РАВНОВЕСНАЯ ТРЕЩИНА В СЛОЕ МАЛОЙ ТОЛЩИНЫ

В. М. Александров, Б. И. Сметанин

(Ростов-на-Дону)

Рассматриваются плоская и осесимметричная задачи о равновесной трещине в слое малой толщины, зажатом между двумя гладкими, жесткими основаниями; трещина расположена симметрично относительно граней слоя и поддерживается в раскрытом состоянии усилиями, приложенными к ее поверхности.

Получены формулы, определяющие форму трещины и ее продольные размеры.

Отметим, что задача о трещине в слое рассматривалась ранее только для слоя большой толщины [1,2], что не требовало использования сложного математического аппарата. При решении указанной задачи для слоя малой толщины используется метод, изложенный в работах [3,4] и математический аппарат метода Винера — Хопфа [5]. Продольные размеры трещины определяются по методу работы [6].

§ 1. Плоская задача о равновесной трещине в полосе малой толщины. Пусть в упругой полосе малой толщины $2h$, зажатой между двумя гладкими жесткими основаниями, возникла продольная трещина, поддерживаемая в раскрытом состоянии нормальными усилиями $q(x)$, приложенными к ее поверхности. Вся система усилий статически эквивалентна нулю. Трещина расположена симметрично относительно граней полосы. Требуется определить форму трещины $\gamma(x)$ и ее полудлину a в зависимости от величины усилий $q(x)$.

Методами операционного исчисления рассматриваемая задача может быть приведена к определению функции $\gamma(x)$ из следующего интегрального уравнения [1]:

$$\int_{-a}^{a} \gamma(\xi)\, M\left(\frac{\xi - x}{h}\right) d\xi = -\frac{\pi h^2}{\Delta}\, q(x), \qquad |x| \leqslant a \qquad \left(\Delta = \frac{E}{2(1-\sigma^2)}\right) \tag{1.1}$$

Здесь величины E и σ — упругие постоянные полосы,

$$M(t) = -\int_0^\infty uL(u)\cos(ut)\,du \left(t = \frac{\xi - x}{h}\right), \quad L(u) = \frac{\operatorname{sh} 2u + 2u}{\operatorname{ch} 2u - 1} \tag{1.2}$$

Найдем $K(t)$, удовлетворяющую условию

$$-K_t'(t) = M(t) \tag{1.3}$$

С точностью до постоянной получим

$$K(t) = \int_0^\infty L(u)\sin(ut)\,du \tag{1.4}$$

Подставив теперь $M(t)$ в форме (1.2) в уравнение (1.1) и проинтегрировав один раз по частям, получим

$$\int_{-a}^{a} \gamma'(\xi)\, K\left(\frac{\xi - x}{h}\right) d\xi = -\frac{\pi h q(x)}{\Delta} \tag{1.5}$$

Заметим, что внеинтегральный член пропадает в силу очевидного условия $\gamma(\pm a) = 0$.

Следуя работе [3], получим асимптотическое решение уравнения (1.5) при малых значениях параметра $\lambda = h / a$, как комбинацию

$$\gamma'(\xi) = \omega\left(\frac{a+\xi}{h}\right) - \omega\left(\frac{a-\xi}{h}\right) \tag{1.6}$$

решений $\omega(t)$ интегрального уравнения Винера — Хопфа вида

$$\int_0^\infty \omega(\tau)\, K(\tau - t)\, d\tau = -\frac{\pi\psi(t)}{\Delta} \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{1.7}$$

---

[1] Ядро $M(t)$ понимается в смысле обобщенных функций.

Здесь функция $\psi(t) = q(ht - a)$, причем функция $\psi(t)$ аналитически продолжается в область $2/\lambda \leqslant t < \infty$.

Решение уравнения (1.7) может быть получено в замкнутом виде методом Винера—Хопфа. Однако, чтобы получить решение, пригодное для практического использования, приходится прибегать к аппроксимации функции $L(u)$ подходящим выражением с целью проведения приближенной факторизации [5].

Аппроксимируем, например, функцию $L(u)$ выражением

$$L(u) = \frac{u^2 + 2D}{u\sqrt{u^2 + D^2}} \tag{1.8}$$

Легко видеть, что аппроксимация (1.8) верно отражает поведение функции $L(u)$ вида (1.2) в нуле и на бесконечности. При значении $D = 0.64$ погрешность аппроксимации (1.8) не превосходит 8% при всех $0 \leqslant u < \infty$.

Далее ограничимся рассмотрением случая, когда $q(x) = q$ ($q = \text{const}$), т. е. трещина распирается равномерным внутренним давлением. В этом случае решение интегрального уравнения (1.7) при аппроксимации (1.8) дается соотношением

$$\omega(t) = \frac{q}{\Delta\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{e^{-Dt}}{\sqrt{t}} - 2\left(\sqrt{2D} - D\right)^{1/2} e^{-\sqrt{2D}\,t} F\left[\left(\sqrt{2D} - D\right)^{1/2}\sqrt{t}\right]\right\} \quad \left(F(z) = \int_0^z e^{u^2}\,du\right) \tag{1.9}$$

Таблицы функции $F(z)$ имеются в [7].

Выражение для $\gamma(x)$ с учетом $\gamma(\pm a) = 0$ и (1.6) имеет вид

$$\gamma(x) = \int_x^a \left[\omega\left(\frac{a-\xi}{h}\right) - \omega\left(\frac{a+\xi}{h}\right)\right] d\xi \tag{1.10}$$

Подставляя $\omega(t)$ в форме (1.9) и интегрируя, окончательно получим

$$\gamma(x) = \frac{qh}{2\Delta}\Big\{\operatorname{erf}\varphi(x) + \operatorname{erf}\varphi(-x) - \operatorname{erf}\varphi(a) + \frac{2A}{\sqrt{\pi}}\left[\exp\left(-B\varphi^2(x)\right) F\left(A\varphi(x)\right) + \right.$$
$$\left. + \exp\left(-B\varphi^2(-x)\right) F\left(-A\sqrt{\varphi(-x)}\right) - \exp\left(-B\varphi^2(a)\right) F\left(A\varphi(a)\right)\right]\Big\} \tag{1.11}$$

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{D(a+x)}}{\sqrt{h}}, \qquad A = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{D}} - 1\right)^{1/2}, \qquad B = \left(\frac{2}{D}\right)^{1/2} \tag{1.12}$$

Отметим, что $\gamma(x)$ в виде (1.12) не отражает формы трещины в малой окрестности ее концов [6].

Легко видеть из формулы (1.12), что при очень малых значениях параметра $\lambda = h/a$ функция $\gamma(x)$, определяющая форму трещины, стремится к вырожденному значению

$$\gamma_0(x) = qh/2\Delta \tag{1.13}$$

Предполагая трещину равновесной, приступим теперь к определению ее полудлины a, используя для этого методику, данную в работе [6].

Коэффициент интенсивности нормальных напряжений $\sigma_y(x, 0) = p(x)$ при $x > a$ без учета сил сцепления определим по формуле

$$N_0 = \lim_{x\to a}\sqrt{x-a}\,p(x), \qquad p(x) = \frac{\Delta}{\pi h}\int_{-a}^{a}\gamma'(\xi)\,K\left(\frac{\xi - x}{h}\right)d\xi \tag{1.14}$$

Представим функции $\gamma'(\xi)$ и $K(t)$ в виде

$$\gamma'(\xi) = -\frac{q}{\Delta\sqrt{2\pi}}\left(\frac{h}{a-\xi}\right)^{1/2} + f(\xi), \qquad K(t) = \frac{1}{t} + E(t) \tag{1.15}$$

Можно показать, что

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x-a}\int_{-a}^{a}\left[\gamma'(\xi)\,E\left(\frac{\xi - x}{h}\right) + \frac{hf(\xi)}{\xi - x}\right]d\xi \to 0 \tag{1.16}$$

Тогда

$$N_0 = -\frac{q\sqrt{h}}{\pi\sqrt{2\pi}} \lim_{x\to a} \sqrt{x-a} \int_{-a}^{a} \frac{d\xi}{\sqrt{a-\xi}\,(\xi - x)} \tag{1.17}$$

Вычисляя интеграл, окончательно получим

$$N_0 = \frac{q\sqrt{h}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{P\sqrt{h}}{2a\sqrt{2\pi}} \qquad (P = 2qa) \tag{1.18}$$

Здесь P — суммарное усилие, действующее на берег трещины.

Теперь, следуя [6], получим следующую формулу для определения полудлины равновесной трещины a:

$$N_0 = \frac{K}{\pi}, \quad \text{или} \quad a = \frac{P^2\pi\lambda}{8K^2} \tag{1.19}$$

Здесь K — модуль сцепления, введенный Г. И. Баренблаттом [6]. Из формулы (1.19) легко видеть, что при уменьшении относительной толщины полосы λ пропорционально уменьшается полудлина трещины a при неизменном суммарном усилии P.

Как показали проведенные вычисления, полученные формулы (1.11) и (1.19) можно с надежностью использовать при $\lambda \leqslant 2$.

§ 2. Осесимметричная задача о равновесной трещине в слое малой толщины. Пусть в упругом слое малой толщины $2h$, зажатом между двумя гладкими жесткими основаниями, возникла продольная круглая в плане трещина, поддерживаемая в раскрытом состоянии нормальными усилиями $q(r)$, приложенными к ее поверхности. Вся система усилий статически эквивалентна нулю. Трещина расположена симметрично относительно граней слоя.

Требуется определить форму трещины $\gamma(r)$ и ее радиус a в зависимости от величины усилий $q(r)$.

Уравнение области, занимаемой трещиной, очевидно, дается соотношением

$$x^2 + y^2 \leqslant a^2 \tag{2.1}$$

Введем новые переменные по формулам [4]

$$t = (a - x)/h, \qquad \tau = y/h \tag{2.2}$$

Подставляя в (2.1) и устремляя $\lambda = h/a$ к нулю, получим

$$t \geqslant 0 \tag{2.3}$$

Это означает, что в случае малой относительной толщины слоя λ круглая трещина асимптотически разворачивается в трещину, занимающую полуплоскость $t \geqslant 0$.

Решение последней задачи, очевидно, дается соотношением [4]

$$\gamma_*(t) = h\int_0^t \omega(\xi)\,d\xi \tag{2.4}$$

где $\omega(t)$ — решение интегрального уравнения Винера—Хопфа (1.7), в котором $\psi(t) = q(a - ht)$, причем функция $\psi(t)$ аналитически продолжается в область $2/\lambda \leqslant t < \infty$.

Учитывая осевую симметрию задачи и возвращаясь к старым переменным, получим

$$\gamma(r) = \gamma_*\left(\frac{a-r}{h}\right) \tag{2.5}$$

Условия для определения радиуса трещины a также получим из решения задачи о трещине в виде полуплоскости.

Рассмотрим, например, случай $q(r) = q$. На основании вышесказанного из формулы (1.11) сразу найдем

$$\gamma(r) = \frac{qh}{2\Delta}\left\{\operatorname{erf}\varphi(-r) + \frac{2A}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-B\varphi^2(-r)\right)F\left(A\,\varphi(-r)\right)\right\} \tag{2.6}$$

Здесь φ, A, B определены (1.12).

Коэффициент интенсивности нормальных напряжений по-прежнему дается формулой (1.18)

$$N_0 = \frac{q\sqrt{h}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{P\sqrt{h}}{\pi a^2\sqrt{2\pi}} \qquad (P = q\pi a^2) \tag{2.7}$$

Здесь P — суммарное усилие, действующее на берег трещины. Тогда условие для определения радиуса равновесной трещины a получим в виде

$$a = \left(\frac{P\sqrt{\lambda}}{K\sqrt{2\pi}}\right)^{2/3} \tag{2.8}$$

Из формулы (2.8) видно, что при уменьшении относительной толщины слоя λ радиус трещины a уменьшается значительно медленнее.

Как показали проведенные вычисления, полученные формулы (2.6) и (2.8) можно с надежностью использовать при $\lambda \leqslant 2$.

Поступила 18 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркузон И. А. Равновесные трещины в полосе конечной ширины. ПМТФ, 1963, № 5.
2. Александров В. М. К теории равновесных трещин в упругом слое. Тр. I Всесоюзн. симпозиума по концентрации напряжений. Киев, 1965.
3. Александров В. М. К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
4. Александров В. М. К решению одного типа двумерных интегральных уравнений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
5. Нобл Б. Метод Винера — Хопфа. Изд. иностр. лит., 1962.
6. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.
7. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Физматгиз, 1959.

О НАПРЯЖЕНИЯХ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

А. И. Каландия (Тбилиси)

Излагается схема эффективного решения задачи о напряжениях в бесконечной кусочно-однородной среде, ослабленной круговым отверстием. При помощи аналитического продолжения потенциалов Колосова — Мусхелишвили задача приводится к виду, позволяющему непосредственное применение для решения степенных рядов. Для коэффициентов разложения строится бесконечная система линейных алгебраических уравнений, которая решается численно, при конкретных упругих характеристиках материалов, в случае одностороннего растяжения пластинки.

Представим себе сплошную бесконечную пластинку, составленную из двух, различных по упругим свойствам материалов, спаянных между собой вдоль общей прямолинейной границы. Пусть одно из составляющих тел с упругими характеристиками, скажем λ_1, μ_1, заполняет нижнюю полуплоскость плоскости переменной $z = x + iy$, а другое, с характеристиками λ_2, μ_2 — верхнюю полуплоскость. Предположим, далее, что рассматриваемая кусочно-однородная среда ослаблена вырезом круговой формы и подвержена действию внешних усилий, приложенных на обводе и на бесконечности. Радиус отверстия примем равным единице и расположим его центр в начале координат. Тогда линией раздела сред будет служить действительная ось x с выброшенным отрезком $(-1,1)$. Эту линию обозначим через L. Через S^- и S^+ обозначим, далее, нижнюю и верхнюю полуплоскости с выброшенными полукругами, а через γ_1 и γ_2 — нижнюю и верхнюю полуокружности соответственно.

Искомым комплексным потенциалам φ и ψ, голоморфным соответственно в S^- и S^+, будем приписывать те же индексы, что и упругим постоянным. Имеем следующую граничную задачу:

$$\begin{aligned} &\varphi_1(t) + (t - \bar{t})\,\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\chi_1(t)} = f(t) \quad \text{на } \gamma_1 \\ &\varphi_2(t) + (t - \bar{t})\,\overline{\varphi_2'(t)} + \overline{\chi_2(t)} = f(t) \quad \text{на } \gamma_2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(t) + \overline{\chi_1(t)} = \varphi_2(t) + \overline{\chi_2(t)} \\ &\lambda\,[\varkappa_1, \varphi_1(t) - \overline{\chi_1(t)}] = \varkappa_2\varphi_2(t) - \overline{\chi_2(t)} \end{aligned}\right\} \text{ на } L \tag{2}$$