О ТЕЧЕНИЯХ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА СО ЗВУКОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ, СОВПАДАЮЩЕЙ С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ

Э. Г. Шифрин (Москва)

Рассмотрим течение идеального газа со звуковой поверхностью, совпадающей с характеристической (если оно существует). Для краткости будем его называть А-течением. В работе [1] было найдено общее условие, присущее А-течениям: звуковая поверхность является минимальной. В предлагаемой заметке для потенциальных А-течений излагается дополнительное необходимое условие, которое, в частности, не выполняется в осесимметричном случае [1].

Теорема работы [1] выводится из уравнений неразрывности, Бернулли, состояния $p = p(\rho, S)$ при условии изэнтропичности течения. Если $\mathbf{n}_1$ — единичный вектор скорости, то

$$\operatorname{div}(\rho v \mathbf{n}_1) = \frac{\partial \rho v}{\partial s_1} + \rho v \operatorname{div} \mathbf{n}_1 = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial s_1} = \mathbf{n}_1 \cdot \nabla \tag{1}$$

Так как $\partial(\rho v) / \partial s_1 = 0$ при $v = a$, то из (1) следует, что $\operatorname{div} \mathbf{n}_1 = 0$ при $v = a$ — условие того, что поверхность, ортогональная $\mathbf{n}_1$, является минимальной.

Рассмотрим теперь уравнение движения $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \rho^{-1} \nabla p = 0$, представленное в виде системы [2]

$$v \frac{\partial v}{\partial s_1} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s_1} = 0, \qquad -v^2 \varkappa + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s_2} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial s_3} = 0 \qquad \left(\frac{\partial}{\partial s_i} = \mathbf{n}_i \cdot \nabla\right) \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ — единичные векторы главной нормали и бинормали к линии тока, $\varkappa \geqslant 0$ — кривизна линии тока.

Из второго уравнения (2) вытекает, что если существует потенциальное А-течение, то линии тока в окрестности звуковой поверхности с точностью до малых третьего порядка аппроксимируются прямыми.

Определим класс пространственных течений, для которых полученное необходимое условие может иметь место.

Проведем в потенциальном А-течении косоугольную систему координат, так чтобы два семейства u_2, u_3 были поверхностями тока, а третье u_1 — было ортогонально линиям тока. (Поверхности u_i предполагаются достаточно гладкими.)

Рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемую линию тока $\mathbf{r}(u_1)$, пересекающую звуковую поверхность. Построим четырехгранную элементарную трубку с постоянной площадью поперечного сечения ε так, чтобы две грани этой трубки были образованы поверхностями u_2 и u_3, пересекающимися по кривой $\mathbf{r}(u_1)$, а третья — поверхностью $u_3 + du_3$. Обозначим через

$$\frac{1}{H_3} = \frac{du_3}{|\nabla u_3|}$$

расстояние по нормали между поверхностями u_3 и $u_3 + du_3$ вдоль кривой $\mathbf{r}(u_1)$; пусть $\mathbf{t}$ — единичный вектор, определенный на кривой $\mathbf{r}(u_1)$, получаемый поворотом вектора $\mathbf{n}_1$ на угол $^1/_2\pi$ в заданном направлении в касательной к u_3 плоскости.

Уравнение кривой $\mathbf{R}(u_1)$, лежащей на поверхности u_3 и являющейся ребром построенной трубки постоянного поперечного сечения с точностью до малых порядка ε^2 может быть записано в виде

$$\mathbf{R}(u_1) = \mathbf{r}(u_1) + \varepsilon H_3(u_1)\, \mathbf{t}(u_1)$$

[1] На то обстоятельство, что А-течение не может иметь места в осесимметричном случае, автору указал Ю. Д. Шмыглевский (при отыскании решения задачи Коши) в окрестности звуковой линии в виде степенного ряда коэффициенты оказались мнимыми).

Площадь элементарной трубки тока имеет в звуковой точке минимум. Поэтому линия тока $\mathbf{r}(u_1)$ и линия тока, проходящая через ту же точку на звуковой поверхности, что и кривая $\mathbf{R}(u_1)$, лежат по разные стороны от $\mathbf{R}(u_1)$; кривизна всякой линии тока в звуковой точке равна нулю, следовательно, необходимо, чтобы проекция кривой $\mathbf{R}(u_1)$ на плоскость, касательную к поверхности u_3, в звуковой точке не была обращена выпуклостью к линии тока $\mathbf{r}(u_1)$ при достаточно малом ε.

Если обозначить через $\mathbf{N}_1$ единичный вектор кривой $\mathbf{R}(u_1)$, то это условие можно записать так:

$$\frac{\partial \mathbf{N}_1}{\partial u_1}\cdot \mathbf{t} \leqslant 0 \qquad \text{при } v = a \tag{3}$$

Обозначая производную по u_1 штрихом, получим

$$\mathbf{N}_1 = \frac{\mathbf{R}'}{|\mathbf{R}'|} = \frac{|\mathbf{r}'|\,\mathbf{n}_1 + \varepsilon H_3'\mathbf{t} + \varepsilon H_3\mathbf{t}'}{(|\mathbf{r}'|^2 + \varepsilon^2 H_3'^2 + \varepsilon^2 H_3^2\mathbf{t}'\cdot\mathbf{t}' + 2\varepsilon\,|\mathbf{r}'|\,H_3\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{t})^{1/2}}$$

$$\mathbf{N}_1' = \frac{1}{|\mathbf{R}'|}\{|\mathbf{r}'|'\,\mathbf{n}_1 - |\mathbf{r}'|^2\varkappa\mathbf{n}_2 + H_3''\varepsilon\mathbf{t} + H_3\varepsilon\mathbf{t}'' + 2\varepsilon H_3'\mathbf{t}' -$$

$$- \frac{1}{|\mathbf{R}'|^2}\left[|\mathbf{r}'|\,|\mathbf{r}'|' + \frac{\varepsilon}{2}(\varepsilon H_3'^2 + \varepsilon H_3^2\mathbf{t}'\cdot\mathbf{t}' + 2\,|\mathbf{r}'|\,H_3\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{t}')'\right](|\mathbf{r}'|\,\mathbf{n}_1 + H_3'\varepsilon\mathbf{t} + H_3\varepsilon\mathbf{t}')\}$$

Семейство u_1 выберем так, чтобы на линии $\mathbf{r}(u_1)$ в звуковой точке было $|\mathbf{r}'|' = 0$ (например, положим $u_1 = s_1$, где s_1 — длина дуги вдоль кривой $\mathbf{r}(u_1)$).

Пусть γ — геодезическая кривизна, δ — относительное кручение кривой $r(u_1)$ на поверхности u_3, тогда [3] имеем

$$\mathbf{t}''\cdot\mathbf{t} = -\mathbf{t}'\cdot\mathbf{t}' = -|\mathbf{r}'|^2(\gamma^2 + \delta^2)$$

и условие (3) можно преобразовать к виду (величины порядка ε^2 отброшены)

$$\frac{1}{|\nabla u_3|}\frac{\partial^2}{\partial s_1^2}|\nabla u_3| \leqslant \delta^2 \qquad \text{при } v = a \tag{4}$$

В потенциальном А-течении это условие имеет место при произвольном выборе семейства u_3.

Если течение такое, что система координат u_i может быть выбрана трижды ортогональной (такая система с точностью до обозначений единственна, если поток не является равномерным и прямолинейным), то условие (4) для поверхностей u_2, u_3 запишется в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial s_1^2}|\nabla u_i| \leqslant 0 \qquad \text{при } v = a \tag{5}$$

В случае осевой симметрии это условие не выполняется, если только звуковая поверхность не будет плоскостью, ортогональной оси. Действительно, выберем некоторую линию тока $y = y(x)$ и определим на ней $u_1 = x$. При этом

$$|\mathbf{r}'|' = \frac{y'y''}{(1 + y'^2)^{1/2}} = 0 \qquad \text{при } v = a, \qquad |\nabla u_3| = \frac{1}{y}$$

и условие (5) запишется в виде

$$yy'' \geqslant 2y'^2 \qquad \text{при } v = a$$

Поступила 18 XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов О. С., Шмыглевский Ю. Д. Об одном свойстве трансзвуковых течений газа. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.
2. Bruhn G., Haack W. Ein Charakteristikenverfahren für dreidimensionale instationäre Gasströmungen. Z. angen.Math. und Phyz., 1958 9b, No. 5—6. Изд. иностр. лит. имеется русск. перевод: Механика, Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1959, т. 3.
3. Лагалли М. Векторное исчисление. Гостехиздат, 1936.