О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ОБ УДАРЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

А. М. Скобеев (Москва)

В [1] рассматривалась задача об ударе жестко-вязко-пластического стрежня о жесткую преграду. Предполагалось, что в части стержня, примыкающей к преграде, возникает пластическое движение, а остальная часть движется как жесткое целое. Отдельно предполагалось, что граница раздела между жесткой и пластической областями движется от ударяемого конца к свободному. Это естественное предположение в последнее время вызвало сомнения, смысл которых сводится к тому, что при ударе бесконечного стержня о жесткую преграду весь стержень мгновенно нагружается и переходит в пластическое состояние; отсюда делался вывод, что и при ударе конечного стержня пластическая зона должна мгновенно охватить весь стержень, а граница раздела должна идти от свободного конца.

Далее доказывается, что граница выходит из ударяемого конца и при $l \to \infty$ (l — длина стержня) средняя скорость движения границы стремится к бесконечности на любом конечном участке.

1. Вводим лагранжеву систему координат, движущуюся вместе с преградой со скоростью v_0 так, что в начальный момент стержень покоится, ось x направлена вдоль стержня, преграде соответствует $x = 0$. Обозначим: $v(t, x)$ — скорость, $\sigma(t, x)$ — осевое напряжение, t — время, l — длина стержня. Уравнение состояния возьмем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \text{при } |\sigma| \leqslant |\sigma_0| \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \mu(\sigma - \sigma_0)\,|\sigma - \sigma_0|^{\alpha} \qquad \text{при } |\sigma| > |\sigma_0| \tag{1.2}$$

Считаем, что в плоскости xt существует кривая $x = x_0(t)$, которая разбивает область $t \geqslant 0$, $l \geqslant x \geqslant 0$ на области D_1 и D_2 (фиг. 1), в D_1 скорость $v(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1.2), уравнению движения

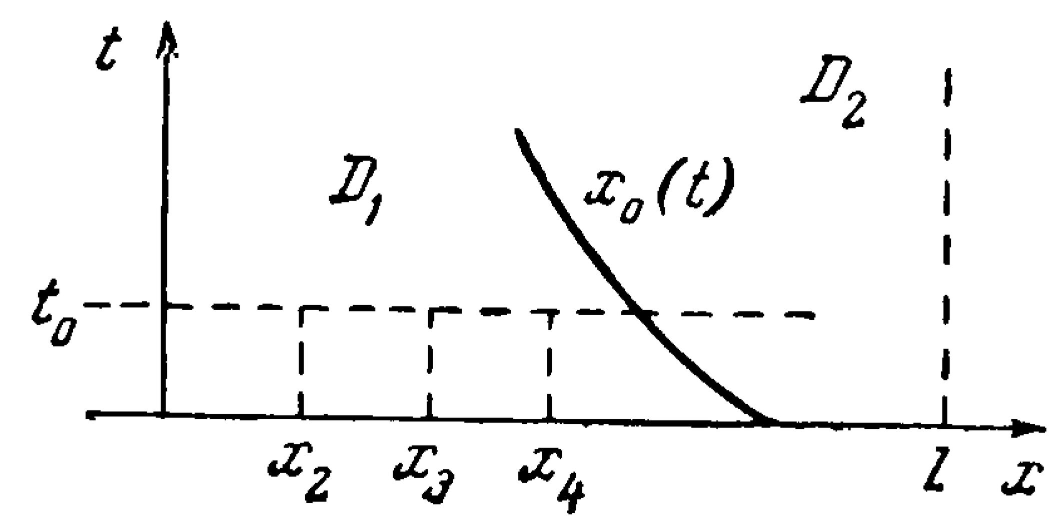
$$\rho_0 v_t = \sigma_x \tag{1.3}$$

и граничным условиям (1.4)

$$v(t, 0) = v_0, \qquad v(0, x) = 0, \qquad v_x(t, x_0(t)) = 0$$

в D_2 скорость $v(t, x)$ удовлетворяет (1.1), уравнению движения

$$\rho_0 \frac{dv}{dt} = -\frac{\sigma_0}{l - x_0(t)} \tag{1.5}$$



Фиг. 1

и начальному условию $v(0, x) = 0$.

Функция $v(t, x)$ непрерывна при всех $l \geqslant x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, кроме точки $x = 0$, $t = 0$. Неизвестными являются функции $v(t, x)$, $\sigma(t, x)$ и $x_0(t)$.

Далее считаем $v \geqslant 0$, $v_0 > 0$, $\sigma < 0$, $\sigma_0 < 0$. Постановка [1] получается при $\alpha = 0$, $x_0(0) = 0$.

2. Доказываем, что $x_0(0) = 0$. Уравнения (1.2), (1.3) и граничные условия (1.4) полностью определяют в D_1 функцию $v(t, x)$, которая зависит от функции $x_0(t)$; в частности, однозначно определяется

$$v_-(t) = \lim v(t, x) \qquad \text{при } x \to x_0(t) - 0$$

Уравнение (1.5) однозначно определяет в D_2 зависящую от $x_0(t)$ функцию $v(t, x)$ и $v_+(t) = \lim v(t, x)$ при $x \to x_0(t) + 0$. В силу непрерывности $v(t, x)$ при $t \geqslant 0$, $l \geqslant x \geqslant 0$ (кроме точки $t = 0$, $x = 0$), имеем

$$v_-(t) = v_+(t) \tag{2.1}$$

и функцию $x_0(t)$ следует выбирать так, чтобы выполнялось (2.1). Покажем, что если $x_0(0) > 0$, то (2.1) не выполняется. Для этого предполагаем, что $x_0(0) > 0$, и оцениваем функцию $v_-(t)$ сверху, а $v_+(t)$ снизу и доказываем, что при $t \to 0$ верхняя оценка меньше нижней, т. е. $v_-(t) < v_+(t)$, что противоречит (2.1).

Получим вначале оценку для $v_+(t)$. Из (1.1) и (1.5) имеем

$$v_1(t) = v(t, x) = \frac{1}{\rho_0}\int_0^t \frac{|\sigma_0|}{l - x_0(\xi)}\, d\xi \geqslant \frac{|\sigma_0|}{\rho_0 l}\, t \tag{2.2}$$

Ввиду $x_0 \leqslant l$ соотношение (2.2) верно и при $x_0(0) = l$.

Оценим теперь $v_-(t)$. Для этого привлечем условие $v_x < 0$ в D_1; это следует из $\sigma < 0$ и (1.2). Величина $\sigma(t, x)$ из (1.2) — (1.4) определяется однозначно, и принятое в постановке задачи условие $\sigma < 0$, вообще говоря, может не выполняться; однако вопрос о разрешимости задачи здесь не обсуждается.

Итак, оценим величину $v_-(t)$, предполагая $x_0(0) > 0$. Поскольку $x_0(0) > 0$, то существуют $t_0 > 0$ и x_2, x_3, x_4, удовлетворяющие при $t_0 \geqslant t \geqslant 0$ неравенству $x_0(t) > x_4 > x_3 > x_2 > 0$, а в остальном произвольные. Докажем, что

$$\int_{x_3}^{x_4} v(t, x)\, dx = 0(1)\, t \tag{2.3}$$

где $0(1) \to 0$ при $t \to 0$. Имеем, с учетом (1.3) и $\sigma < 0$, $|\sigma| > |\sigma_0|$

$$\rho_0 \int_{x_3}^{x_4} v(t, x)\, dx = \int_{x_3}^{x_4}\int_0^t \frac{\partial[\sigma(s, x) - \sigma_0]}{\partial x}\, ds\, dx = \int_0^t [\sigma(s, x_4) - \sigma_0]\, ds - \int_0^t [\sigma(s, x_3) - \sigma_0]\, ds \leqslant$$

$$\leqslant -\int_0^t [\sigma(s, x_3) - \sigma_0]\, ds \leqslant -\frac{1}{x_3 - x_2}\int_{x_2}^{x_3}\int_0^{t} [\sigma(s, x) - \sigma_0]\, ds\, dx$$

здесь использовано

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t [-\sigma(s, x) + \sigma_0]\, ds = -\rho_0 v(t, x) < 0$$

Воспользовавшись (1.2) и неравенством Гельдера (в данном случае оно верно и при $\alpha = 0$), получим

$$\int_{x_2}^{x_3}\int_0^t [-\sigma(s, x) + \sigma_0]\, ds\, dx \leqslant [(x_3 - x_2)\, t]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(\int_{x_2}^{x_3}\int_0^t [-\sigma(s, x) + \sigma_0]^{1+\alpha}\, ds\, dx\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} =$$

$$= [(x_3 - x_2)\, t]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(\frac{1}{\mu}\int_0^t [v(s, x_2) - v(s, x_3)]\, ds\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} = [(x_3 - x_2)\, t]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} [O(1)\, t]^{\frac{1}{1+\alpha}} = O(1)\, t$$

т. е. (2.3) доказано. Ввиду $v_x \leqslant 0$

$$v_-(t) \leqslant v(t, x_3) \leqslant \frac{1}{x_4 - x_3}\int_{x_3}^{x_4} v(t, x)\, dx = 0(1)\, t$$

т. е. $v_-(t) = 0(1)\, t$. Это в свете (2.2) дает $v_-(t) < v_+(t)$ при достаточно малых t, что противоречит (2.1), и, таким образом, $x_0(0) > 0$ невозможно. Отметим, что доказательство неприменимо, если $l = \infty$ или $|\sigma_0| = 0$, ибо в этих случаях правая часть (2.2) обращается в нуль.

3. Положим $\alpha = 0$ и введем функцию $\tau(x)$, обратную функции $x_0(t)$, т. е. $\tau(x_0(t)) = t$. Для этой функции получим оценку

$$\tau(x) \leqslant x^2 H\left(\frac{|\sigma_0|\, x^2}{v_0(l - x)}\right) \tag{3.1}$$

где $H(\xi) \to 0$ при $\xi \to 0$. Из этой оценки, в частности, следует, что при $l \to \infty$ кривая $x = x_0(t)$ прижимается к оси x.

В дальнейшем предполагаем $x_0'(t) > 0$ при $t \leqslant T$ и всюду далее считаем $t < T$. Кроме того, полагаем для удобства $\mu = 1$, $\rho_0 = 1$. В этих предположениях (1.2) и (1.3) можно заменить на уравнение теплопроводности

$$v_t = v_{xx} \tag{3.2}$$

в остальном постановка п. 1 сохранится.

Для получения (3.1) строим в плоскости x, t прямоугольник $t_1 \geqslant t \geqslant t_0$, $m \geqslant x \geqslant 0$, где $m > x_0'(t_1)$, $T > t_1 > t_0 > 0$, а в остальном t_0, t_1 и m произвольны (фиг. 2). Строим в этом прямоугольнике вспомогательную функцию $u^m(t, x)$, удовлетворяющую в нем уравнению (3.2), а на границе условиям

$$u^m(t, 0) = v_0, \qquad u^m(t_0, x) = 0, \qquad u_x^m(t, m) = 0 \tag{3.3}$$

Функция $u^m(t, x)$ легко выписывается в явном виде, однако в дальнейшем понадобятся только следующие ее свойства, которые можно легко доказать:

$$u_x^m < 0 \text{ при } x < m, \qquad u^m(t, m) = u^1\left(\frac{t}{m^2}, 1\right) \equiv v_0 h\left(\frac{t - t_0}{m^2}\right) \tag{3.4}$$

где $h(\xi)$ — некая функция, не зависящая от параметров задачи; можно показать, что $\xi^{-1}h(\xi) \to 0$ при $\xi \to 0$. Докажем, что $v(t, x_0(t)) > u^m(t, m)$. Для этого введем функцию $w(t, x) = v(t, x) - u^m(t_0, x)$. В четырехугольнике D_3, образованном прямыми $t = t_0$, $t = t_1$, $x = 0$ и кривой $x = x_0(t)$, функция w удовлетворяет (3.2) и условиям

$$w(t, 0) = 0, \qquad w(t_0, x) = v(t_0, x), \qquad w_x(t, x_0(t)) = -u_x^m(t, x_0(t)) \tag{3.5}$$

Согласно теореме о максимуме, w достигает минимума или при $x = 0$, или при $t = t_0$, или при $x = x_0(t)$. Однако, в силу (3.5), величина w не может достигать минимума на кривой $x = x_0(t)$, ибо в этом случае в точке минимума должно было бы выполняться условие $w_x \leqslant 0$. Так как $w = 0$ при $x = 0$ и $w \geqslant 0$ при $t = t_0$, то $w \geqslant 0$ всюду в D_3, в частности, $w(t, x_0(t)) \geqslant 0$. Отсюда имеем, учтя $u_x^m < 0$

$$v(t, x_0(t)) \geqslant u^m(t, x_0(t)) > u^m(t, m) = v_0 h\left(\frac{t - t_0}{m^2}\right) \tag{3.6}$$

Поскольку (3.6) выполняется при любых $t_0 > 0$, $m > x_0(t_1)$, а $h(\xi)$ непрерывна, (3.6) верно и при $t_0 = 0$, $m = x_0(t_1)$. Из (1.5) имеем

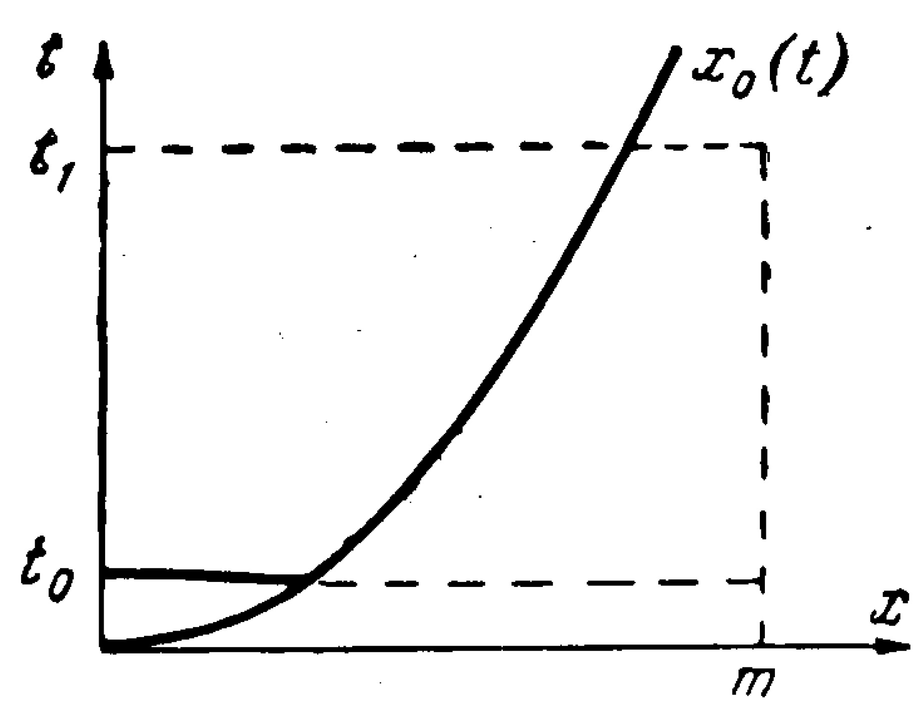
$$v(t_1, x_0(t_1)) = \int_0^{t_1} \frac{|\sigma_0|}{l - x_0(\xi)} d\xi \leqslant \frac{|\sigma_0|}{l - x_0(t_1)} t_1 \tag{3.7}$$

Из (3.6) и (3.7) получим (вместо t_1 пишем t, ибо t_1 можно брать произвольно)

$$\frac{|\sigma_0|}{l - x_0(t)} t \geqslant v_0 h\left(\frac{t}{x_0^2(t)}\right) \tag{3.8}$$

или

$$\frac{|\sigma_0|}{v_0(l - x_0)} x_0^2 \geqslant \frac{x_0^2}{t} h\left(\frac{t}{x_0^2}\right) \tag{3.9}$$



Фиг. 2

Введем функцию $H(\xi)$, определенную уравнением

$$H(\xi^{-1}h(\xi)) = \xi$$

Функция $\xi^{-1}h(\xi)$ стремится к нулю при $\xi \to 0$ и существует $\beta > 0$ такое, что при $\xi < \beta$ функция $\xi^{-1}h(\xi)$ монотонно возрастает, поэтому $H(0) = 0$ и $H(\xi)$ определена и монотонна при $\xi < \beta^{-1}h(\beta)$. Из (3.9) имеем

$$\tau(x) \leqslant x^2 H\left(\frac{|\sigma_0| x^2}{v_0(l - x)}\right) \tag{3.10}$$

Из (3.10) следует, что если $l \to \infty$, то $\tau(x) \to 0$ при любом фиксированном x. Кроме того, из (3.10) следует, что если при $t \to 0$

$$x_0 = A(t)\sqrt{t}$$

то $A(t) \to \infty$ при $t \to 0$.

В заключение автор благодарит Н. В. Зволинского за обсуждение работы.

Поступила 12 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Ишлинский А. Ю. Об ударе вязко-пластического стержня о жесткую преграду. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3.