Автор приносит благодарность М. Я. Широбокову и Ю. А. Романову за обсуждение статьи и полезные замечания.

Поступила 23 XI 1964

Горьковский научно-исследовательский физико-технический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Коньков В. Л. К теории измерения электропроводности полупроводниковых пленок методом зондов. Физика твердого тела, 1964, т. 6, № 1, стр. 304.
2. Коньков В. Л. Об измерении постоянной Холла полупроводниковых пленок методом зондов. Физика твердого тела, 1964, т. 6, № 1, стр. 308.
3. Коньков В. Л. О проводимости тонких полупроводниковых пленок на проводящих подложках. Физика твердого тела, 1964, т. 6, № 7, стр. 2208.
4. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными, гл. 2. Физматгиз, 1961.
5. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд-во АН СССР, 1948.

К ТЕОРИИ НОРМАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ГОРЕНИЯ

Г. П. Черепанов (Москва)

Нормальная скорость гомогенного стационарного горения, являющаяся физико-химической константой смеси, определяется из решения системы уравнений [1]

$$m\frac{du}{d\xi}-\frac{d^2u}{d\xi^2}=\Phi(u)\,c,\qquad m\frac{dc}{d\xi}-\lambda\frac{d^2c}{d\xi^2}=-\Phi(u)\,c \tag{1}$$
$$(-\infty\leqslant\xi\leqslant\infty)$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$\begin{gathered}u(-\infty)=u_-,\qquad u(+\infty)=u_+\qquad (u_-<u_\varepsilon,\ u_+>u_\varepsilon)\\ c(-\infty)=v_-,\qquad c(+\infty)=0\qquad (v_->0,\ m>0)\\ \Phi(u)=0\quad\text{при } u<u_\varepsilon,\qquad \Phi(u)>0\quad\text{при } u>u_\varepsilon;\ \lambda=D\gamma\rho/k\end{gathered}\tag{2}$$

Здесь m — нормальная скорость горения; u — температура смеси; c — концентрация активного вещества; $c\Phi(u)$ — скорость мономолекулярной реакции; D — коэффициент диффузии; ρ — плотность вещества; γ — его теплоемкость, k — коэффициент теплопроводности.

При $\lambda=1$ решение задачи получено Я. Б. Зельдовичем [1]. Я. И. Канель [2] доказал существование решения при всех λ и единственность решения при $0<\lambda<1$. С. С. Новиков и Ю. С. Рязанцев [3] исследовали задачу в особом случае $\lambda=0$. Ниже найдено точное аналитическое решение задачи (1), (2).

Исходную задачу (1), (2) нетрудно свести к следующей. Требуется найти число α из краевой задачи на сегменте [0, 1] (3)

$$\frac{dz}{dt}=-1+\alpha f(t)\frac{v}{z},\qquad \lambda\frac{dv}{dt}=1+\frac{t-v}{z},\qquad \begin{matrix}z=0, & v=0\ \text{при } t=0\\ z=a & \text{при } t=1\quad (a>0)\end{matrix}$$

Здесь

$$f(t)=\Phi(u),\qquad f(t)=0\quad\text{при } t=1,\qquad f(t)>0\quad\text{на } [0,1)$$

$$v=\frac{c}{u_+-u_\varepsilon},\qquad z=\frac{m^{-1}}{u_+-u_\varepsilon}\frac{du}{d\xi},\qquad t=\frac{u_+-u}{u_+-u_\varepsilon},\qquad a=\frac{u_\varepsilon-u_-}{u_+-u_\varepsilon},\qquad \alpha=\frac{1}{m^2}$$

Найдем решение задачи (3), считая, что функция $f(t)$ может быть представлена своим рядом Тэйлора, радиус сходимости которого больше единицы

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_nt^n \tag{4}$$

В частности, это может быть просто полином, аппроксимирующий опытную кривую $f(t)$.

Рассмотрим сначала задачу Коши для уравнений (3) с данными Коши при $t=0$, считая число α известным. Решение задачи Коши ищем в виде

$$z=\sum_{n=1}^{\infty} z_n t^n, \qquad v=\sum_{n=1}^{\infty} v_n t^n \tag{5}$$

Подставляя функции z и v, согласно (5), в уравнения (3) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях t, относительно z_n и v_n, получим бесконечную систему алгебраических уравнений. Первые два уравнения системы содержат лишь z_1 и v_1; существуют три решения этих уравнений, одно из которых положительно, а два отрицательны; физический смысл имеет лишь положительное решение:

$$z_1=\left(\frac{1}{4\lambda^2}+\alpha\frac{f_0}{\lambda}\right)^{1/2}-\frac{1}{2\lambda}, \qquad v_1=\frac{1+z_1}{1+\lambda z_1} \tag{6}$$

Остальные уравнения бесконечной системы линейны относительно неизвестных z_n и v_n. Решение системы выражается следующими рекуррентными формулами:

$$z_2=\alpha\frac{f_1v_1(2\lambda z_1+1)}{\Delta_2}, \qquad v_2=-\alpha\frac{f_1v_1(\lambda v_1-1)}{\Delta_2}$$

$$\Delta_2=(1+3z_1)(1+2\lambda z_1)+(\lambda-1)z_1 \tag{7}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_n=\frac{(1+n\lambda z_1)B_n-\alpha f_0A_n}{\Delta_n}, \qquad v_n=-\frac{[1+(n-1)z_1]A_n+(\lambda v_1-1)B_n}{\Delta_n}$$

$$\Delta_n=[1+(n+1)z_1](1+n\lambda z_1)+(\lambda-1)z_1$$

$$A_n=2\lambda v_2z_{n-1}+3\lambda v_3z_{n-2}+\ldots+(n-1)\lambda v_{n-1}z_2$$

$$B_n=\alpha(f_1v_{n-1}+f_2v_{n-2}+\ldots+f_{n-1}v_1)-2z_2z_{n-1}-3z_3z_{n-2}-\ldots-(n-1)z_{n-1}z_2$$

Можно показать, что если радиус сходимости ряда (4) для функции $f(t)$ больше единицы, то и радиус сходимости рядов (5), дающих решение задачи Коши, также больше единицы. Как видно из решения (5)—(7), функции z и v являются аналитическими функциями переменной t и параметра α.

Зная решение задачи Коши для произвольного α, значение α, отвечающее граничному условию (3) при $t=1$, следует определить как положительный корень уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n(\alpha)=a \tag{8}$$

Из изложенного вытекает, в частности, следующая теорема.

Теорема. Число решений исходной краевой задачи (3) равно числу нулей функции

$$\psi(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty} z_n(\alpha)-a$$

расположенных на положительной действительной полуоси ($z_n(\alpha)$ определяются формулами (7)).

Легко видеть, что функция $\psi(\alpha)$ всегда имеет, по крайней мере, один нуль, расположенный на действительной положительной полуоси, так как, согласно (7), при больших α она монотонно возрастает, а при $\alpha=0$ принимает значение $-a$.

Автор благодарен Р. Д. Бачелису и В. Г. Меламеду за полезную дискуссию.

Поступила 30 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. К теории распространения пламени. Ж. физ. химии, 1948, т. 22, стр. 27, № 1.
2. Канель Я. И. О стационарном решении для системы уравнений теории горения, Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 2.
3. Новиков С. С., Рязанцев Ю. С. К теории горения конденсированных систем, Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 6.