О СПЕКТРЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

Р. В. Бирих

(Пермь)

Устойчивость плоскопараллельного течения Куэтта исследовалась в очень большом числе работ. Цель большинства из них состояла в доказательстве устойчивости этого течения. Между тем, весь спектр нормальных возмущений в широком интервале значений числа Рейнольдса исследован явно недостаточно, хотя знание всего спектра необходимо для построения нелинейной теории устойчивости течения Куэтта, а также для окончательного суждения об устойчивости его по отношению к малым возмущениям.

Несколько нижних декрементов при больших значениях числа Рейнольдса R и фиксированном значении волнового числа α были получены ранее асимптотическим методом [1]. Декременты при малых R вычислялись, например, в [2,3]. Спектр декрементов в широком интервале изменения числа Рейнольдса может быть получен, по-видимому, только в результате численных расчетов. Недавно в работе [4], а затем в [5] были приведены результаты таких расчетов нижнего декремента затухания возмущений. Позже в [6] были опубликованы некоторые дополнительные данные о поведении четырех нижних декрементов.

В данной работе приводятся результаты расчета спектра декрементов нормальных возмущений плоскопараллельного течения Куэтта. Расчет произведен методом Галеркина с системой базисных функций, отличной от использованной в [4,6]. Приближение, содержавшее 18 базисных функций [8] позволило с достаточной точностью проследить поведение девяти нижних декрементов и фазовых скоростей нормальных возмущений в области чисел αR от 0 до 1000.

1. Рассмотрим течение Куэтта между плоскостями $x = \pm h$ с линейным профилем скорости $v_z = U_0 x$ (z — координата вдоль течения). В качестве единиц измерения скорости, расстояния и времени возьмем соответственно U_0, h и h^2 / ν (ν — кинематическая вязкость). Функция тока малых нормальных возмущений может быть представлена в виде $\varphi(x) \exp(-\lambda t + i\alpha z)$, где α — вещественное волновое число, λ — комплексный декремент возмущения. Амплитуда возмущений $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению Орра — Зоммерфельда

$$\varphi^{\mathrm{IV}} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi = i\alpha R\left(x - \frac{c}{R}\right)(\varphi'' - \alpha^2\varphi)\left(R = \frac{U_0 h}{\nu}, \ \lambda = i\alpha c, \ c = c_r + ic_i\right) \quad (1)$$

и граничным условиям

$$\varphi = \varphi' = 0 \quad \text{при } x = \pm 1 \quad (2)$$

Краевая задача (1), (2) может быть приближенно решена методом Галеркина. Для этого решение $\varphi(x)$ представим в виде

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n \varphi_n^{(0)}(x) \quad (3)$$

В качестве системы базисных функций $\varphi^{(0)}_n(x)$ удобно взять полную систему амплитуд нормальных возмущений в покоящейся жидкости, т. е. собственные функции краевой задачи (1), (2) при $R = 0$ (см. [3-8]). (Эта система функций была предложена Г. И. Петровым.) Эти функции имеют вид

$$\varphi_n^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{I_n}}\left[\frac{\operatorname{ch}\alpha x}{\operatorname{ch}\alpha} - \frac{\cos\sqrt{\lambda_n^{(0)} - \alpha^2}\,x}{\cos\sqrt{\lambda_n^{(0)} - \alpha^2}}\right] \qquad (n = 0, 2, 4, \ldots)$$

$$\varphi_n^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{I_n}}\left[\frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\alpha} - \frac{\sin\sqrt{\lambda_n^{(0)} - \alpha^2}\,x}{\sin\sqrt{\lambda_n^{(0)} - \alpha^2}}\right] \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots)$$

Нормировочные интегралы I_n и трансцендентные соотношения для определения декрементов затухания возмущений в покоящейся жидкости $\lambda_n^{(0)}$ приведены в [3]. Условия ортогональности Галеркина приводят к системе однородных алгебраических уравнений

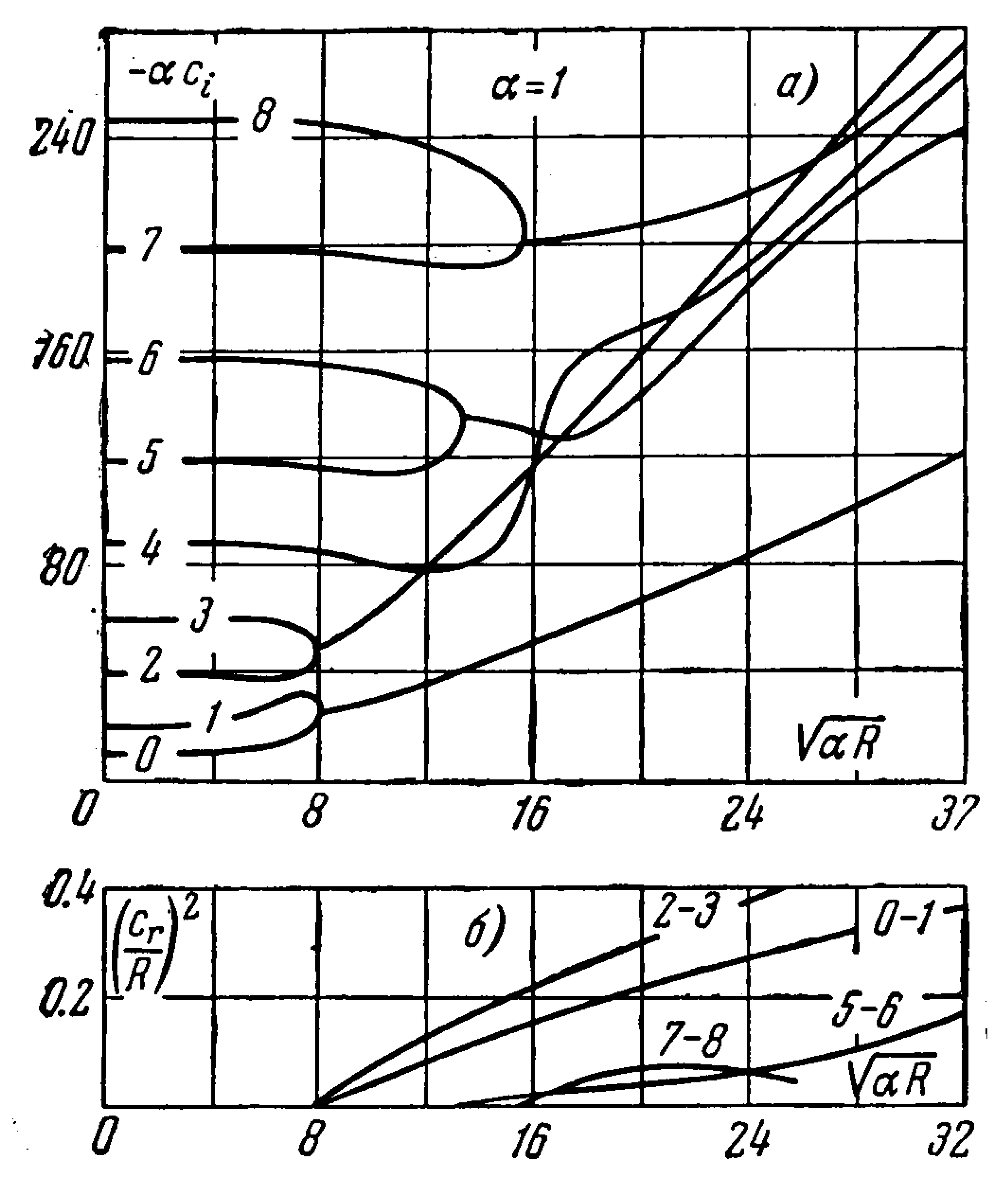
$$\sum_{n=0}^{N} c_n \{(\lambda - \lambda_n^{(0)})\,\delta_{mn} + i\alpha R H_{mn}\} = 0 \qquad (m = 0, 1, \ldots, N) \tag{4}$$

Матричные элементы

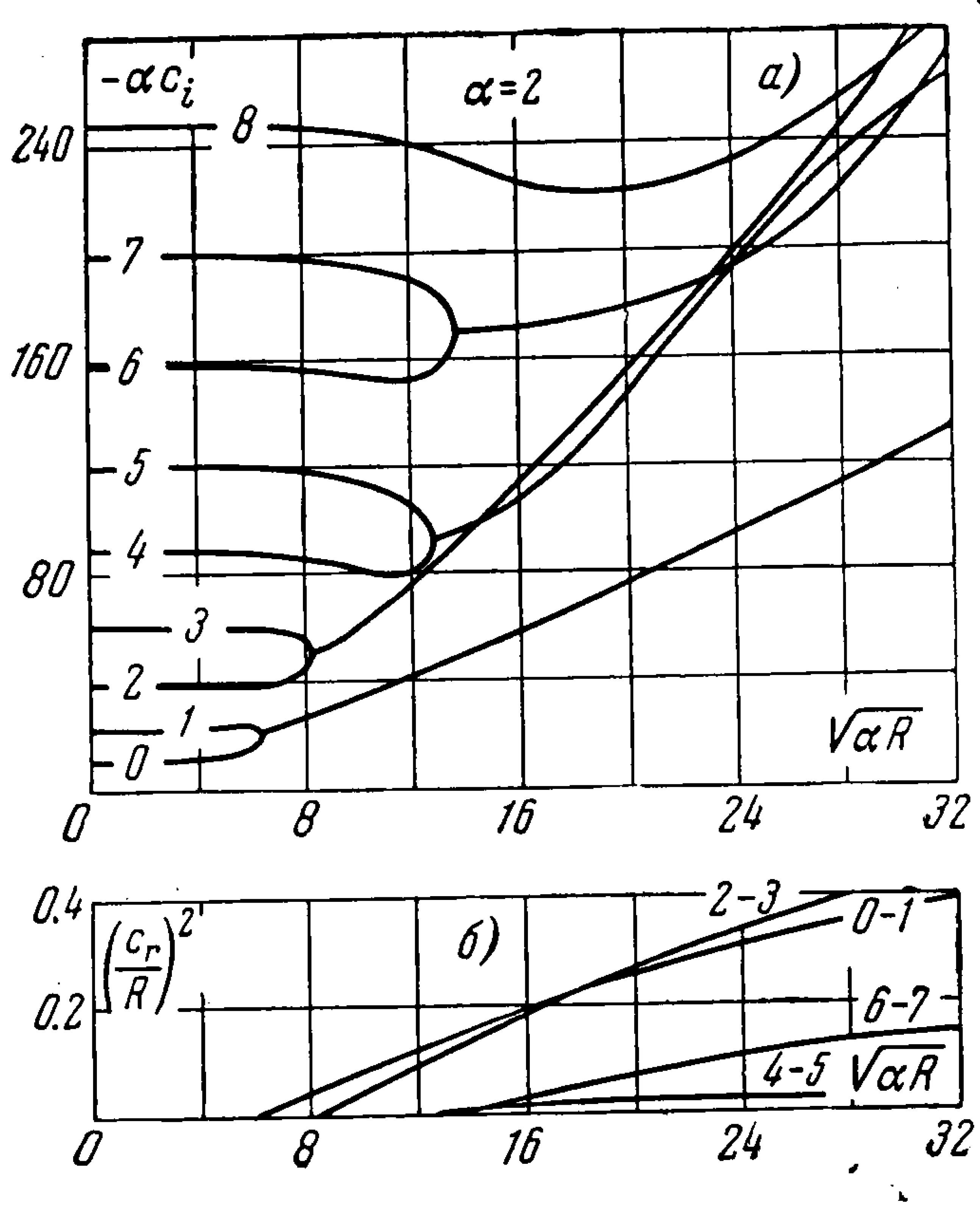
$$H_{mn} = \int_{-1}^{1} \varphi_m^{(0)}\, x\, (\varphi_n^{(0)''} - \alpha^2 \varphi_n^{(0)})\, dx$$

отличны от нуля только для индексов разной четности. Это позволяет матрицу системы (4) при помощи унитарного преобразования привести к вещественному виду (формулы для H_{mn} см. в [3]).

При фиксированных значениях α и R требуется найти собственные значения λ системы (4). Чем больше число Рейнольдса и чем больше уровней спектра необходимо найти, тем больше требуется брать функций в разложении (3). В нашем расчете было взято 18 функций, и задача свелась к нахождению собственных значений веществен-



Фиг. 1



Фиг. 2

ной матрицы восемнадцатого порядка. Такое приближение позволило определить с хорошей точностью девять нижних декрементов в области чисел αR от 0 до 1000. В этой области значения декрементов, полученные при $N = 16$ и $N = 17$, практически не отличаются. Собственные значения матрицы находились ортогонально-степенным методом [7]. Расчет спектра декрементов был проведен на ЭВЦМ «Арагац» в ВЦ Пермского университета.

2. Для обсуждения особенностей спектра декрементов рассмотрим, например, спектры возмущений с волновыми числами $\alpha = 1, 2$. Эти спектры представлены соответственно на фиг. 1 и 2. На фиг. 1, *а*, и 2, *а*, изображены вещественные части λ, т. е. декременты затухания $-\alpha c_i$. На фиг. 1, *б*, и 2, *б*, изображен квадрат фазовой скорости возмущений, измеренной в единицах скорости основного течения, т. е. $(c_r/R)^2$, где $c_r = (1/\alpha)\,\mathrm{Im}\,\lambda$.

Из фиг. 1, относящейся к случаю $\alpha = 1$, видно, что при $0 < R < 64$ все декременты λ вещественны и положительны, т. е. возмущения монотонно затухают ($\alpha c_i < 0$), а фазовая скорость возмущений $c_r = 0$. При $R = 64$ происходит слияние второго и третьего монотонных уровней и появляются возмущения с комплексно-сопряженными декрементами. Эти возмущения имеют одинаковые декременты затухания $-\alpha c_i$ и отличающиеся знаком фазовые скорости c_r, т. е. возмущения бегут в потоке в противоположные стороны. При более высоких значениях числа Рейнольдса имеются и другие особые точки, в которых происходит слияние вещественных уровней с образованием комплексно-сопряженных пар.

Сравнение фиг. 1 и 2 показывает сильную зависимость структуры спектра от волнового числа α. В случае $\alpha = 1$, например, четвертый уровень остается вещественным во всем исследованном интервале чисел αR. Быстрые изменения его в области чисел Рейнольдса от 100 до 400 обязаны, по-видимому, сильному взаимодействию с несколькими соседними уровнями. При $\alpha = 2$ происходит слияние четвертого и пятого уровней; вещественным же оказывается восьмой уровень. При других значениях волнового числа вид спектра может отличаться от изображенного на фиг. 1 и 2, однако общие правила пересечения декрементов возмущений, сформулированые в [3], всегда выполняются.

Сопоставление результатов расчета со значениями декрементов затухания для нижних уровней, содержащимися в [4,6], обнаруживает их хорошее соответствие. Полученные в настоящей работе новые данные о спектре возмущений течения Куэтта подтверждают вывод об устойчивости этого течения.

Пользуюсь случаем поблагодарить Е. М. Жуховицкого за руководство и помощь в работе.

Поступила 18 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Grohne D. Über das Spektrum bei Eigenschwingungen ebener Laminarströmungen Z. angew. Math. und Mech., 1954, B. 34, S. 344.
2. Southwell R. V. and Chitty L. On the problem of hydrodynamic stability. I. Uniform shearing motion in a viscous fluid. Philos. Trans. A, 1930, vol. 229, p. 205.
3. Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О спектре возмущений плоскопараллельных течений при малых числах Рейнольдса. ПММ, 1965, т. 29. вып. 1.
4. Gallagher A. P., Mercer A. McD. On the behaviour of small disturbances in plane Couette flow. J. Fluid Mech., 1962, vol. 13, p. 91.
5. Deardorff J. W. On the stability of viscous plane Couette flow. J. Fluid Mech., 1963, vol. 15, p. 623.
6. Gallagher A. P., Mercer A. McD. On the behaviour of small disturbances in plane Couette flow. Part. 2. The higher eigenvalues. J. Fluid Mech., 1964, vol. 18, p. 350.
7. Воеводин В. В. Некоторые методы решения полной проблемы собственных значений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 1.
8. Петров Г. И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости. ПММ, 1940, т. 4, вып. 3.