Здесь P — суммарное усилие, действующее на берег трещины. Тогда условие для определения радиуса равновесной трещины a получим в виде

$$a = \left(\frac{P\sqrt{\lambda}}{K\sqrt{2\pi}}\right)^{2/3} \tag{2.8}$$

Из формулы (2.8) видно, что при уменьшении относительной толщины слоя λ радиус трещины a уменьшается значительно медленнее.

Как показали проведенные вычисления, полученные формулы (2.6) и (2.8) можно с надежностью использовать при $\lambda \leqslant 2$.

Поступила 18 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркузон И. А. Равновесные трещины в полосе конечной ширины. ПМТФ, 1963, № 5.
2. Александров В. М. К теории равновесных трещин в упругом слое. Тр. I Всесоюзн. симпозиума по концентрации напряжений. Киев, 1965.
3. Александров В. М. К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
4. Александров В. М. К решению одного типа двумерных интегральных уравнений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
5. Нобл Б. Метод Винера — Хопфа. Изд. иностр. лит., 1962.
6. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.
7. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Физматгиз, 1959.

О НАПРЯЖЕНИЯХ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

А. И. Каландия (Тбилиси)

Излагается схема эффективного решения задачи о напряжениях в бесконечной кусочно-однородной среде, ослабленной круговым отверстием. При помощи аналитического продолжения потенциалов Колосова — Мусхелишвили задача приводится к виду, позволяющему непосредственное применение для решения степенных рядов. Для коэффициентов разложения строится бесконечная система линейных алгебраических уравнений, которая решается численно, при конкретных упругих характеристиках материалов, в случае одностороннего растяжения пластинки.

Представим себе сплошную бесконечную пластинку, составленную из двух, различных по упругим свойствам материалов, спаянных между собой вдоль общей прямолинейной границы. Пусть одно из составляющих тел с упругими характеристиками, скажем λ_1, μ_1, заполняет нижнюю полуплоскость плоскости переменной $z = x + iy$, а другое, с характеристиками λ_2, μ_2 — верхнюю полуплоскость. Предположим, далее, что рассматриваемая кусочно-однородная среда ослаблена вырезом круговой формы и подвержена действию внешних усилий, приложенных на обводе и на бесконечности. Радиус отверстия примем равным единице и расположим его центр в начале координат. Тогда линией раздела сред будет служить действительная ось x с выброшенным отрезком $(-1,1)$. Эту линию обозначим через L. Через S^- и S^+ обозначим, далее, нижнюю и верхнюю полуплоскости с выброшенными полукругами, а через γ_1 и γ_2 — нижнюю и верхнюю полуокружности соответственно.

Искомым комплексным потенциалам φ и ψ, голоморфным соответственно в S^- и S^+, будем приписывать те же индексы, что и упругим постоянным. Имеем следующую граничную задачу:

$$\begin{aligned} &\varphi_1(t) + (t-\bar{t})\,\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\chi_1(t)} = f(t) \qquad \text{на } \gamma_1 \\ &\varphi_2(t) + (t-\bar{t})\,\overline{\varphi_2'(t)} + \overline{\chi_2(t)} = f(t) \qquad \text{на } \gamma_2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\varphi_1(t) + \overline{\chi_1(t)} = \varphi_2(t) + \overline{\chi_2(t)} \\ &\lambda\,[\varkappa_1 \varphi_1(t) - \overline{\chi_1(t)}] = \varkappa_2\varphi_2(t) - \overline{\chi_2(t)} \end{aligned} \qquad \text{на } L \tag{2}$$

Здесь $f(t)$ — заданная функция точки на единичной окружности,

$$\chi(z) = z\varphi'(z) + \psi(z), \qquad \lambda = \mu_2/\mu_1 \tag{3}$$

Складывая и вычитая равенства (2) и переходя во втором из них к сопряженным значениям, получим

$$\begin{aligned}
&(1+\lambda\varkappa_1)\varphi_1(t) + (1-\lambda)\overline{\chi_1(t)} = (1+\varkappa_2)\varphi_2(t) \\
&(\varkappa_2+\lambda)\chi_1(t) + (\varkappa_2 - \lambda\varkappa_1)\overline{\varphi_1(t)} = (1+\varkappa_2)\chi_2(t)
\end{aligned} \qquad \text{на } L \tag{4}$$

На основании предыдущих равенств очевидно, что функции φ_1, χ_1, определяемые в области S^+ равенствами

$$\begin{aligned}
&(1+\lambda\varkappa_1)\varphi_1(z) = (\lambda-1)\bar{\chi}_1(z) + (1+\varkappa_2)\varphi_2(z)] \\
&(\varkappa_2+\lambda)\chi_1(z) = (\lambda\varkappa_1 - \varkappa_2)\bar{\varphi}_1(z) + (1+\varkappa_2)\chi_2(z)
\end{aligned} \qquad \text{при } z \text{ в } S^+ \tag{5}$$

аналитически продолжают значения комплексных потенциалов φ_1, χ_1 в S^+ через линию L. Иначе говоря, функции φ_1, χ_1, распространенные на S^+ равенствами (5), будут на основании (4) голоморфными во всей плоскости с круговым отверстием.

Эту расширенную область обозначим через S, а функции φ_1, χ_1, в ней голоморфные,— через φ, χ.

Значения φ_2, χ_2 можно теперь выразить через вновь введенные функции φ и χ. Из (5), учитывая новые обозначения, будем иметь при z в S^+

$$\begin{aligned}
&(1+\varkappa_2)\varphi_2(z) = (1+\lambda\varkappa_1)\varphi(z) + (1-\lambda)\bar{\chi}(z) \\
&(1+\varkappa_2)\chi_2(z) = (\varkappa_2+\lambda)\chi(z) + (\varkappa_2 - \lambda\varkappa_1)\bar{\varphi}(z)
\end{aligned} \tag{6}$$

Если теперь φ_2, χ_2, определяемые предыдущими равенствами, подставить во второе условие (1), то для отыскания функций φ, χ, голоморфных в области S, получим следующие граничные условия:

$$\varphi(t) + (t-\bar{t})\overline{\varphi'(t)} + \overline{\chi(t)} = f(t) \qquad \text{на } \gamma_1 \tag{7}$$

$$\varphi(t) + (t-\bar{t})\overline{\varphi'(t)} + \overline{\chi(t)} + \alpha\varphi(\bar{t}) + \beta\overline{\chi(t)} + \gamma\bar{\chi}(t) + \gamma(t-\bar{t})\chi'(\bar{t}) = (1+\alpha)f(t) \qquad \text{на } \gamma_2$$

Здесь

$$\alpha = \frac{\mu_1\varkappa_2 - \mu_2\varkappa_1}{\mu_1 + \mu_2\varkappa_1}, \qquad \gamma = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2\varkappa_1}, \qquad \beta = \alpha - \gamma \tag{8}$$

Для решения задачи (7) положим в области S

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k}, \qquad \chi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k} \tag{9}$$

Предполагая равномерную сходимость на окружности рядов, получаемых из (9) дифференцированием, составим левые части равенств (7). Будем иметь

$$\varphi(t) + (t-\bar{t})\overline{\varphi'(t)} + \overline{\chi(t)} = \bar{c}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k' t^k$$

$$\alpha\varphi(\bar{t}) + \beta\overline{\chi(t)} + \gamma\bar{\chi}(t) + \gamma(t-\bar{t})\chi'(\bar{t}) = \alpha\bar{c}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k t^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k'' t^k$$

$$(t = e^{i\vartheta}, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi) \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
&\Omega_k' = \bar{c}_k + k\bar{a}_k - (k-2)\bar{a}_{k-2} \\
&\Omega_k'' = \alpha a_k + \beta\bar{c}_k + \gamma[kc_k - (k-2)c_{k-2}]
\end{aligned} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{11}$$

В выражениях (11) при $k = 1$ член, содержащий множителем $k-2$, следует опустить. В дальнейшем понадобятся следующие очевидные равенства, получаемые почленным интегрированием соответствующих сумм:

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^\pi\left\{\sum_{k=1}^\infty \lambda_k t^k\right\} t^{-n-1}dt = \lambda_n + \frac{1}{\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{k-n}-1}{k-n}\lambda_k \qquad (n \geqslant 0)$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^\pi\left\{\sum_{k=1}^\infty \lambda_k t^{-k}\right\} t^{-n-1}dt = \lambda_{-n} - \frac{1}{\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{k+n}-1}{k+n}\lambda_k \qquad (n \leqslant 0) \tag{12}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^\pi t^{-n-1}dt = \begin{cases}[1-(-1)^n]/\pi i n & (n \neq 0)\\ 1 & (n=0)\end{cases}$$

Введем, далее, функцию $g(t)$, определенную на единичной окружности так:

$$g(t) = f(t) \quad \text{на } \gamma_1, \qquad g(t) = (1+\alpha) f(t) \quad \text{на } \gamma_2 \tag{13}$$

Положим

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k t^k, \qquad A_k = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} g(t)\, t^{-k-1}dt \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{14}$$

Подставляя предыдущие ряды в (7) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t^n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, получим на основании (12)

$$(1 + {}^1\!/_2\,\alpha)\,\bar{c}_0 - \frac{\gamma}{2\pi i}\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k-1}{k}\bar{c}_k + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^\infty\frac{(-1)^k-1}{k}\Omega_k'' = A_0$$

$$\Omega_n' + {}^1\!/_2\,\Omega_n'' + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{(-1)^{k-n}-1}{k-n}\Omega_k'' - \frac{\gamma}{2\pi i}\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+n}-1}{k+n}\bar{c}_k -$$

$$- \frac{\alpha}{2\pi i}\frac{(-1)^n-1}{n}\bar{c}_0 = A_n$$

$$\alpha_n + {}^1\!/_2\,\gamma\bar{c}_n - \frac{\gamma}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{(-1)^{k-n}-1}{k-n}\bar{c}_k + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^\infty\frac{(-1)^{k+n}-1}{k+n}\Omega_k'' +$$

$$+ \frac{\alpha}{2\pi i}\frac{(-1)^n-1}{n}\bar{c}_0 = A_{-n} \tag{15}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Совокупность равенств (15) представляет бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений (9). При частных значениях упругих характеристик сред, например при $\alpha = 0$, когда упругие постоянные связаны соотношением $\mu_1\varkappa_2 = \mu_2\varkappa_1$, из (15) можно при помощи элементарных операций исключить все a_k $(k = 1, 2, \ldots)$ и получить систему, содержащую лишь неизвестные c_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. В общем же случае, при произвольных упругих характеристиках добиваться разбиения системы нецелесообразно.

Для вычислений приходится иметь дело с укороченной системой получаемой из (15) для некоторого $n = N$.

Для обозначения неизвестных воспользуемся единой символикой

$$x_{2n} = c_n \quad (n = 0, 1, \ldots), \qquad x_{2n-1} = a_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{16}$$

и запишем укороченную систему в виде

$$(1 + \alpha/2)\,\bar{x}_0 - \gamma\sum_{k=1}^N \delta_k \bar{x}_{2k} + \sum_{k=1}^N \delta_k \Omega_{2k-1} = A_0$$

$$\Omega_{2n} + \frac{1}{2}\Omega_{2n-1} + \sum_{k=1}^{N}{}'\delta_{k-n}\Omega_{2k-1} - \gamma\sum_{k=1}^N \delta_{k+n}\bar{x}_{2n} - \alpha\delta_n\bar{x}_0 = A_n$$

$$x_{2n-1} + \frac{\gamma}{2}\bar{x}_{2n} - \gamma\sum_{k=1}^{N}{}'\delta_{k-n}\bar{x}_{2k} + \sum_{k=1}^N \delta_{k+n}\Omega_{2k+1} + \alpha\delta_n\bar{x}_0 = A_{-n} \tag{17}$$

$$(n = 1, \ldots, N)$$

где

$$\delta_\nu = \frac{(-1)^\nu - 1}{2\pi i\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{2k} &= \bar{x}_{2k} + k\bar{x}_{2k-1} - (k-2)\,\bar{x}_{2k-5} \\ \Omega_{2k-1} &= \alpha x_{2k-1} + \beta \bar{x}_{2k} + \gamma\,[kx_{2k} - (k-2)\,x_{2k-4}] \end{aligned} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Решая (15), можем по приведенным выше формулам определить обе пары потенциалов Колосова — Мусхелишвили и, следовательно, найти все искомые величины нашей задачи. В частности, представляющая практический интерес сумма нормальных напряжений на контуре отверстия будет даваться формулой (предполагается, что на бесконечности усилий не приложено)

на $\gamma_1\ (\pi \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi)$

$$\sigma_r + \sigma_\vartheta = -4 \sum_{k=1}^{\infty} k\,[x_{2k-1}' \cos(k+1)\,\vartheta + x_{2k-1}'' \sin(k+1)\,\vartheta]$$

на $\gamma_2\ (0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi)$

$$\sigma_r + \sigma_\vartheta = -4 \sum_{k=1}^{\infty} k\left[\left(\frac{x_{2k-1}'}{1+\alpha} + \delta x_{2k}'\right)\cos(k+1)\,\vartheta + \left(\frac{x_{2k-1}''}{1+\alpha} - \delta x_{2k}''\right)\sin(k+1)\,\vartheta\right] \qquad (18)$$

$$x_k = x_k' + ix_k'' \qquad (k = 0, 1, \ldots), \qquad \delta = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1(1+\varkappa_2)}$$

Теоретическим обоснованием метода заниматься здесь не будем. Ниже ограничимся иллюстрацией схемы расчета на примере неоднородной пластинки с отверстием, растягиваемой на бесконечности равномерными усилиями в направлении оси x.

Обозначая растягивающее усилие через p, будем иметь в нашем случае

$$f(t) = {}^1/_2\, p\,(t^{-1} - t) \qquad (t = e^{i\vartheta},\ 0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi) \qquad (19)$$

Для коэффицентов Фурье функции $g(t)$, определяемой формулой (13), имеем

$$A_1 = -\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)\frac{p}{2}, \qquad A_{-1} = \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)\frac{p}{2}, \qquad A_n = \frac{\alpha}{2\pi i}\,\frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^2 - 1}\,p \qquad (20)$$

$$(n = 0,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots)$$

Численные расчеты будем вести при одинаковых коэффициентах Пуассона, когда $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa$. Тогда фигурирующие выше постоянные α, β, ... можно выразить через $\varkappa$ и отношение модулей упругости λ следующим образом:

$$\alpha = \frac{\varkappa(1-\lambda)}{1+\lambda\varkappa}, \quad \beta = \frac{(\varkappa-1)(1-\lambda)}{1+\lambda\varkappa}, \quad \gamma = \frac{1-\lambda}{1+\lambda\varkappa}, \quad \delta = \frac{1-\lambda}{1+\varkappa} \qquad \left(\lambda = \frac{E_2}{E_1}\right) \qquad (21)$$

Укороченная система (17) была запрограммирована и решена на БЭСМ-2 Д. П. Вахтангадзе для различных значений параметра λ при $\varkappa = 2$ (коэффициент Пуассона для обеих сред принимался равным 0.25). Как показали вычисления, краевые условия задачи (7) удовлетворяются с приемлемой точностью уже при $N = 8$, что равносильно рассмотрению системы из 34 действительных уравнений. Здесь справа приведем значения коэффициентов k_1, k_2 концентрации напряжений

$$k = p^{-1} \max(\sigma_r + \sigma_\vartheta)$$

на нижней и верхней полуокружностях

$\lambda =$	0.25	0.50	0.75
$k_1 =$	3.5925	3.2854	3.1041
$k_2 =$	2.5885	2.7605	2.8952

Напомним, что для однородного случая ($\lambda = 1$) как известно $k_1 = k_2 = 3$.

Поступила 18 1 1965

Вычислительный центр
АН Грузинской ССР