МЕТОДЫ УТОЧНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА И РАСТЯЖЕНИЯ ПЛАСТИНОК

А. В. Колос (Луганск)

Излагаются наиболее простые способы уточнения классической теории вытекающие из асимптотического подхода к построению двумерных уравнений изгиба и растяжения пластин, предложенного в работах [1,2].

В работах [1–5] было показано, что уравнения и граничные условия классической теории совпадают с уравнениями и граничными условиями нулевого приближения основного итерационного процесса. Здесь показывается, что для уточнения (в членах того же порядка, что и основные напряжения классической теории) напряженного состояния на краю пластинки надо на напряженное состояние, определяемое классической теорией, наложить напряженные состояния краевого скручивания и краевой плоской деформации. Показывается также, что для уточнения результатов, даваемых классической теории вдали от края (построения приближенной теории, погрешность которой для напряжений имеет порядок h^2, а не h, по сравнению с h°) надо сохранить уравнения классической теории, а в граничные условия ее внести некоторые изменения. Формулируется вид новых граничных условий для свободного, шарнирно опертого и жестко защемленного краев.

1. Срединную плоскость пластинки отнесем к ортогональным криволинейным координатам α, β, координату γ будем отсчитывать от срединной плоскости по нормали к ней. Будут использоваться вспомогательные переменные

$$\zeta = \frac{z}{h}, \qquad \xi = \frac{1}{h}\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{H_\alpha} \tag{1.1}$$

Предполагается, что край пластинки совпадет с координатной линией $\alpha = \alpha_0$ ($\xi = 0$) и что эта линия не имеет угловых точек. Будут рассматриваться, как и в работе [2], симметричная задача (соответствующая растяжению) и обратно симметричная задача (соответствующая изгибу).

Условия на верхней и нижней плоскостях пластинки имеют вид:

для обратно симметричной задачи

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \pm {}^1/_2\, p(\alpha, \beta), \qquad \sigma_{\alpha\gamma} = {}^1/_2 h^{-1} p_\alpha(\alpha, \beta) \quad (\alpha\beta) \quad \text{при } \zeta = \pm 1$$

для симметричной задачи

$$\sigma_{\gamma\gamma} = {}^1/_2 q(\alpha, \beta), \qquad \sigma_{\alpha\gamma} = \pm {}^1/_2\, h^{-1} q_\alpha(\alpha, \beta) \quad (\alpha\beta) \quad \text{при } \zeta = \pm 1$$

(Здесь и в дальнейшем символ ($\alpha\beta$) означает, что существует второе соотношение, которое получается из приведенного заменой α на β, и наоборот.)

Как было показано в работах [1,2], а также (для случая свободного края) в работах других авторов [4,5], асимптотический метод построения двумерных уравнений теории тонких упругих пластинок сводится к построению двух видов напряженных состояний (основного и краевого), каждое из которых строится при помощи соответствующего итерационного процесса. (В зарубежной литературе [4,5] в связи с этим вводятся понятия о внутренней задаче и задаче пограничного слоя.) В соответствии с этим любое из напряжений или перемещений (Q) полного напряженного состояния пластинки определяется формулой

$$Q = h^{-q_1} \sum_{s=0}^{S} h^s Q^{(s)} + h^{-q_2} \sum_{s=0}^{S} h^s \left[Q_{(1)}{}^{(s)} + Q_{(2)}{}^{(s)} \right] \tag{1.2}$$

Первое слагаемое в (1.2) представляет напряженное состояние, названное в [1] основным напряженным состоянием, которое распространяется на всю пластинку и определяется при помощи основного итерационного процесса. Число q_1 принимает такие значения:

$$\begin{gathered} q_1 = 2 \quad \text{для } \sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\beta\beta}, \qquad q_1 = 1 \quad \text{для } \sigma_{\alpha\gamma}, \sigma_{\beta\gamma} \\ q_1 = 0 \quad \text{для } \sigma_{\gamma\gamma}, \qquad q_1 = 2 \text{ для } \quad u_\alpha, u_\beta \end{gathered} \tag{1.3}$$

$q_1 = 1$ для W в симметричной задаче

$q_1 = 3$ для W в обратно симметричной задаче.

Напряжения и перемещения основного напряженного состояния представляются в виде полиномов по ζ, причем степени этих полиномов возрастают с возрастанием числа приближений. Для первых двух приближений зависимость напряжений и перемещений от переменной ζ определяется формулами

в симметричной задаче

$$W^{(i)} = \zeta w^{(i)}(\alpha, \beta), \qquad u_\alpha^{(i)} = v_\alpha^{(i)}(\alpha, \beta) \ (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\alpha\alpha}^{(i)} = \tau_{\alpha\alpha}^{(i)}(\alpha, \beta) \ (\alpha\beta) \tag{1.4}$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(i)} = \tau_{\alpha\beta}^{(i)}(\alpha, \beta), \qquad \sigma_{\alpha\gamma}^{(i)} = \zeta\tau_{\alpha\gamma}^{(i)}(\alpha, \beta) \ (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\gamma\gamma}^{(i)} = S_{\gamma\gamma}^{(i)}(\alpha, \beta) + {}^1\!/_2\zeta^2\tau_{\gamma\gamma}^{(i)}(\alpha, \beta)$$

$$Ew^{(i)} = -\nu(\tau_{\alpha\alpha}^{(i)} + \tau_{\beta\beta}^{(i)})$$

в обратно симметричной задаче

$$W^{(i)} = w^{(i)}(\alpha, \beta), \qquad u_\alpha^{(i)} = \zeta v_\alpha^{(i)}(\alpha, \beta) \ (\alpha\beta), \qquad \sigma_{\alpha\alpha}^{(i)} = \zeta\tau_{\alpha\alpha}^{(i)}(\alpha, \beta) \ (\alpha\beta)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(i)} = \zeta\tau_{\alpha\beta}^{(i)}(\alpha, \beta), \qquad \sigma_{\alpha\gamma}^{(i)} = S_{\alpha\gamma}^{(i)}(\alpha, \beta) + \zeta^2\tau_{\alpha\gamma}^{(i)}(\alpha, \beta) \ (\alpha\beta) \tag{1.5}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(i)} = \zeta S_{\gamma\gamma}^{(i)}(\alpha, \beta) + \zeta^3\tau_{\gamma\gamma}^{(i)}(\alpha, \beta); \qquad v_\alpha^{(i)} = -H_\alpha \frac{\partial w^{(i)}}{\partial\alpha} \ (\alpha\beta)$$

$$W^{(2)} = w^{(2)}(\alpha, \beta) - \frac{\nu}{2E}\zeta^2(\tau_{\alpha\alpha}^{(0)} + \tau_{\beta\beta}^{(0)}) \quad (i = 0, 1)$$

Уравнения для определения коэффициентов этих полиномов в каждом приближении аналогичны уравнениям классической теории [2]. Для нулевого приближения они эквивалентны уравнениям классической теории и могут быть сведены к неоднородному бигармоническому уравнению. Для первого приближения они сводятся к однородному бигармоническому уравнению. Таким образом, эти коэффициенты будут полностью определены, если в каждом приближении они будут подчинены двум граничным условиям на контуре $\alpha = \alpha_0$.

Второе слагаемое в (1.2) представляет краевое напряженное состояние, быстро затухающее при удалении от края, которое определяется при помощи вспомогательного итерационного процесса [2]. Число q_2 принимает следующие значения:

$$q_2 = 2 \quad \text{для } \sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha\gamma}, \sigma_{\beta\beta}, \sigma_{\beta\gamma}, \sigma_{\gamma\gamma}, \quad q_2 = 1 \quad \text{для } u_\alpha, u_\beta, W \tag{1.6}$$

Вспомогательный итерационный процесс состоит в повторном интегрировании систем уравнений краевого скручивания и краевой плоской деформации, полученных в работе [2]. Для $s = 0, 1, 2$, используя (1.1) и разложения H_α, H_β, k_β в ряд Тейлора в окрестности $\alpha = \alpha_0$ и ограничиваясь первыми двумя членами этих разложений, уравнения можно записать в виде

$$\frac{\partial\bar\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\bar\sigma_{\beta\gamma}^{(s)}}{\partial\zeta} = -H_{\beta 0}\frac{\partial\bar\sigma_{\beta\beta}^{(s-1)}}{\partial\beta} + k_{\beta 0}H_{\beta 0}\xi\frac{\partial\bar\sigma_{\beta\beta}^{(s-2)}}{\partial\beta} - 2k_{\beta 0}\bar\sigma_{\alpha\beta}^{(s-1)} + 2k_{\beta 0}^2\xi\bar\sigma_{\alpha\beta}^{(s-2)}$$

$$E\frac{\partial\bar u_\beta^{(s)}}{\partial\xi} - 2(1+\nu)\bar\sigma_{\alpha\beta}^{(s)} = -E\left[H_{\beta 0}\frac{\partial\bar u_\alpha^{(s-1)}}{\partial\beta} - k_{\beta 0}H_{\beta 0}\xi\frac{\partial\bar u_\alpha^{(s-2)}}{\partial\beta} - \right.$$

$$\left. - k_{\beta 0}\bar u_\beta^{(s-1)} + k_{\beta 0}^2\xi\bar u_\beta^{(s-2)}\right]$$

$$E\frac{\partial\bar u_\beta^{(s)}}{\partial\zeta} - 2(1+\nu)\bar\sigma_{\beta\gamma}^{(s)} = -E\left[H_{\beta 0}\frac{\partial\overline{W}^{(s-1)}}{\partial\beta} - k_{\beta 0}H_{\beta 0}\xi\frac{\partial\overline{W}^{(s-2)}}{\partial\beta}\right] \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial\bar\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\bar\sigma_{\alpha\gamma}^{(s-1)}}{\partial\zeta} = -H_{\beta 0}\frac{\partial\bar\sigma_{\alpha\beta}^{(s-1)}}{\partial\beta} + k_{\beta 0}H_{\beta 0}\xi\frac{\partial\bar\sigma_{\alpha\beta}^{(s-2)}}{\partial\beta} - k_{\beta 0}(\bar\sigma_{\alpha\alpha}^{(s-1)} - \bar\sigma_{\beta\beta}^{(s-1)}) +$$

$$+ k_{\beta 0}^2\xi(\bar\sigma_{\alpha\alpha}^{(s-2)} - \bar\sigma_{\beta\beta}^{(s-2)})$$

$$\frac{\partial\bar\sigma_{\alpha\gamma}^{(s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\bar\sigma_{\gamma\gamma}^{(s)}}{\partial\zeta} = -H_{\beta 0}\frac{\partial\bar\sigma_{\beta\gamma}^{(s-1)}}{\partial\beta} + k_{\beta 0}H_{\beta 0}\xi\frac{\partial\bar\sigma_{\beta\gamma}^{(s-2)}}{\partial\beta} - k_{\beta 0}\bar\sigma_{\alpha\gamma}^{(s-1)} + k_{\beta 0}^2\xi\bar\sigma_{\alpha\gamma}^{(s-2)}$$

$$E\frac{\partial\bar u_\alpha^{(s)}}{\partial\xi} - [\bar\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} - \nu(\bar\sigma_{\beta\beta}^{(s)} + \bar\sigma_{\gamma\gamma}^{(s)})] = 0 \tag{1.8}$$

$$E\frac{\partial \overline{W}}{\partial \zeta}-[\bar{\sigma}_{\gamma\gamma}^{(s)}-\nu(\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}^{(s)}+\bar{\sigma}_{\beta\beta}^{(s)})]=0, \qquad E\left(\frac{\partial \overline{W}^{(s)}}{\partial \xi}+\frac{\partial u_{\alpha}^{(s)}}{\partial \zeta}\right)-2(1+\nu)\bar{\sigma}_{\alpha\gamma}^{(s)}=0$$

$$\sigma_{\beta\beta}^{(s)}-\nu(\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)}+\sigma_{\gamma\gamma}^{(s)})=E\left[H_{\beta 0}\frac{\partial u_{\beta}^{(s-1)}}{\partial \beta}-k_{\beta 0}H_{\beta 0}\xi\frac{\partial \bar{u}_{\beta}^{(s-2)}}{\partial \beta}+k_{\beta 0}u_{\alpha}^{(s-1)}-k_{\beta 0}^{2}\xi u_{\alpha}^{(s-2)}\right]$$

Здесь $H_{\beta 0}=H_{\beta}\,|_{\alpha=\alpha_0}$, а $k_{\beta 0}=k_{\beta}\,|_{\alpha=\alpha_0}$ — кривизна края $\alpha=\alpha_0$. Любое из напряжений и перемещений определяется в виде

$$\overline{Q}^{(t)}=Q_{(1)}{}^{(t)}+Q_{(2)}{}^{(t)} \tag{1.9}$$

и полагается, что

$$\overline{Q}^{(t)}=Q_{(1)}{}^{(t)}=Q_{(2)}{}^{(t)}\equiv 0 \qquad \text{при } t<0 \tag{1.10}$$

Величины $Q_{(1)}{}^{(t)}$ и $Q_{(2)}{}^{(t)}$ определяются так, что (1.11)

$$\sigma_{\alpha\alpha\,(1)}^{(0)}=\sigma_{\alpha\gamma\,(1)}^{(0)}=\sigma_{\beta\beta\,(1)}^{(0)}=\sigma_{\gamma\gamma\,(1)}^{(0)}=u_{\alpha\,(1)}^{(0)}=W_{(1)}{}^{(0)}\equiv 0, \qquad \sigma_{\alpha\beta\,(2)}^{(0)}=\sigma_{\beta\gamma\,(2)}^{(0)}=u_{\beta\,(2)}^{(0)}\equiv 0$$

Тогда, приписывая в (1.7) и (1.8) всем величинам дополнительные индексы (1) или (2) внизу, получим систему для определения $Q_{(1)}^{(s)}$ (или $Q_{(2)}^{(s)}$ соответственно).

Системы (1.7) и (1.8) приводятся к гармоническому и бигармоническому уравнениям (по переменным ξ, ζ) соответственно. Они будут однородными при $s=0$ и неоднородными при $s>0$. Для обеих систем должны быть построены затухающие при $\xi\to-\infty$ решения в полуполосе $-1\leqslant\zeta\leqslant 1$, $\xi\leqslant 0$, удовлетворяющие следующим условиям:

для (1.7)

$$\bar{\sigma}_{\beta\gamma}^{(s)}\equiv\sigma_{\beta\gamma\,(1)}^{(s)}+\sigma_{\beta\gamma\,(2)}^{(s)}=0 \qquad \text{при } \zeta=\pm 1 \tag{1.12}$$

для (1.8)

$$\bar{\sigma}_{\alpha\gamma}^{(s)}\equiv\sigma_{\alpha\gamma\,(1)}^{(s)}+\sigma_{\alpha\gamma\,(2)}^{(s)}=0, \qquad \bar{\sigma}_{\gamma\gamma}^{(s)}\equiv\sigma_{\gamma\gamma\,(1)}^{(s)}+\sigma_{\gamma\gamma\,(2)}^{(s)}=0 \qquad \text{при } \zeta=\pm 1 \tag{1.13}$$

Условия существования затухающих решений систем (1.7) и (1.8) записываются так [2]:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\zeta\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}^{(s)}|_{\xi=0}d\zeta=\int_{-\infty}^{0}d\xi\int_{-1}^{1}\Big\{\zeta\Big[-H_{\beta 0}\frac{\partial\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{(s-1)}}{\partial\beta}+k_{\beta 0}H_{\beta 0}\xi\frac{\partial\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{(s-2)}}{\partial\beta}-k_{\beta 0}(\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}^{(s-1)}-\bar{\sigma}_{\beta\beta}^{(s-1)})+\\+k_{\beta 0}^{2}\xi(\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{(s-2)}-\bar{\sigma}_{\beta\beta}^{(s-2)})\Big]-\xi\Big[-H_{\beta 0}\frac{\partial\bar{\sigma}_{\beta\gamma}^{(s-1)}}{\partial\beta}+k_{\beta 0}H_{\beta 0}\xi\frac{\partial\bar{\sigma}_{\beta\gamma}^{(s-2)}}{\partial\beta}-\\-k_{\beta 0}\bar{\sigma}_{\alpha\gamma}^{(s-1)}+k_{\beta 0}^{2}\xi\bar{\sigma}_{\alpha\gamma}^{(s-2)}\Big]\Big\}d\zeta\end{aligned}\tag{1.14}$$

$$\int_{-1}^{1}\bar{\sigma}_{\alpha\gamma}^{(s)}|_{\xi=0}\,d\zeta=\int_{-\infty}^{0}d\xi\int_{-1}^{1}\left[-H_{\beta 0}\frac{\partial\bar{\sigma}_{\beta\gamma}^{(s-1)}}{\partial\beta}+k_{\beta 0}H_{\beta 0}\xi\frac{\partial\bar{\sigma}_{\beta\gamma}^{(s-2)}}{\partial\beta}-k_{\beta 0}\bar{\sigma}_{\alpha\gamma}^{(s-1)}+k_{\beta 0}^{2}\xi\bar{\sigma}_{\alpha\gamma}^{(s-2)}\right]d\zeta$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}^{(s)}\,|_{\xi=0}d\zeta=\int_{-\infty}^{0}d\xi\int_{-1}^{1}\Big[-H_{\beta 0}\frac{\partial\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{(s-1)}}{\partial\beta}+k_{\beta 0}H_{\beta 0}\xi\frac{\partial\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{(s-2)}}{\partial\beta}-k_{\beta 0}(\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}^{(s-1)}-\bar{\sigma}_{\beta\beta}^{(s-1)})+\\+k_{\beta 0}^{2}\xi(\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}^{(s-2)}-\bar{\sigma}_{\beta\beta}^{(s-2)})\Big]d\zeta\end{aligned}\tag{1.15}$$

$$\int_{-1}^{1}\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{(s)}\,|_{\xi=0}d\zeta=\int_{-\infty}^{0}d\xi\int_{-1}^{1}\left[-H_{\beta 0}\frac{\partial\bar{\sigma}_{\beta\beta}^{(s-1)}}{\partial\beta}+k_{\beta 0}H_{\beta 0}\xi\frac{\partial\bar{\sigma}_{\beta\beta}^{(s-2)}}{\partial\beta}-2k_{\beta 0}\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{(s-1)}+2k_{\beta 0}^{2}\xi\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{(s-2)}\right]d\zeta$$

Условия (1.14) в обратно симметричной задаче и (1.15) в симметричной задаче дают по две последовательности граничных соотношений на краю $\alpha=\alpha_0$ ($\xi=0$)

для коэффициентов разложений (1.2). Из граничных условий на боковой поверхности

$$\sigma_{\alpha\alpha}=\sigma_{\alpha\beta}=\sigma_{\alpha\gamma}=0,\qquad \sigma_{\alpha\alpha}=\sigma_{\alpha\beta}=W=0,\qquad u_\alpha=u_\beta=W=0\quad \text{при } \alpha=\alpha_0$$

моделирующих соответственно свободный, шарнирно опертый и жестко защемленный края, получаем для каждого варианта края еще по три последовательности граничных соотношения для коэффициентов разложений (1.2). Они записываются так [2]:

при $\alpha=\alpha_0\,(\xi=0)$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)}+\sigma_{\alpha\alpha\,(1)}^{(s)}+\sigma_{\alpha\alpha\,(2)}^{(s)}=0,\quad \sigma_{\alpha\beta}^{(s)}+\sigma_{\alpha\beta\,(1)}^{(s)}+\sigma_{\alpha\beta\,(2)}^{(s)}=0,\quad \sigma_{\alpha\gamma}^{(s-1)}+\sigma_{\alpha\gamma\,(1)}^{(s)}+\sigma_{\alpha\gamma\,(2)}^{(s)}=0 \tag{1.16}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)}+\sigma_{\alpha\alpha\,(1)}^{(s)}+\sigma_{\alpha\alpha\,(2)}^{(s)}=0,\quad \sigma_{\alpha\beta}^{(s)}+\sigma_{\alpha\beta\,(1)}^{(s)}+\sigma_{\alpha\beta\,(2)}^{(s)}=0,\quad W^{(s)}+W_{(1)}^{(a)}+W_{(2)}^{(a)}=0 \tag{1.17}$$

$$u_\alpha^{(s)}+u_{\alpha\,(1)}^{(s-1)}+u_{\alpha\,(2)}^{(s-1)}=0,\quad u_\beta^{(s)}+u_{\beta\,(1)}^{(s-1)}+u_{\beta\,(2)}^{(s-1)}=0,\quad W^{(s)}+W_{(1)}^{(a)}+W_{(2)}^{(a)}=0 \tag{1.18}$$

где $a=s$ — для симметричной задачи и $a=s-2$ — для обратно симметричной задачи.

Произволы интегрирования уравнений основного и вспомогательного итерационных процессов должны быть использованы для выполнения граничных условий на $\alpha=\alpha_0$ ($\xi=0$). В работе [2] указывалось, что этих призволов достаточно для выполнения как условий (1.16) — (1.18), так и условий (1.14), (1.15).

Для упрощения изложения будем обозначать через $B^{(s)}$ функцию, к определению которой сводится в каждом приближении решение системы уравнений основного итерационного процесса, а через $\Psi^{(s)}$ и $\Phi^{(s)}$ — функции, к определению которых сводятся решения систем (1.7) и (1.8) соответственно.

Уравнения, из которых определяются $B^{(s)}$, $\Psi^{(s)}$ и $\Phi^{(s)}$, интегрируются раздельно. Весьма важно разделить и граничные задачи, возникающие при наложении граничных условий, которым должны удовлетворять эти функции, установить последовательность определения функций $B^{(s)}$, $\Psi^{(s)}$, $\Phi^{(s)}$ и сформулировать граничные условия для каждой из них в отдельности.

Ниже будет рассмотрен этот вопрос (отдельно для обратно симметричной и симметричной задач) для функций $B^{(0)}$, $\Psi^{(0)}$, $\Phi^{(0)}$ и $B^{(1)}$, которых достаточно для целей этой статьи.

Замечания. В дальнейшем будут использоваться обозначения вида $(1.16)_k$, что означает, что рассматриваются уравнения (1.16) при $s=k$.

Предполагается, что при $\xi\to-\infty$ величины $Q_{(1)}^{(s)}$ и $Q_{(2)}^{(s)}$ убывают до нуля быстрее, чем любая отрицательная степень ξ.

2. В обратно симметричной задаче в случае свободного края для определения произволов, содержащихся в $B^{(0)}$, $B^{(1)}$, $\Psi^{(0)}$, $\Psi^{[1]}$, $\Phi^{(0)}$ и $\Phi^{(1)}$, должны быть использованы условия $(1.16)_0$, $(1.16)_1$, а также условия $(1.14)_0$, $(1.14)_1$, которые можно преобразовать при помощи (1.16), (1.19) и (1.11) к виду

$$\int_{-1}^{1}\zeta\sigma_{\alpha\alpha}^{(1)}\Big|_{\alpha=\alpha_0}d\zeta=0 \tag{2.1}$$

$$\int_{-1}^{1}\zeta\sigma_{\alpha\alpha}^{(1)}\Big|_{\alpha=\alpha_0}d\zeta=\int_{-\infty}^{0}d\xi\int_{-1}^{1}\Big\{\zeta\Big[H_{\beta 0}\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta\,(1)}^{(0)}}{\partial\beta}+k_{\beta 0}\big(\sigma_{\alpha\alpha\,(2)}^{(0)}-\sigma_{\beta\beta\,(2)}^{(0)}\big)\Big]-$$
$$-\xi\Big[H_{\beta 0}\frac{\partial\sigma_{\beta\gamma\,(1)}^{(0)}}{\partial\beta}+k_{\beta 0}\sigma_{\alpha\gamma\,(2)}^{(0)}\Big]\Big\}d\zeta \tag{2.2}$$

$$\int_{-1}^{1}\sigma_{\alpha\gamma}^{(0)}\Big|_{\alpha=\alpha_0}d\zeta=\int_{-\infty}^{0}d\xi\int_{-1}^{1}\Big[H_{\beta 0}\frac{\partial\sigma_{\beta\gamma\,(1)}^{(0)}}{\partial\beta}+k_{\beta 0}\sigma_{\alpha\gamma\,(2)}^{(0)}\Big]d\zeta \tag{2.3}$$

$$\int_{-1}^{1}\sigma_{\alpha\gamma}^{(1)}\Big|_{\alpha=\alpha_0}d\zeta=\int_{-\infty}^{0}d\xi\int_{-1}^{1}\Big[H_{\beta 0}\frac{\partial\bar\sigma_{\beta\gamma}^{(1)}}{\partial\beta}-k_{\beta 0}H_{\beta 0}\xi\frac{\partial\sigma_{\beta\gamma\,(1)}^{(0)}}{\partial\beta}+k_{\beta 0}\bar\sigma_{\alpha\gamma}^{(1)}-k_{\beta 0}^{2}\xi\sigma_{\alpha\gamma\,(2)}^{(0)}\Big]d\zeta \tag{2.4}$$

Введем в рассмотрение вспомогательную задачу 1. Построить решение $Q^{[1]}$ однородной системы уравнений $(1.7)_0$ в полуполосе $-1 \leqslant \zeta \leqslant 1$, $\xi \leqslant 0$, удовлетворяющее условиям

$$\sigma_{\beta\gamma}^{[1]}\Big|_{\zeta=\pm 1} = 0, \qquad Q^{[1]}\Big|_{\xi=-\infty} = 0, \qquad \sigma_{\alpha\beta}^{[1]}\Big|_{\xi=0} = -\zeta \tag{2.5}$$

Решение этой задачи легко находим, например, разделением переменных в виде

$$\sigma_{\alpha\beta}^{[1]} = \partial\Psi^{[1]}/\partial\xi, \qquad \sigma_{\beta\gamma}^{[1]} = \partial\Psi^{[1]}/\partial\zeta, \qquad Eu_\beta^{[1]} = 2(1+\nu)\,\Psi^{[1]}$$

где гармоническая функция $\Psi^{[1]}$ представляется рядом

$$\Psi^{[1]} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^n}{(2n-1)^3\pi^3} \exp\frac{(2n-1)\pi\xi}{2} \sin\frac{(2n-1)\pi\zeta}{2} \tag{2.6}$$

Тогда, как это следует из второго условия $(1.16)_0$ и равенств (1.5), функция $\Psi^{(0)}$ определяется равенством

$$\Psi^{(0)} = \tau_{\alpha\beta}^{(0)}(\alpha_0, \beta)\,\Psi^{[1]} \tag{2.7}$$

Рассмотрим теперь последовательность наложения граничных условий. Из равенства (2.1), принимая во внимание (1.5), получаем

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} = 0 \qquad \text{при } \alpha = \alpha_0 \tag{2.8}$$

Тогда, как это вытекает из первого и третьего условий $(1.16)_0$ и из (1.11),

$$\sigma_{\alpha\alpha(2)}^{(0)} = \sigma_{\alpha\gamma(2)}^{(0)} = 0 \qquad \text{при } \xi = 0 \tag{2.9}$$

и, следовательно,

$$Q_{(2)}^{(0)} \equiv 0, \quad \text{или } \Phi^{(0)} \equiv 0 \tag{2.10}$$

Функцию $B^{(0)}$ определяем с учетом условий (2.1) и (2.3), которые при помощи (2.6), (2.7) и (2.10) можно представить в виде

$$\int_{-1}^{1} \zeta\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}\Big|_{\alpha=\alpha_0} d\zeta = 0, \qquad \int_{-1}^{1} \sigma_{\alpha\gamma}^{(0)}\Big|_{\alpha=\alpha_0} d\zeta + \frac{2}{3}\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}^{(0)}}{\partial s_\beta}\Big|_{\alpha=\alpha_0} = 0 \qquad \left(\frac{\partial}{\partial s_\beta} = H_\beta \frac{\partial}{\partial\beta}\right) \tag{2.11}$$

Решение системы $(1.7)_1$ записываем в виде

$$Q_{(1)}^{(1)} = \tau_{\alpha\beta}^{(1)} Q^{[1]} + Q_{(1)}^{*(1)} \tag{2.12}$$

где $Q^{[1]}$ — решение задачи 1, а $Q_{(1)}^{*(1)}$ — частное решение неоднородной системы $(1.7)_1$, удовлетворяющее однородным условиям на $\xi = 0$.

Функцию $B^{(1)}$ определяем с учетом граничных условий (2.2) и (2.4). Принимая во внимание (2.12), (2.6), (2.7), (2.10), $(1.7)_1$, $(1.8)_1$, эти условия можно переписать в виде

$$\int_{-1}^{1} \zeta\sigma_{\alpha\alpha}^{(1)}\Big|_{\alpha=\alpha_0} d\zeta = -\frac{2}{3}A\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}^{(0)}}{\partial s_\beta}\Big|_{\alpha=\alpha_0}, \qquad A = \frac{384}{\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^5} \approx 1.26009 \tag{2.13}$$

$$\int_{-1}^{1} \sigma_{\alpha\gamma}^{(1)}\Big|_{\alpha=\alpha_0} d\zeta + \frac{2}{3}\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial s_\beta}\Big|_{\alpha=\alpha_0} = -\frac{2}{3}A\frac{\partial\tau_\alpha}{\partial s_\beta}k_{\beta 0}\tau_{\alpha\beta}^{(0)}\Big|_{\alpha=\alpha_0}$$

Далее определяем $\Psi^{(1)}$ по формуле (2.12) и $\Phi^{(1)}$ — с учетом граничных условий $(1.16)_1$. Легко видеть, что процесс определения функций имеет рекуррентный характер, т. е. все величины, которые необходимо знать на n-м этапе, найдены на предыдущих этапах.

В случае шарнирно опертого края рассматриваем граничные условия $(1.17)_0$, $(1.17)_1$, третье равенство $(1.17)_2$, которое можно переписать в виде

$$w^{(2)} - \frac{\nu}{2E}\zeta^2(\tau_{\alpha\alpha}^{(0)} + \tau_{\beta\beta}^{(0)}) + W_{(2)}{}^{(0)} = 0 \qquad \text{при } \alpha = \alpha_0\,(\xi = 0) \tag{2.14}$$

и условия затухания (2.1) и (2.2). Вместо равенства (2.3) воспользуемся здесь условием затухания, полученным в работе [6]

$$\frac{2-\nu}{3}\int_{-1}^{1}\zeta^3\sigma_{\alpha\alpha(2)}^{(0)}\Big|_{\xi=0}d\zeta - \frac{E}{1+\nu}\int_{-1}^{1}(\zeta^2-1)\,W_{(2)}{}^{(0)}\Big|_{\xi=0}d\zeta = 0 \tag{2.15}$$

Исключим из (2.14) величину $w^{(2)}$ при помощи (2.15) и примем во внимание, что вследствие (2.1) и (1.15) имеет место равенство $\sigma_{\alpha\alpha}{}^{(0)}\,|_{\alpha=\alpha_0} = 0$. Тогда из (2.14) и первого равенства $(1.16)_0$ получим граничные условия для $\Phi^{(0)}$ в виде

$$\sigma_{\alpha\alpha(2)}^{(0)} = 0, \qquad W_{(2)}{}^{(0)} = -\frac{\nu}{10E}\tau_{\beta\beta}^{(0)}(1-5\zeta^2) \qquad \text{при } \xi = 0\,(\alpha = \alpha_0) \tag{2.16}$$

Введем в рассмотрение вспомогательную задачу 2. Построить решение $Q^{[2]}$ однородной системы $(1.8)_0$ в полуполосе $-1 \leqslant \zeta \leqslant 1$, $\xi \leqslant 0$, удовлетворяющее условиям

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{[2]}\big|_{\zeta=\pm1} = \sigma_{\gamma\gamma}^{[2]}\big|_{\zeta=\pm1} = 0, \qquad Q^{[2]}\big|_{\xi=-\infty} = 0, \qquad \sigma_{\alpha\alpha}^{[2]}\big|_{\xi=0} = 0, \qquad EW^{[2]}\big|_{\xi=0} = 1 - 5\zeta^2$$

Тогда величины $Q^{(0)}{}_{(2)}$ (функция $\Phi^{(0)}$) определяются формулой

$$Q_{(2)}{}^{(0)} = -\frac{\nu}{10}\tau_{\beta\beta}^{(0)}(\alpha_0, \beta)\,Q^{[2]} \tag{2.17}$$

Теперь проследим последовательность определения функций $B^{(0)}$, $B^{(1)}$, $\Psi^{(0)}$, $\Phi^{(0)}$ Функцию $B^{(0)}$ определяем с учетом условия (2.1) и третьего равенства $(1.17)_0$, которые имеют вид

$$w^{(0)} = 0, \qquad \int_{-1}^{1}\zeta\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}d\zeta = 0 \qquad \text{при } \alpha = \alpha_0 \tag{2.18}$$

Далее определяем $\Psi^{(0)}$ по формуле (2.7) и $\Phi^{(0)}$ по формуле (2.17). Функция $B^{(1)}$ определяется с учетом третьего условия $(1.17)_1$ и условия (2.2), которые легко представить в виде

$$w^{(1)} = 0, \qquad \int_{-1}^{1}\zeta\sigma_{\alpha\alpha}^{(1)}\,d\zeta = -\frac{2}{3}A\,\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}^{(0)}}{\partial s_\beta} - \frac{2}{3}k_{\beta0}B\,\tau_{\beta\beta}^{(0)} \qquad \text{при } \alpha = \alpha_0 \tag{2.19}$$

$$\left(B = \frac{3\nu^2}{40}\int_{-1}^{1}\zeta^2\sigma_{\alpha\gamma}^{[2]}\big|_{\xi=0}d\zeta\right)$$

Нетрудно заметить, что и в этом случае процесс наложения граничных условий имеет рекуррентный характер. В случае жестко защемленного края для определения $B^{(0)}$, $\Psi^{(0)}$, $\Phi^{(0)}$, $B^{(1)}$ будем использовать условия $(1.18)_0$, $(1.18)_1$, (2.14) и условия затухания $(1.14)_0$, которые вследствие (1.9) и (1.11) записываются в виде

$$\int_{-1}^{1}\zeta\sigma_{\alpha\alpha(2)}^{(0)}\big|_{\xi=0}d\zeta = 0, \qquad \int_{-1}^{1}\sigma_{\alpha\gamma(2)}^{(0)}\big|_{\xi=0}d\zeta = 0 \tag{2.20}$$

Рассмотрим вспомогательные задачи 3, 4 и 5. Построим решения однородной системы $(1.8)_0$ в полуполосе $-1 \leqslant \zeta \leqslant 1$, $-L \leqslant \xi \leqslant 0$ (L — достаточно большая величина), удовлетворяющие условиям

$$\sigma_{\alpha\gamma}\big|_{\zeta=\pm1} = \sigma_{\gamma\gamma}\big|_{\zeta=\pm1} = 0, \qquad u_\alpha\big|_{\xi=-\infty} = W\big|_{\xi=-\infty} = 0$$

$$u_\alpha\big|_{\xi=0} = 0, \quad W\big|_{\xi=0} = 1 \quad \text{для задачи 3}$$

$$u_\alpha\big|_{\xi=0} = 0, \quad W\big|_{\xi=0} = \zeta^2 \quad \text{для задачи 4}$$

$$u_\alpha\big|_{\xi=0} = \zeta, \quad W\big|_{\xi=0} = 0 \quad \text{для задачи 5}$$

Обозначим через $Q^{[3]}$, $Q^{[4]}$ и $Q^{[5]}$ решения задач 3, 4 и 5 соответственно.

Тогда вследствие (2.14), (1.5) и первого равенства $(1.18)_1$,

$$Q_{(2)}{}^{(0)} = -w^{(2)}(\alpha_0, \beta)\, Q^{[3]} + \frac{\nu}{2E}\,[\tau_{\alpha\alpha}^{(0)}(\alpha_0, \beta) + \tau_{\beta\beta}^{(0)}(\alpha_0, \beta)]\, Q^{[4]} - v_\alpha{}^{(1)}(\alpha_0, \beta)\, Q^{[5]} \quad (2.21)$$

Подставляя (2.21) в (2.20) и решая получающиеся при этом равенства относительно $w^{(2)}$ и $v^{(1)}{}_\alpha$, имеем

$$w^{(2)} = K\frac{\nu}{2E}(\tau_{\alpha\alpha}^{(0)} + \tau_{\beta\beta}^{(0)}), \qquad v_\alpha{}^{(1)} = C\frac{\nu}{2E}(\tau_{\alpha\alpha}^{(0)} + \tau_{\beta\beta}^{(0)}) \quad \text{при } \alpha = \alpha_0 \quad (2.22)$$

где постоянные C и K легко определяются, если будут найдены решения задач 3, 4 и 5.

Проследим последовательность определения $B^{(0)}$, $B^{(1)}$, $\Psi^{(0)}$, $\Phi^{(0)}$. Функция $B^{(0)}$ определяется при помощи первого и третьего условий $(1.18)_0$, которые имеют вид

$$w^{(0)} = 0, \qquad u_\alpha{}^{(0)} = 0 \quad \text{при } \alpha = \alpha_0 \quad (2.23)$$

(Второе условие $(1.18)_0$ при этом тождественно удовлетворяется.) Функцию $\Psi^{(0)}$ определяем с учетом второго условия $(1.18)_1$. Легко видеть, что вследствие третьего равенства $(1.18)_1$ имеем $u_{\beta(1)}^{(0)}|_{\xi=0} = 0$, и, следовательно, $\Psi^{(0)} \equiv 0$. Далее определяем $B^{(1)}$ при помощи третьего равенства $(1.18)_1$ и второго условия (2.22), т. е. условий

$$w^{(1)} = 0, \qquad v_\alpha{}^{(1)} = C\frac{\nu}{2E}(\tau_{\alpha\alpha}^{(0)} + \tau_{\beta\beta}^{(0)}) \quad \text{при } \alpha = \alpha_0 \quad (2.24)$$

Функцию $\Phi^{(0)}$ определяем с учетом (2.14) и первого равенства $(1.18)_1$. При этом $\Phi^{(0)}$ выражается через решения задач 3, 4 и 5 по формуле (2.21).

3. Перейдем к вопросу построения приближенных методов уточнения классической теории изгиба пластин.

С точки зрения асимптотического метода, проблему построения различных приближенных теорий изгиба (и растяжения) пластинок можно трактовать как проблему построения того или иного числа приближений в основном и вспомогательном итерационных процессах. В работах [1,3-5] было показано, что в случае прямолинейного края и криволинейного свободного края классическая теория эквивалентна задаче построения нулевого приближения основного итерационного процесса. Ниже будет показано, что это справедливо и для трех рассмотренных здесь вариантов произвольного криволинейного края без угловых точек.

Как известно [1,2], уравнения нулевого приближения основного итерационного процесса совпадают с уравнениями классической теории изгиба пластин. Нетрудно заметить, что и граничные условия для $B^{(0)}$ совпадают с граничными условиями классической теории.

Действительно, используем для $i = 0, 1$ введенные в работе [2] величины

$$M_\alpha{}^{(i)} = h^i \int_{-1}^{1} \zeta\sigma_{\alpha\alpha}^{(i)} d\zeta \quad (\alpha\beta), \qquad H_{\alpha\beta}^{(i)} = h^i \int_{-1}^{1} \zeta\sigma_{\alpha\beta}^{(i)} d\zeta$$

$$N_\alpha{}^{(i)} = h^i \int_{-1}^{1} \sigma_{\alpha\gamma}^{(i)} d\zeta \quad (\alpha\beta), \qquad v_\alpha{}^{(i)} = H_\alpha \frac{\partial w^{(i)}}{\partial \alpha} = \frac{\partial w^{(i)}}{\partial s_\alpha} \quad (\alpha\beta)$$

$$w_0{}^{(i)} = h^{i-3}\, w^{(i)}$$

Тогда, принимая во внимание (1.5), легко получим из (2.11), (2.18) и (2.23) обычные граничные условия классической теории

для свободного края

$$M_\alpha{}^{(0)} = 0, \quad N_\alpha{}^{(0)} + \frac{\partial H_{\alpha\beta}^{(0)}}{\partial s_\beta} = 0 \quad \text{при } \alpha = \alpha_0$$

для шарнирно опертого края

$$M_\alpha{}^{(0)} = 0, \quad w_0{}^{(0)} = 0 \quad \text{при } \alpha = \alpha_0$$

для жестко защемленного края

$$w_0{}^{(0)} = 0, \quad \frac{\partial w_0{}^{(0)}}{\partial s_\alpha} = 0 \quad \text{при } \alpha = \alpha_0 .$$

Следует отметить, что, в отличие от классической теории, нулевое приближение основного итерационного процесса позволяет определить также напряжение $\sigma_{\gamma\gamma}$ (что может оказаться существенным, например, для некоторых анизотропных материалов).

Остальные приближения основного итерационного процесса и все приближения вспомогательного итерационного процесса дают поправки к классической теории. Поэтому, ограничиваясь тем или иным числом приближений основного и вспомогательного итерационных процессов, можно строить различные приближенные теории, которые с той или иной точностью будут уменьшать погрешность классической теории как на краю, так и вдали от края. Из всех таких теорий в этой статье рассмотрим только две. Первая дает возможность уточнять результаты классической теории у края пластинки (что важно, например, в задачах о концентрации напряжений около отверстий), а вторая — только вдали от края.

Порядок [3] напряжений и перемещений, определяемых нулевым приближением основного итерационного процесса, как это вытекает из (1.2), будет

$$\sigma_{\alpha\alpha},\ \sigma_{\alpha\beta},\ \sigma_{\beta\beta} \sim h^{-2}, \qquad \sigma_{\alpha\gamma},\ \sigma_{\beta\gamma} \sim h^{-1}, \qquad \sigma_{\gamma\gamma} \sim h^{\circ}, \qquad u_{\alpha},\ u_{\beta} \sim h^{-2}, \qquad W \sim h^{-3} \tag{3.1}$$

У края пластинки на основное напряженное состояние накладываются краевые напряженные состояния, определяемые вспомогательным итерационным процессом. В этом процессе величины $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\beta\gamma}$, u_β определяются из уравнений задачи о краевом скручивании ($\Psi^{(s)}$), а величины $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\alpha\gamma}$, $\sigma_{\beta\beta}$, $\sigma_{\gamma\gamma}$, u_α, W — из уравнений задачи о краевой плоской деформации ($\Phi^{(s)}$), при этом, как видно из п. 2, в зависимости от вида граничных условий на краю пластинки при $s = 0$ одно из краевых напряженных состояний может отсутствовать (но не оба одновременно). Порядок напряжений и перемещений для нулевого приближения вспомогательного итерационного процесса, как это видно из (1.6), будет

$$\sigma_{\alpha\alpha},\ \sigma_{\alpha\beta},\ \sigma_{\alpha\gamma},\ \sigma_{\beta\beta},\ \sigma_{\beta\gamma},\ \sigma_{\gamma\gamma} \sim h^{-2}, \qquad u_{\alpha},\ u_{\beta}, \qquad W \sim h^{-1} \tag{3.2}$$

Из соотношений (3.1) и (3.2) вытекает, что в любом рассмотренном здесь варианте граничных условий погрешность, допускаемая классической теорией на краю пластинки, будет малой для перемещений, однако для напряжений (всех или некоторых) она будет величиной того же порядка, что и основные напряжения классической теории. Поэтому, очевидно, в задачах, где весьма важным является определение напряжений на краю пластинки, нельзя ограничиваться классической теорией для построения напряженного состояния даже в нулевом приближении.

Асимптотический метод дает возможность сформулировать весьма простую приближенную теорию, позволяющую построить в нулевом приближении напряженное состояние как вдали от края, так и на краю. Легко видеть, что сущность ее будет состоять в том, чтобы на напряженное состояние, определенное по классической теории, наложить краевые напряженные состояния, определяемые нулевым приближением вспомогательного итерационного процесса. Используя обозначения $B^{(s)}$, $\Psi^{(s)}$, $\Phi^{(s)}$, проблему построения такой теории можно сформулировать как задачу построения следующих функций: $B^{(0)}$, $\Psi^{(0)}$ для свободного края, $B^{(0)}$, $\Psi^{(0)}$, $\Phi^{(0)}$ для шарнирно опертого края, $B^{(0)}$, $\Phi^{(0)}$ для жестко защемленного края. (Граничные условия для этих функций и формулы, по которым определяются $\Psi^{(0)}$ и $\Phi^{(0)}$, даются в п. 2 статьи.) Погрешность такой теории для всех напряжений везде будет иметь порядок h по сравнению с h°.

Асимптотический метод позволяет также весьма просто построить приближенную теорию, уточняющую данные классической теории только вдали от краев. Такая теория будет состоять в построении двух первых приближений основного итерационного процесса (функций $B^{(0)}$ и $B^{(1)}$). Как указывалось раньше [1-3], построение первого приближения основного итерационного процесса ($B^{(1)}$) сводится к решению однородного бигармонического уравнения (по $\alpha\beta$) с неоднородными условиями, которые в обозначениях классической теории можно представить в виде для свободного края

$$M_\alpha^{(1)} = -Ah\frac{\partial H^{(0)}_{\alpha\beta}}{\partial s_\beta}, \quad N_\alpha^{(1)} + \frac{\partial H^{(1)}_{\alpha\beta}}{\partial s_\beta} = -Ah\frac{\partial}{\partial s_\beta}\left(k_{\beta 0}H^{(0)}_{\alpha\beta}\right) \quad \text{при } \alpha = \alpha_0$$

для шарнирно опертого края

$$w_0^{(1)} = 0, \quad M_\alpha^{(1)} = -hA\frac{\partial H^{(0)}_{\alpha\beta}}{\partial s_\beta} - Bk_{\beta 0}hM^{(0)}_\beta \quad \text{при } \alpha = \alpha_0$$

для жестко защемленного края

$$w_0^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial w_0^{(1)}}{\partial s_\alpha} = C\frac{\nu}{2D(1-\nu^2)}h\left(M_\alpha^{(0)} + M_\beta^{(0)}\right) \quad \text{при } \alpha = \alpha^0 \qquad \left(D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\right)$$

Объединяя $B^{(0)}$ и $B^{(1)}$, получаем приближенный метод уточнения классической теории изгиба пластин, который будет заключаться в построении решения уравнений классической теории, удовлетворяющего следующим модифицированным граничным условиям (с точностью до величин порядка h^2 по сравнению с h°)

для свободного края

$$M_\alpha + Ah\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial s_\beta} = 0, \quad N_\alpha + \frac{\partial}{\partial s}\left(H_{\alpha\beta} + Ahk_{\beta 0}H_{\alpha\beta}\right) = 0 \quad \text{при } \alpha = \alpha_0$$

для шарнирно опертого края

$$M_\alpha + Ah\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial s_\beta} + Bk_{\beta 0}hM_\beta = 0, \quad w_0 = 0 \quad \text{при } \alpha = \alpha_0$$

для жестко защемленного края

$$w_0 = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial s_\alpha} - C\frac{\nu}{2D(1-\nu^2)}h\left(M_\alpha + M_\beta\right) = 0 \quad \text{при } \alpha = \alpha_0$$

Погрешность такой теории будет иметь порядок h^2 по сравнению с h°. Попытка дальнейшего уточнения классической теории (получения поправок иорядка h^2 по сравнению с h°) приводит к необходимости вносить поправки и в уравнения классической теории и в граничные условия ее [2,3].

4. В симметричной задаче произволы интегрирования уравнений для $B^{(s)}$, $\Psi^{(s)}$, $\Phi^{(s)}$ должны быть использованы для выполнения граничных условий (1.16) — (1.18) и условий затухания (1.15). Не останавливаясь на преобразованиях, которые аналогичны преобразованиям для обратно симметричной задачи, сформулируем приближенные методы уточнения классической теории на краю и вдали от края.

В случае свободного края погрешность классической теории (нулевого приближения основного итерационного процесса) вдали от края для всех напряжений имеет порядок h^2 по сравнению с h°, на краю для напряжений $\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\beta\gamma}$ — порядок h^2, а для $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\alpha\gamma}$, $\sigma_{\beta\beta}$, $\sigma_{\gamma\gamma}$ — порядок h по сравнению с h°.

Поэтому для пластинки со свободным краем классическая теория дает возможность построить в нулевом приближении напряженные состояние как вдали от края, так и на краю. В случае шарнирно опертого края погрешность классической теории вдали от края для всех напряжений имеет порядок h, а на краю для $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\alpha\gamma}$, $\sigma_{\beta\beta}$, $\sigma_{\gamma\gamma}$ — порядок h° и для $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\beta\gamma}$ — порядок h по сравнению с h°.

Приближенный метод, дающий возможность построить в нулевом приближении напряженное состояние как вдали от края, так и на краю, состоит в построении функций $B^{(0)}$ и $\Phi^{(0)}$ при следующих граничных условиях:

для $B^{(0)}$

$$\tau^{(0)}_{\alpha\alpha} = \tau^{(0)}_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{при } \alpha = \alpha_0$$

для Φ^0

$$\sigma^{(0)}_{\alpha\alpha(2)} = 0, \quad EW_{(2)}^{(0)} = \nu\zeta\tau^{(0)}_{\beta\beta} \quad \text{при } \xi = 0 \ (\alpha = \alpha_0)$$

Приближенная теория, позволяющая уточнять данные классической теории только вдали от края, состоит в построении решения уравнений классической теории, удовлетворяющего условиям

$$\tau_{\alpha\alpha} - hA_1\nu k_{\beta 0}\tau_{\beta\beta} = 0, \qquad \tau_{\alpha\beta} + hA_1\nu\frac{\partial\tau_{\beta\beta}}{\partial s_\beta} = 0 \quad \text{при } \alpha = \alpha_0 \quad \left(A_1 = \frac{\nu}{2}\int\limits_{-1}^{1}\zeta\sigma_{\alpha\gamma}^{[6]}\Big|_{\xi=0}d\zeta\right)$$

где $\sigma_{\alpha\gamma}^{[6]}$ — решение однородной системы $(1.8)_0$, удовлетворяющее условию

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{[6]}\Big|_{\zeta=\pm1} = \sigma_{\gamma\gamma}^{[6]}\Big|_{\zeta=\pm1} = 0, \qquad Q^{[6]}\Big|_{\xi=-\infty} = 0, \qquad \sigma_{\alpha\alpha}^{[6]}\Big|_{\xi=0} = 0, \qquad W^{[6]}\Big|_{\xi=0} = -\zeta$$

Погрешность такой теории вдали от края имеет порядок h^2 по сравнению с h°.

В случае жестко защемленного края для построения в нулевом приближении напряженного состояния и вдали от края и на краю надо определить функции $B^{(0)}$ и $\Phi^{(0)}$ при следующих граничных условиях:

для $B^{(0)}$

$$v_\alpha^{(0)} = v_\beta^{(0)} = 0 \qquad \text{при } \alpha = \alpha_0$$

для $\Phi^{(0)}$

$$Eu_{\alpha(2)}^{(0)} = -B_1\nu(\tau_{\alpha\alpha}^{(0)} + \tau_{\beta\beta}^{(0)}), \qquad EW_{(2)}^{(0)} = \nu\zeta(\tau_{\alpha\alpha}^{(0)} + \tau_{\beta\beta}^{(0)}) \qquad \text{при } \xi = 0$$

Для уточнения данных классической теории вдали от края (получения поправки порядка h по сравнению с h°) необходимо построить решение уравнений классической теории, удовлетворяющее следующим модифицированным граничным условиям:

$$v_\beta = 0, \qquad Ev_\alpha - hB_1\nu(\tau_{\alpha\alpha} + \tau_{\beta\beta}) = 0 \qquad \text{при } \alpha = \alpha_0$$

$$\left(B_1 = \int\limits_{-1}^{1}\sigma_{\alpha\alpha}^{[7]}\Big|_{\xi=0}d\zeta\left(\int\limits_{-1}^{1}\sigma_{\alpha\alpha}^{[8]}\Big|_{\xi=0}d\zeta\right)^{-1}\right)$$

а $Q^{[7]}$ и $Q^{[8]}$ решения системы $(1.8)_0$ при условиях

$$\sigma_{\alpha\gamma}\Big|_{\zeta=\pm1} = \sigma_{\gamma\gamma}\Big|_{\xi=\pm1} = 0, \qquad Q\Big|_{\xi=-\infty} = 0$$

$$W\Big|_{\xi=0} = -\zeta, \qquad u_\alpha\Big|_{\zeta=0} = 0 \qquad \text{для задачи 7}$$

$$W\Big|_{\xi=0} = 0, \qquad u_\alpha\Big|_{\xi=0} = 1 \qquad \text{для задачи 8}$$

5. Рассмотренная выше симметричная задача представляет собой задачу о растяжении пластинки усилиями, приложенными к ее основаниям. Теперь рассмотрим практически более интересную задачу о растяжении пластинки усилиями, приложенными к ее боковой поверхности.

Будем предполагать, что основания пластинки свободны от нагрузок

$$\sigma_{\alpha\gamma} = \sigma_{\beta\gamma} = \sigma_{\gamma\gamma} = 0 \qquad \text{при } \zeta = \pm1$$

а условия на краю $\alpha = \alpha_0\,(\xi = 0)$ имеют вид

$$\sigma_{\alpha\alpha} = a(\alpha_0, \beta, \zeta), \qquad \sigma_{\alpha\beta} = b(\alpha_0, \beta, \zeta), \qquad \sigma_{\alpha\gamma} = c(\alpha_0, \beta, \zeta) \qquad \text{при } \alpha = \alpha_0$$

Предполагается, что a и b — четные функции ζ, а c — нечетная и что они не зависят от h. Обобщение на случай, когда эти функции пропорциональны какой-то степени h или представляются в виде полинома от h, для линейной задачи не представляет затруднений.

Можно показать, что в рассматриваемом случае для q_1 и q_2 следует выбирать такие значения:

$$q_1 = 0 \quad \text{для } \sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\beta\beta}, \qquad q_1 = -1 \quad \text{для } \sigma_{\alpha\gamma}, \sigma_{\beta\gamma}$$

$$q_1 = -2 \quad \text{для } \sigma_{\gamma\gamma}, \qquad q_1 = 0 \quad \text{для } u_\alpha, u_\beta, \qquad q_1 = -1 \quad \text{для } W$$

$$q_2 = 0 \quad \text{для } \sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha\gamma}, \sigma_{\beta\beta}, \sigma_{\beta\gamma}, \sigma_{\gamma\gamma}$$

$$q_2 = -1 \quad \text{для } u_\alpha, u_\beta, W$$

Система уравнений для основного напряженного состояния представляет собой обычные уравнения плоской задачи и может быть приведена к однородному при $s = 0, 1$ бигармоническому уравнению. Уравнения для краевых напряженных состояний имеют вид (1.7) и (1.8). Граничные условия для коэффициентов разложения (1.2) получаем при помощи процедуры, описанной в [1,2] в виде

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} + \sigma_{\alpha\alpha\,(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\alpha\,(2)}^{(s)} = a^{(s)}, \qquad \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta\,(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta\,(2)}^{(s)} = b^{(s)}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(s-1)} + \sigma_{\alpha\gamma\,(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\gamma\,(2)}^{(s)} = c^{(s)} \quad \text{при } \alpha = \alpha_0$$

$$(a^{(0)} = a, \quad b^{(0)} = b, \quad c^{(0)} = c, \quad a^{(k)} = b^{(k)} = c^{(k)} \equiv 0) \qquad (k > 0)$$

Присоединяя сюда условия затухания (1.15), получим пять последовательностей граничных условий на $\alpha = \alpha_0$ для функций $B^{(s)}$, $\Psi^{(s)}$, $\Phi^{(s)}$.

Приближенная теория, позволяющая уточнять данные классической теории у края пластинки, состоит в построении функций $B^{(0)}$, $\Psi^{(0)}$, $\Phi^{(0)}$ при следующих граничных условиях:

для $B^{(0)}$
$$\tau_{\alpha\alpha}^{(0)} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} a\, d\zeta, \qquad \tau_{\alpha\beta}^{(0)} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} b\, d\zeta \qquad \text{при } \alpha = \alpha_0$$

для $\Psi^{(0)}$
$$\sigma_{\alpha\beta\,(1)}^{(0)} = b - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} b\, d\zeta \qquad \text{при } \xi = 0$$

для $\Phi^{(0)}$
$$\sigma_{\alpha\alpha\,(2)}^{(0)} = a - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} a\, d\zeta, \qquad \sigma_{\alpha\gamma\,(2)}^{(0)} = c \qquad \text{при } \xi = 0$$

Погрешность такой теории для напряжений везде имеет порядок h по сравнению с величиной h°.

Следует отметить, что в случае, когда a и b не зависят от ζ, а $c \equiv 0$, функции $\Psi^{(0)}$ и $\Phi^{(0)}$ тождественно равны нулю, и напряженное состояние как вдали от края, так и на краю в нулевом приближении можно построить при помощи классической теории.

Приближенная теория, позволяющая уточнять данные классической теории только вдали от края, состоит в решении (однородной) системы уравнений плоской задачи при следующих граничных условиях на $\alpha = \alpha_0$:

$$\tau_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} [a - hk_{\beta 0}\,\zeta c]\, d\zeta, \qquad \tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left[b - h\nu\zeta\,\frac{\partial c}{\partial s_\beta}\right] d\zeta$$

Погрешность этой теории вдали от края имеет порядок h^2 по сравнению с h°. Если $c \equiv 0$, эта теория совпадает с классической теорией.

Приношу глубокую благодарность А. Л. Гольденвейзеру за постановку задачи и помощь, оказанную при выполнении работы.

Поступила 7 XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
2. Гольденвейзер А. Л. и Колос А. В. К построению двумерных уравнений теории упругих тонких пластинок. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
3. Колос А. В. Об уточнении классической теории изгиба круглых пластинок. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
4. Friedrichs K. and Dressler R. F. A boundary — layer theory for elastic plates. Communs. Pure and Appl. Math., 1960, vol. 14, No. 1.
5. Reiss E. L. and Locke S. On the theory of plane stress. Quart. Appl. Math., 1961, vol. 19, No 3.
6. Гусейн-Заде М. И. Об условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.