

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ЗОНДОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПЛЕНОК

В. Л. Коньков (Горький)

Многие задачи теории зондовых измерений параметров полупроводниковых пленок сводятся к краевым задачам Неймана [1-3] уравнения Лапласа с неоднородными граничными условиями. Решение их в связи с проблемой микроминиатюризации радиоэлектронной аппаратуры имеет большое значение.

Краевые задачи с разделяющимися переменными и неоднородными условиями чаще всего сводят к задачам с однородными граничными условиями, которые затем и решают обычно методом Фурье [4]. Для этого решение представляют в виде суммы функций, каждую из которых подчиняют исходному уравнению и однородным условиям. Для большинства же задач Неймана такой способ решения оказывается непригодным, так как в отдельности для новых искомым функций не выполняется теорема Остроградского — Гаусса [5]. Однако последнее затруднение можно устранить, если новые функции подчинять не исходному, а другому, более общему уравнению.

Рассмотрим в качестве примера задачу Неймана уравнения Лапласа вида

$$\nabla^2 \varphi(x, y) = 0. \quad \varphi_x = p_{1,2}(y) \text{ при } x = \mp a, \quad \varphi_y = q_{1,2}(x) \text{ при } y = \mp b \quad (1)$$

Будем искать решение в виде

$$\varphi(x, y) = u(x, y) + v(x, y) \quad (2)$$

и потребуем, чтобы функции u и v удовлетворяли уравнениям и граничным условиям

$$\nabla^2 u(x, y) = \rho, \quad u_x = p_{1,2}(y) \text{ при } x = \mp a, \quad u_y = 0 \text{ при } y = \mp b \quad (3)$$

$$\nabla^2 v(x, y) = -\rho, \quad v_x = 0 \text{ при } x = \pm a, \quad v_y = q_{1,2}(x) \text{ при } y = \mp b \quad (4)$$

Исходное уравнение (1) будет удовлетворено при любом выборе функции $\rho(x, y)$. Чтобы предельно упростить уравнения для u и v , будем считать ρ постоянной и выберем ее значения так, чтобы для функций u и v выполнялась теорема Остроградского — Гаусса, т. е. положим

$$\rho = \frac{1}{4ab} \int_{-b}^b [p_2(y) - p_1(y)] dy = -\frac{1}{4ab} \int_{-a}^a [q_2(x) - q_1(x)] dx \quad (5)$$

В этом случае задачи для u и v будут разрешимы и их можно проинтегрировать методом Фурье. Если полагать $\rho = 0$, т. е. подчинить u и v исходному уравнению Лапласа, то из (5) видно, что в общем случае теорема Остроградского — Гаусса для них не будет выполняться.

С точки зрения теории поля, ρ в уравнениях (3) играет роль плотности электрических зарядов. Поэтому переход к этим уравнениям означает одновременное введение двух равных зарядов, с противоположными знаками и постоянной плотностью. Величина последних выбирается так, чтобы потоки создаваемых ими полей были равны потокам поля в соответствии с граничными условиями задачи.

Возьмем частный случай, приведенный в [5] в качестве примера задачи, не решающейся методом разделения переменных, и когда $p_1 = q_1 = 0$, $p_2 = I / 2b\sigma$ и $q_2 = -I / 2a\sigma$, где I — сила электрического тока, σ — проводимость образца.

В этом случае уравнения (3) принимают вид

$$\nabla^2 u(x, y) = 1/4 I / ab\sigma, \quad u_x(-a, y) = 0, \quad u_x(a, y) = 1/2 I / b\sigma, \quad u_y(x, \mp b) = 0 \quad (6)$$

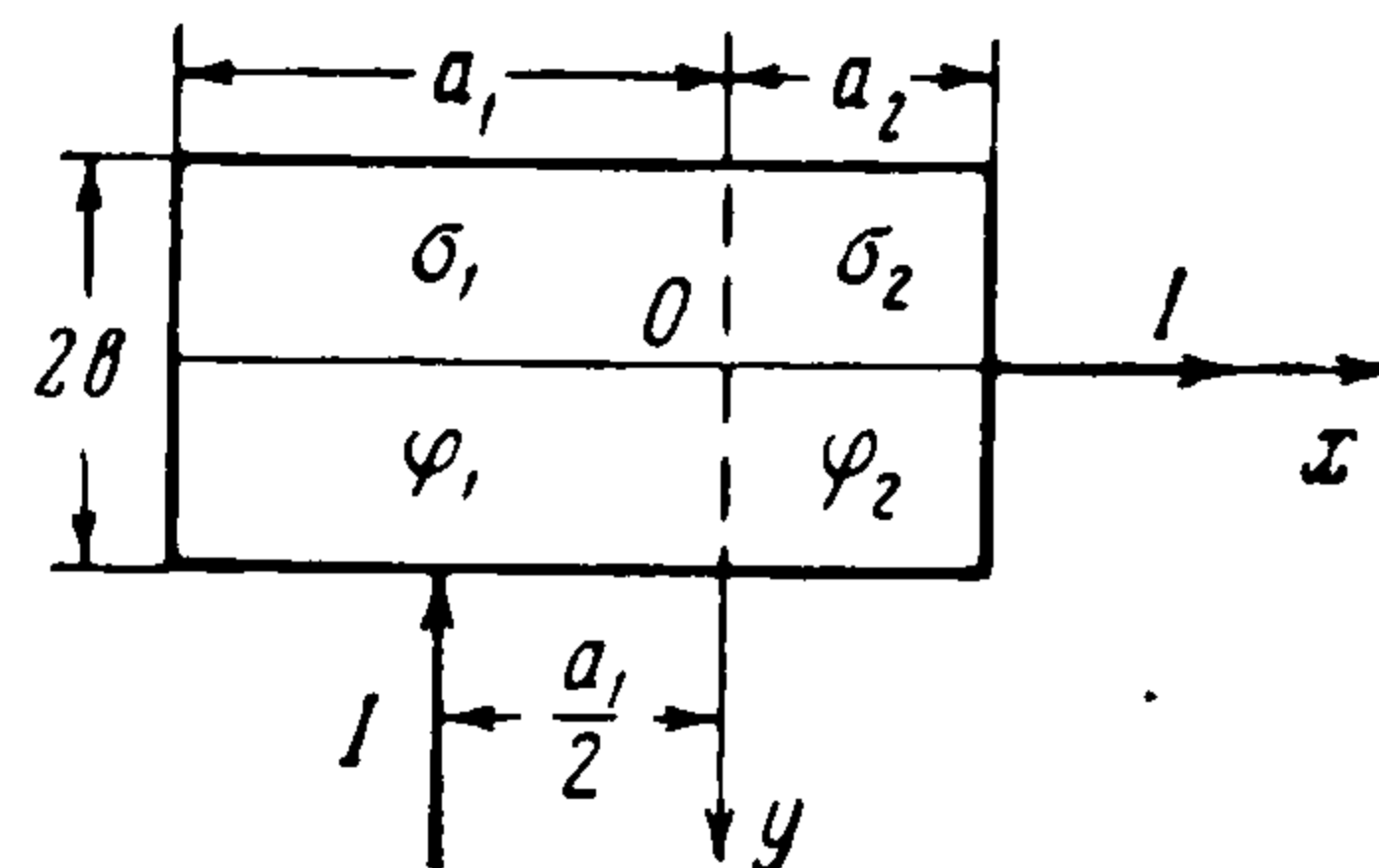
$$\nabla^2 v(x, y) = -1/4 I / ab\sigma, \quad v_x(\mp a, y) = 0, \quad v_y(x, -b) = 0, \quad v_y(x, b) = -1/2 I / a\sigma$$

Интегрирование их методом Фурье сразу дает

$$u = \frac{I}{8ab\sigma} (x + a)^2, \quad v = -\frac{I}{8ab\sigma} (y + b)^2 + c \quad (7)$$

Решение задачи при помощи функции Грина приводит к выражению для φ в виде двух рядов Фурье, и только после их суммирования получаем члены (7). Если решать задачу методом Фурье без сведения ее к задаче с однородными граничными условиями [5], то один из членов (7) найдем также лишь в виде ряда Фурье. Таким образом, приведенный здесь метод решения задачи оказывается наиболее простым и кратким.

Предлагаемый метод решения задач Неймана с неоднородными граничными условиями обладает и значительной общностью. Рассмотрим пример с особенностями, характерными для ряда задач теории зондовых измерений параметров полупроводниковых пленок. В прямоугольном образце, показанном на [фиг. 1 и состоящем из двух частей с проводимостями σ_1 и σ_2 , через одно его ребро при помощи точечного зонда подводится ток I , а через другое — равномерно отводится. Нужно найти распределение потенциала поля, который в каждой из частей образца удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям



$$\nabla^2 \varphi_i(x, y) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \Big|_{x=(-1)^i a_i} = -\frac{I}{2b\sigma_2} \delta_{2i}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \Big|_{y=-b} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \Big|_{y=b} = \frac{I}{\sigma_1} \delta\left(x + \frac{1}{2} a_1\right) \delta_{1i}$$

$$(\varphi_1 - \varphi_2)_{x=0} = 0, \quad \left(\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, а $\delta(x)$ — дельта-функция. Решить эту задачу при помощи функции Грина или непосредственно методом Фурье не представляется возможным, так как в этих методах требуется явное знание $\partial \varphi_i / \partial n$ во всех точках поверхностей областей образца. Но на границе $x = 0$ задана лишь связь между $\partial \varphi_1 / \partial x$ и $\partial \varphi_2 / \partial x$, а сами они неизвестны.

Уравнение (8) без каких-либо затруднений интегрируется изложенным выше методом. Положим

$$\varphi_1 = u_1(x, y) + v_1(x, y), \quad \nabla^2 u_1 = -\nabla^2 v_1 = -\frac{1}{2} I / a_1 b \sigma_1 \tag{9}$$

и потребуем, чтобы функции u_1 и v_1 удовлетворяли граничным условиям

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} \Big|_{x=\mp a} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} \Big|_{y=-b} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} \Big|_{y=b} = \frac{I}{\sigma_1} \delta\left(x + \frac{1}{2} a_1\right) \tag{10}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=-a_1} = 0, \quad (v_1 + u_1 - \varphi_2)_{x=0} = 0, \quad \left(\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=\mp b} = 0$$

Полученные задачи для v_1 , u_1 и φ_2 можно уже решать методом Фурье, сначала определить v_1 , а затем найти u_1 и φ_2 . В результате для потенциала поля получаем выражение

$$\varphi_i = \frac{I}{4a_1 b \sigma_1} \left[(y+b)^2 - (x+a_1)^2 + 8b \sum_{k=2,4,\dots} (-1)^{k/2} \frac{\text{ch } \alpha_k (y+b)}{\alpha_k \text{sh } 2\alpha_k b} \cos \alpha_k x \right] \delta_{1i} -$$

$$- \frac{I}{b\sigma_2} x \delta_{2i} + \frac{I \sigma_{i-(-1)^i}}{b\sigma_1} \sum_{n=1,2,\dots} (-1)^n \frac{\text{ch } \alpha_n [x + (-1)^{i+1} a_i]}{\alpha_n D_n \text{sh } \frac{1}{2} \alpha_n a_1 \text{sh } \alpha_n a_i} \cos \alpha_n (y+b) + c_1 \delta_{2i} + c$$

где α_k , α_n , c_1 и D_n определяются равенствами

$$\alpha_k = \frac{\pi k}{a_1}, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{2b}, \quad c_1 = \frac{I}{b\sigma_1} \left(\frac{4}{3} \frac{b^2}{a_1} - \frac{9}{32} a_1 \right)$$

$$D_n = \sigma_1 \text{cth } \alpha_n a_2 + \sigma_2 \text{cth } \alpha_n a_1 \tag{12}$$

Изложенный метод применим к решению задач Неймана уравнения Пуассона с неоднородными граничными условиями и других задач.

Автор приносит благодарность М. Я. Ширококову и Ю. А. Романову за обсуждение статьи и полезные замечания.

Поступила 23 XI 1964

Горьковский научно-исследовательский
физико-технический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. К о н ь к о в В. Л. К теории измерения электропроводности полупроводниковых пленок методом зондов. Физика твердого тела, 1964, т. 6, № 1, стр. 304.
2. К о н ь к о в В. Л. Об измерении постоянной Холла полупроводниковых пленок методом зондов. Физика твердого тела, 1964, т. 6, № 1, стр. 308.
3. К о н ь к о в В. Л. О проводимости тонких полупроводниковых пленок на проводящих подложках. Физика твердого тела, 1964, т. 6, № 7, стр. 2208.
4. П е т р о в с к и й И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными, гл. 2. Физматгиз, 1961.
5. Г р и н б е р г Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд-во АН СССР, 1948.

К ТЕОРИИ НОРМАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ГОРЕНИЯ

Г. П. Черепанов (Москва)

Нормальная скорость гомогенного стационарного горения, являющаяся физико-химической константой смеси, определяется из решения системы уравнений [1]

$$m \frac{du}{d\xi} - \frac{d^2u}{d\xi^2} = \Phi(u)c, \quad m \frac{dc}{d\xi} - \lambda \frac{d^2c}{d\xi^2} = -\Phi(u)c \quad (1)$$

$$(-\infty \leq \xi \leq \infty)$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$\begin{aligned} u(-\infty) &= u_-, & u(+\infty) &= u_+ & (u_- < u_\epsilon, u_+ > u_\epsilon) \\ c(-\infty) &= v_-, & c(+\infty) &= 0 & (v_- > 0, m > 0) \\ \Phi(u) &= 0 & \text{при } u < u_\epsilon, & \Phi(u) > 0 & \text{при } u > u_\epsilon; \lambda = D\gamma\rho/k \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь m — нормальная скорость горения; u — температура смеси; c — концентрация активного вещества; $c\Phi(u)$ — скорость мономолекулярной реакции; D — коэффициент диффузии; ρ — плотность вещества; γ — его теплоемкость, k — коэффициент теплопроводности.

При $\lambda = 1$ решение задачи получено Я. Б. Зельдовичем [1]. Я. [И. Канель [2] доказал существование решения при всех λ и единственность решения при $0 < \lambda < 1$. С. С. Новиков и Ю. С. Рязанцев [3] исследовали задачу в особом случае $\lambda = 0$. Ниже найдено точное аналитическое решение задачи (1), (2).

Исходную задачу (1), (2) нетрудно свести к следующей. Требуется найти число α из краевой задачи на сегменте $[0, 1]$

$$\frac{dz}{dt} = -1 + \alpha f(t) \frac{v}{z}, \quad \lambda \frac{dv}{dt} = 1 + \frac{t-v}{z}, \quad \begin{aligned} z=0, & \quad v=0 & \text{при } t=0 \\ z=a & \quad \text{при } t=1 \end{aligned} \quad (a > 0) \quad (3)$$

Здесь

$$f(t) = \Phi(u), \quad f(t) = 0 \quad \text{при } t = 1, \quad f(t) > 0 \quad \text{на } [0, 1)$$

$$v = \frac{c}{u_+ - u_\epsilon}, \quad z = \frac{m^{-1}}{u_+ - u_\epsilon} \frac{du}{d\xi}, \quad t = \frac{u_+ - u}{u_+ - u_\epsilon}, \quad a = \frac{u_\epsilon - u_-}{u_+ - u_\epsilon}, \quad \alpha = \frac{1}{m^2}$$

Найдем решение задачи (3), считая, что функция $f(t)$ может быть представлена своим рядом Тэйлора, радиус сходимости которого больше единицы

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n \quad (4)$$

В частности, это может быть просто полином, аппроксимирующий опытную кривую $f(t)$.