов, при котором кинетическая энергия несущего тела минимальна.

2. При отсутствии связей первого рода, наоборот, устойчив синфазный режим, причем кинетическая энергия массы m_0 максимальна.

3. При наличии связей обоих родов система выпадает из синхронизма, если имеет место приближенное соотношение $2\mu_1 \approx \mu_2$.

§ 5. Изохронизм в порождающем приближении. Ниже кратко рассмотрен особый частный случай, когда порождающая система (3.10) может быть выбрана так, что зависимость частоты от энергии пропадает, частотные диапазоны объектов обращаются в точку, а условия существования синхронного порождающего приближения (3.15) выполняются тождественно. Этот случай, приводящий, в частности, к квазилинейной постановке задачи, наиболее прост для исследования и, вероятно, поэтому хорошо изучен ранее на ряде конкретных примеров.

Неизолированность синхронного порождающего приближения здесь связана не только с неопределенностью фазовых сдвигов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, но и с произволом в выборе значений энергетических параметров $c_1, \ldots, c_k$.

Уравнения для разыскания параметров синхронного порождающего решения, число которых соответственно увеличится вдвое, запишутся в виде

$$F_i + \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha_i} = 0, \qquad \Phi_i + \frac{\partial \Lambda}{\partial c_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{5.1}$$

где величины $F_i\,(c_i)$ и $\Lambda\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_k; c_1, \ldots, c_k)$ имеют прежний физический смысл и вычисляются по формулам (4.4) и (4.9), а

$$\Phi_i\,(c_i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_i' \frac{\partial q_i{}^0}{\partial c_i}\, d\tau \tag{5.2}$$

Для асимптотической устойчивости рассматриваемого синхронного режима необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \Lambda}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} - \delta_{ij}\varkappa & \dfrac{\partial^2 \Lambda}{\partial \alpha_i \partial c_j} + \dfrac{dF_i}{dc_i}\delta_{ij} \\ \dfrac{\partial^2 \Lambda}{\partial \alpha_i \partial c_i} & \dfrac{\partial^2 \Lambda}{\partial c_i \partial c_j} + \left(\dfrac{d\Phi_i}{dc_i} - \varkappa\right)\delta_{ij} \end{vmatrix} = 0 \tag{5.3}$$

удовлетворяли условию $\operatorname{Re} \varkappa < 0$.

В случае чисто консервативной системы (в предположении, что непотенциальные силы в системе имеют высший порядок малости) снова приходим к формулировке интегрального критерия устойчивости. Иными словами, для существования и асимптотической устойчивости синхронного режима в такой системе необходимо и достаточно наличие строгого минимума потенциальной функции Λ относительно переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, c_1, \ldots, c_k$. При этом в силу симметрии определителя (5.3) все его корни оказываются вещественными.

Поступила 2. IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Блехман И. И. Проблема синхронизации динамических систем. ПММ, 1964, т. 27, вып. 2.
2. Нагаев Р. Ф. О синхронизации динамических систем, близких к системам Ляпунова. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
3. Нагаев Р. Ф. Синхронизация в системе существенно нелинейных объектов с одной степенью свободы. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
4. Лурье. А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, М. 1961.
5. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, М., 1956.