

## ТОНКИЕ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ШИРОКОПОЛОСНОЙ СЛУЧАЙНОЙ НАГРУЗКИ

В. А. Пальмов (Ленинград)

Исследование колебаний тонких оболочек под действием широкополосной нагрузки представляет значительные трудности. При использовании стандартного приема разложения прогиба оболочки в ряд по формам свободных колебаний [1] приходится учитывать большое число форм колебаний. Но тогда представляющие интерес величины, такие, как изгибающий момент или прогиб, являются суммами большого числа членов, и какие-либо общие заключения о влиянии различных параметров задачи можно получить в результате утомительных вычислений. Некоторые соображения о приближенном вычислении сумм, определяющих характерные величины, даются в работах [2-4]. Например, в работе [2] получены сравнительно простые выражения спектральной плотности напряжений в пластинке для случая, когда нагрузка представляет пространственный белый шум и является стационарной случайной функцией времени с произвольной спектральной плотностью. Приближенное вычисление ряда для случая цилиндрической оболочки дано в работе [4].

Ниже дается решение задачи о действии на произвольную пологую оболочку нормальной нагрузки, представляющей пространственно-временное однородное случайное поле. При этом ограничиваемся рассмотрением достаточно протяженных оболочек с демпфированием колебаний, когда возмущения, вносимые граничными условиями, существенны только вблизи границ оболочки. Поэтому при разыскании вероятностных характеристик прогиба, ускорения в других точках, удаленных от границы, граничные условия полностью игнорируются. При разыскании вероятностных характеристик интересующих величин вблизи границы оболочки учитываются только граничные условия на этой границе. Такое ограничение существенно упрощает расчет колебаний оболочки. При помощи этого расчета удастся получить ряд новых формул и, как частный случай, — известные ранее. При этом не приходится использовать разложение прогиба оболочки в ряд по формам колебаний.

1. По предположению, в оболочке возбуждается большое число форм колебаний, поэтому напряженное состояние в ней будет иметь большой показатель изменчивости. Воспользуемся соответствующими уравнениями колебаний оболочки [5,6]

$$\begin{aligned} D \left[ 1 + R \left( \frac{d}{dt} \right) \right] \Delta \Delta w - \left( k_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= p(t, x, y) \\ E h \left[ 1 + R \left( \frac{d}{dt} \right) \right] \left( k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \Delta \Delta \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $w$  — нормальный прогиб оболочки,  $p$  — нормальная нагрузка,  $\varphi$  — функция напряжений для тангенциальных усилий,  $k_1$  и  $k_2$  — главные кривизны оболочки,  $D$  — ее цилиндрическая жесткость,  $h$  — толщина,  $E$  — модуль Юнга,  $\rho$  — погонная масса оболочки. Сопротивление предполагается линейным.

Уравнения (1.1) отличаются от уравнений работы [6] тем, что второй член в первом и втором уравнениях введен для учета рассеяния энергии при колебаниях.

В уравнениях (1.1) для простоты принято, что  $R(d/dt)$  — полином, содержащий лишь нечетные степени оператора дифференцирования по времени. Предполагается, что рассеяние энергии, вообще говоря, мало, так что при любых движениях оболочки максимум второго члена существенно меньше максимума первого.

Положим, что нормальная нагрузка на оболочку образует однородное случайное поле с нулевым значением математического ожидания. Зададим нагрузку ее спектральным представлением

$$p = \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega t + \lambda x + \mu y)} V(\omega, \lambda, \mu) d\omega d\lambda d\mu \quad (1.2)$$

где  $V$  — случайная функция типа трехмерного белого шума интенсивности  $S_p(\omega, \lambda, \mu)$ . Неслучайная функция  $S_p$  называется спектральной плотностью нагрузки.

В силу сказанного выше, при рассмотрении поведения оболочки в точках, удаленных от ее краев, можно игнорировать все граничные условия. Тогда, внося (1.2) в уравнения (1.1), найдем спектральное представление прогиба в точках, достаточно удаленных от краев

$$w = \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega t + \lambda x + \mu y)} \frac{V(\omega, \lambda, \mu) d\omega d\lambda d\mu}{\Omega(\omega, \lambda, \mu)} \quad (1.3)$$

Здесь

$$\Omega(\omega, \lambda, \mu) = D_k \left[ (\lambda^2 + \mu^2)^2 + \frac{Eh}{D} \frac{(k_2 \lambda^2 + k_1 \mu^2)^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} \right] - \rho \omega^2 \quad (1.4)$$

$$D_k = D(1 + i\psi), \quad \psi(\omega) = -iR(i\omega) \quad (1.5)$$

В силу сказанного выше, значения функции  $\psi$  оказываются вещественными и существенно меньшими единицы. При помощи выражения (1.3) легко находится корреляционная функция прогиба

$$K_w(\tau, \xi, \eta) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega\tau + \lambda\xi + \mu\eta)} \frac{S_p(\omega, \lambda, \mu) d\omega d\lambda d\mu}{|\Omega(\omega, \lambda, \mu)|^2} \quad (1.6)$$

Формула (1.6) сложна для непосредственных вычислений. Но при ее помощи могут быть легко получены другие более бедные вероятностные характеристики прогиба. Ограничимся, например, вычислением корреляционной функции при  $\xi = \eta = 0$

$$K_w(\tau) = K_w(\tau, 0, 0) \quad (1.7)$$

По смыслу дела,  $K_w(\tau)$  является корреляционной функцией прогиба в одной точке оболочки. Сопоставляя (1.6) и (1.7), легко найдем выражение спектральной плотности этого перемещения

$$\Phi_w(\omega) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_p(\omega, \lambda, \mu) d\lambda d\mu}{|\Omega(\omega, \lambda, \mu)|^2} \quad (1.8)$$

В некоторых случаях необходимо знать ускорение точек оболочки  $w''$ . Его спектральная плотность получается из (1.8) умножением на  $\omega^4$

$$\Phi_{w''}(\omega) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^4 S_p(\omega, \lambda, \mu) d\lambda d\mu}{|\Omega(\omega, \lambda, \mu)|^2} \quad (1.9)$$

2. Проведем вычисление спектральной плотности ускорения в одной точке оболочки для различных типов нагрузки. Нагрузка волнового типа имеет корреляционную функцию следующего вида:

$$K_p(\tau, \xi, \eta) = K_p\left(\tau - \frac{\xi \cos \gamma}{c} - \frac{\eta \sin \gamma}{c}\right) \quad (2.1)$$

Здесь  $c$  — скорость распространения волн давления, а  $\gamma$  — угол наклона волнового вектора к оси  $x$ . Спектральная плотность нагрузки, определенная формулой

$$K_p(\tau, \xi, \eta) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega\tau + \lambda\xi + \mu\eta)} S_p(\omega, \lambda, \mu) d\omega d\lambda d\mu \quad (2.2)$$

для нагрузки (2.1) величина  $S_p$  имеет вид

$$S_p(\omega, \lambda, \mu) = \Phi_p(\omega) \delta\left(\lambda + \frac{\omega}{c} \cos \gamma\right) \delta\left(\mu + \frac{\omega}{c} \sin \gamma\right) \quad (2.3)$$

Здесь  $\Phi_p(\omega)$  — спектральная плотность давления, рассматриваемого в одной точке оболочки. Внося (2.3) в (1.9) и проводя вычисление интеграла, получим следующую связь между спектральными плотностями ускорения и давления в одной точке оболочки:

$$\Phi_{w''}(\omega) = \frac{\omega^4 \Phi_p(\omega)}{|D [(\omega/c)^4 + (Eh/D)(k_2 \cos^2 \gamma + k_1 \sin^2 \gamma)^2] - \rho \omega^2|^2} \quad (2.4)$$

Положим теперь, что нагрузка является пространственным белым шумом. В этом случае ее корреляционная функция и спектральная плотность таковы:

$$K_p(\tau, \xi, \eta) = K_p(\tau) \delta(\xi) \delta(\eta), \quad S_p(\omega, \lambda, \mu) = \Psi(\omega) \quad (2.5)$$

Внесем  $S_p$  по формуле (2.5) в (1.8)

$$\Phi_{w..}(\omega) = \Psi(\omega) \omega^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda d\mu}{|\Omega(\omega, \lambda, \mu)|^2} \quad (2.6)$$

Входящий сюда интеграл может быть вычислен. Для этого перейдем к новым переменным интегрирования  $z$  и  $\theta$ , связанным со старыми переменными следующими формулами:

$$\lambda = \sqrt{z} \cos \theta, \quad \mu = \sqrt{z} \sin \theta \quad (2.7)$$

Тогда получим

$$\Phi_{w..}(\omega) = \frac{\Psi(\omega) \omega^4}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{dz}{|D_k [z^2 + (Eh/D)(k_2 \cos^2 \theta + k_1 \sin^2 \theta)] - \rho \omega^2|^2} \quad (2.8)$$

Для вычисления интеграла по  $z$  в (2.8) воспользуемся формулой [8]

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{a + bz^2 + cz^4} = \frac{\pi}{2cq^2 \sin \alpha} \frac{\cos^{1/2} \alpha}{q} \quad (2.9)$$

$$q = (a/c)^{1/4}, \quad \cos \alpha = -b / (2\sqrt{ac}) \quad (0 \leq \alpha \leq \pi) \quad (2.10)$$

Сопоставляя (2.9) и интеграл по  $z$  в (2.8), найдем, что константы  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы:

$$c = (1 + \psi^2) D^2, \quad b = [2(d^2 - \delta^2) + 2d^2\psi^2] D, \quad a = (d^2 - \delta^2)^2 + d^4\psi^2 \quad (2.11)$$

$$\delta^2 = \rho \omega^2, \quad d^2 = d^2(\theta) = Eh(k_2 \cos^2 \theta + k_1 \sin^2 \theta)^2 \quad (2.12)$$

Вычисление первой дроби в правой части формулы (2.9) дает

$$\frac{\pi}{2cq^2 \sin \alpha} = \frac{\pi}{2|\psi| \rho \omega^2 D} \quad (2.13)$$

Вторая дробь имеет слишком громоздкое выражение. Однако она ограничена при  $\psi \rightarrow 0$  почти для всех значений  $\omega$ . Поэтому, полагая  $\psi$  малым, найдем ее асимптотическое представление при  $\psi \rightarrow 0$ . В этом случае из формул (2.10), (2.11) следует

$$\cos \alpha = \sin(\delta - d), \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \begin{cases} 1 & \text{при } \delta > d, \\ 0 & \text{при } \delta < d, \end{cases} \quad q = \frac{\sqrt{|d^2 - \delta^2|}}{\sqrt{D}} \quad (2.14)$$

Подставляя (2.13) и (2.14) в (2.9), получим приближенное значение  $J_1$  интеграла по  $z$  в формуле (2.8)

$$J_1 = \pi [2|\psi| \rho \sqrt{D} \rho \omega^2 \sqrt{\omega^2 - \rho^{-1} d^2(\theta)}]^{-1} \text{ при } \omega^2 > \rho^{-1} d^2(\theta) \\ J_1 = 0 \quad \text{при } \omega^2 < \rho^{-1} d^2(\theta) \quad (2.15)$$

Внося это выражение в формулу (2.8), найдем окончательно

$$\Phi_{w..}(\omega) = \frac{\pi^2 \Psi(\omega) |\omega|}{2|\psi| \rho \sqrt{D} \rho} H(\alpha, \chi) \quad (2.16)$$

Здесь

$$H(\alpha, \chi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 (\cos^2 \theta + \chi \sin^2 \theta)^2}}, \quad \alpha = \left( \frac{Eh k_2^2}{\rho \omega^2} \right)^{1/2}, \quad \chi = \frac{k_1}{k_2} \quad (2.17)$$

Интегрирование здесь распространяется по той области значений  $\theta$ , где подынтегральное выражение вещественно. Функция  $H(\alpha, \chi)$  была введена в работе [2] и

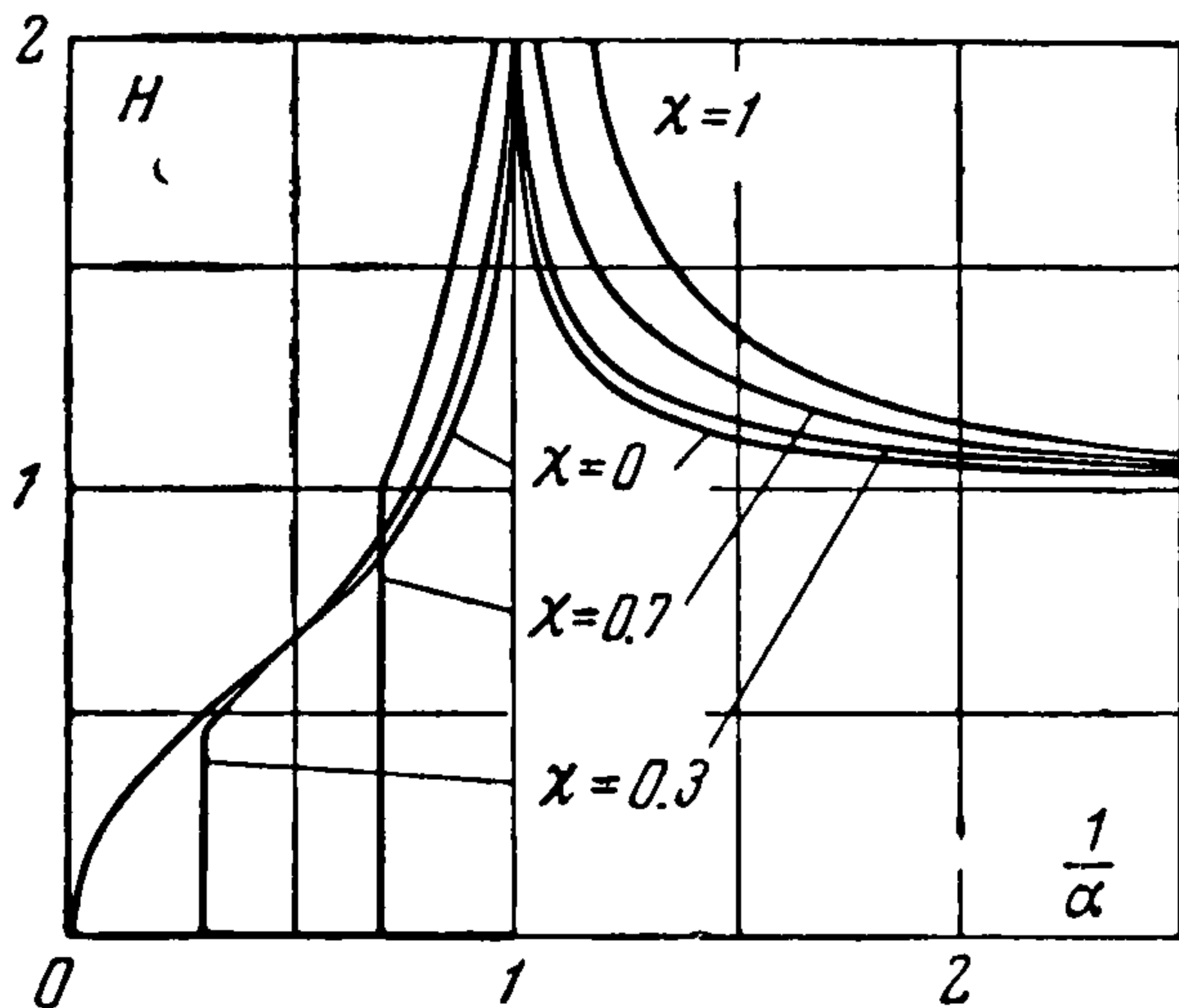
имеет четкий механический смысл. Она равна отношению плотности собственных частот оболочки при данном  $\omega$  к ее значению при  $\omega \rightarrow \infty$ . Стандартным приемом можно выразить  $H$  через эллиптические интегралы в нормальной форме. При  $\chi < 1$  результат таков:

$$H(\alpha, \chi) = \begin{cases} 0 & (\alpha^{-1} < \chi) \\ \sqrt{2\pi^{-1} [\alpha(1-\chi)]^{-1/2}} K(\sqrt{1/2\alpha^{-1}(1-\chi)^{-1}(1+\alpha)(1-\alpha\chi)}) & (\chi < \alpha^{-1} < 1) \\ 2\pi^{-1} [(1+\alpha)(1-\alpha\chi)]^{-1/2} K(2\alpha(1+\alpha)^{-1}(1-\alpha\chi)^{-1}(1-\chi)) & (\alpha^{-1} > 1) \end{cases} \quad (2.18)$$

Здесь  $K(\ )$  — полный эллиптический интеграл первого рода. Для пластинки  $H=1$ ; для сферической оболочки

$$H(\alpha, 1) = \begin{cases} 0 & (\alpha^{-1} < 1) \\ (1-\alpha^2)^{-1/2} & (\alpha^{-1} > 1) \end{cases} \quad (2.19)$$

Результаты вычислений  $H(\alpha, \chi)$  для различных значений  $\alpha$  и  $\chi$  приведены фиг. 1.



Фиг. 1

3. Вычисления, подобные только что приведенным, позволяют получить спектральные плотности напряжений в оболочке. Известно [5], что напряжения, вызванные изгибом оболочки, определяются следующими формулами

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{6D}{h^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{6D}{h^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ограничимся ниже рассмотрением одного напряжения  $\sigma_x$ . Внося в (3.1) спектральное представление прогиба по формуле (1.3) и (1.4), найдем спектральное представление напряжения

$$\sigma_x = \frac{6D}{h^2} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda^2 + \nu\mu^2) e^{i(\omega t + \lambda x + \mu y)} V(\omega, \lambda, \mu) d\omega d\lambda d\mu}{\Omega(\omega, \lambda, \mu)} \quad (3.2)$$

Ограничимся рассмотрением напряжения в одной точке оболочки. Как и выше, найдем спектральную плотность этого напряжения

$$\Phi_{\sigma_x}(\omega) = \left( \frac{6D}{h^2} \right)^2 \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda^2 + \nu\mu^2)^2 S_p(\omega, \lambda, \mu) d\lambda d\mu}{|\Omega(\omega, \lambda, \mu)|^2} \quad (3.3)$$

При нагрузке волнового типа величина  $S_p$  имеет вид (2.3), и вычисление интеграла в формуле (3.3) дает следующий результат:

$$\Phi_{\sigma_x}(\omega) = \left( \frac{6D}{h^2} \right)^2 \left( \frac{\omega}{c} \right)^4 \frac{(\cos^2 \gamma + \nu \sin^2 \gamma)^2 \Phi_p(\omega)}{|D_k [(\omega/c)^4 = (Eh/D)(k_2 \cos^2 \gamma + k_1 \sin^2 \gamma)^2] - \rho\omega^2|^2} \quad (3.4)$$

Здесь  $\Phi_p(\omega)$  — спектральная плотность давления в одной точке на поверхности оболочки. Аналогичное вычисление дает спектральную плотность напряжения  $\sigma_y$  и взаимную спектральную плотность  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$

$$\Phi_{\sigma_y}(\omega) = \left( \frac{\sin^2 \gamma + \nu \cos^2 \gamma}{\cos^2 \gamma + \nu \sin^2 \gamma} \right)^2 \Phi_{\sigma_x}, \quad \Phi_{\sigma_x \sigma_y}(\omega) = \frac{\sin^2 \gamma + \nu \cos^2 \gamma}{\cos^2 \gamma + \nu \sin^2 \gamma} \Phi_{\sigma_x} \quad (3.5)$$

Найдем спектральные плотности напряжений для случая, когда нагрузка является пространственным белым шумом. Внесем  $S_p$  по формуле (2.5) в (3.3) и перей-

дем к переменным интегрирования (2.7)

$$\Phi_{\sigma_x}(\omega) = \left(\frac{6D}{h^2}\right)^2 \frac{\Psi(\omega)}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta)^2 d\theta \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{|D_k [z^2 + D^{-1}d^2(\theta)] - \rho\omega^2|} \quad (3.6)$$

Здесь  $d^2(\theta)$  — согласно (2.12). Входящий сюда интеграл по  $z$  можно вычислить. При малом трении, т. е. при малом  $\psi$ , его выражение таково:

$$\frac{\pi [\omega^2 - (Eh/\rho)(k_2 \cos^2 \theta + k_1 \sin^2 \theta)^2]^{1/2}}{2D \sqrt{D\rho} |\psi| \omega^2} \quad (3.7)$$

Если радикал теряет смысл, интеграл равен нулю. Внося (3.7) в (3.6), получим

$$\Phi_{\sigma_x}(\omega) = \frac{9\pi^2 \sqrt{D}}{4h^4 \rho} \frac{\Psi(\omega)}{|\psi\omega|} M_1(\nu, \alpha, \chi) \quad (3.8)$$

$$M_1(\nu, \alpha, \chi) = \frac{16}{\pi} \int_0^{1/2\pi} (\cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta)^2 \sqrt{1 - \alpha^2 (\cos^2 \theta + \chi \sin^2 \theta)^2} d\theta \quad (3.9)$$

Значения  $\alpha$  и  $\chi$  даются формулами (2.19). Интегрирование в формуле (3.9) проводится по той области значений  $\theta$ , где подынтегральное выражение имеет смысл. Точно таким же способом получим спектральную плотность напряжения  $\sigma_y$  и взаимную спектральную плотность  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$

$$\Phi_{\sigma_y} = \Phi_{\sigma_x} M_2 / M_1, \quad \Phi_{\sigma_x \sigma_y} = \Phi_{\sigma_x} M_3 / M_1 \quad (3.10)$$

где

$$M_2 = \frac{16}{\pi} \int_0^{1/2\pi} (\sin^2 \theta + \nu \cos^2 \theta)^2 \sqrt{1 - \alpha^2 (\cos^2 \theta + \chi \sin^2 \theta)^2} d\theta \quad (3.11)$$

$$M_3 = \frac{16}{\pi} \int_0^{1/2\pi} (\cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta) (\sin^2 \theta + \nu \cos^2 \theta) \sqrt{1 - \alpha^2 (\cos^2 \theta + \chi \sin^2 \theta)^2} d\theta$$

Как и прежде, интегрирование проводится только по области значений  $\theta$ , где подынтегральное выражение вещественно.

Приводим результаты вычислений:

для пластинки ( $\alpha \rightarrow 0$ )

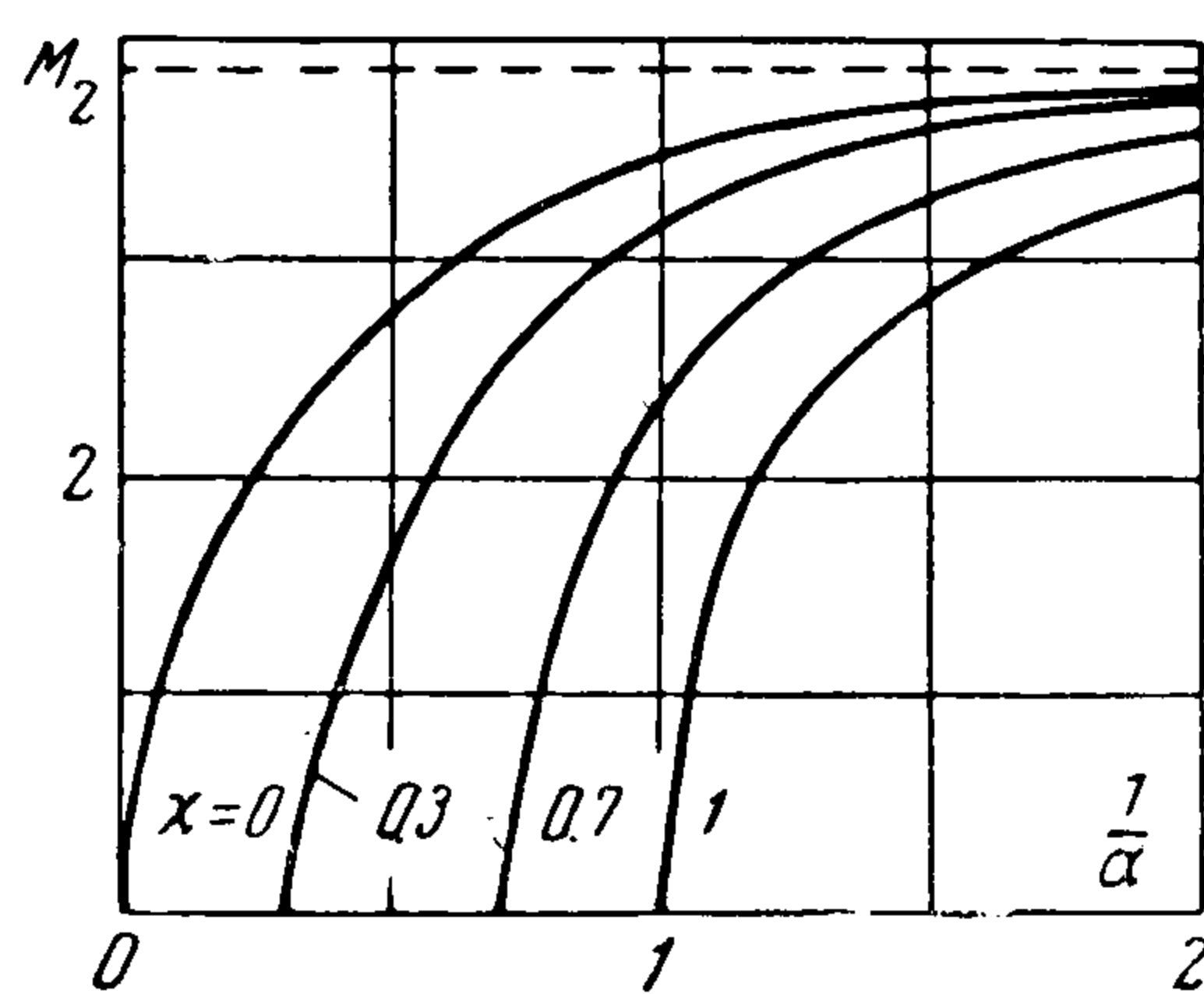
$$\begin{aligned} M_1 = M_2 &= 3 + 2\nu + 3\nu^2 \\ M_3 &= 1 + 6\nu + \nu^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

для сферической оболочки

$$\begin{aligned} M = M_2 &= (3 + 2\nu + 3\nu^2) \sqrt{1 - \alpha^2} \\ M_3 &= (1 + 6\nu + \nu^2) \sqrt{1 - \alpha^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Причем при  $\alpha > 1$  значения  $M$  равны нулю.

Вообще, при  $1/\alpha < \chi$  значения всех  $M$  равны нулю, поскольку в этом случае радикал в (3.9), (3.11) теряет смысл. При  $1/\alpha > \chi$  интегралы (3.9), (3.11) могут быть выражены через полные эллиптические интегралы в нормальной форме. Однако эти выражения громоздки и неудобны для вычислений. Проще провести численное интегрирование. Результаты вычислений  $M_2$  даны на фиг. 2. Значения  $M_1$  и  $M_3$  при  $\chi < 1$  оказываются меньше  $M_2$  для каждого  $\alpha$ . Для сферической оболочки формулы (3.8), (3.10), (3.13) дают



Фиг. 2

$$\Phi_{\sigma_x}(\omega) = \Phi_{\sigma_y}(\omega) = \frac{9\pi^2 \sqrt{D}}{4h^4 \rho} (3 + 2\nu + 3\nu^2) \frac{\Psi(\omega)}{|\psi\omega|} \left(1 - \frac{Ehk^2}{\rho\omega^2}\right)^{1/2} \quad (3.14)$$

При отрицательном подкоренном выражении в (3.14)  $\Phi = 0$ .

Соответствующая формула для пластинки получается из (3.14) при  $k = 0$  и в этом случае она по существу совпадает с результатом В. В. Болотина [2], полученным с использованием асимптотического метода.

4. Найдем спектральную плотность напряжений вблизи заземленного края оболочки. Для упрощения дела ограничимся случаем сферической оболочки  $y > 0$ . Колебания оболочки описываются уравнениями (1.1) при  $k_1 = k_2 = k$

$$\begin{aligned} D \left[ 1 + R \left( \frac{d}{dt} \right) \right] \Delta \Delta w - k \Delta \Phi + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= p(t, x, y) \\ Eh \left[ 1 + R \left( \frac{d}{dt} \right) \right] k \Delta w + \Delta \Delta \Phi &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Положим, что заземленным является край  $y = 0$ , на котором должны быть выполнены условия

$$u = v = w = \partial w / \partial y \quad (4.2)$$

Как сказано во введении, возмущения в напряженном состоянии оболочки должны убывать при удалении от границы оболочки ( $y \rightarrow \infty$ ). Ограничимся разысканием изгибного напряжения в заделке, оно имеет выражение

$$\sigma_y = -6Dh^{-2} \Delta w \quad (4.3)$$

Уравнение для определения  $w$  получим, исключая  $\Phi$  из системы (4.1)

$$D \left[ 1 + R \left( \frac{d}{dt} \right) \right] \left( \Delta \Delta w + \frac{Ehk^2}{D} w \right) + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(t, x, y) \quad (4.4)$$

Тангенциальные перемещения  $u$  и  $v$  определять не будем, так как они не вошли в (4.3), а нормальный прогиб  $w$ , в силу (4.2) и (4.4), может быть определен независимо от  $u$  и  $v$ .

Решение уравнения (4.4) при  $p$ , определенном формулой (1.2), ищем в виде

$$w = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\omega t + \lambda x)} V(\omega, \lambda, \mu)}{D_k [(\lambda^2 + \mu^2)^2 + Ekh^2/D] - \rho \omega^2} [e^{i\mu y} + F(y)] d\omega d\lambda d\mu \quad (4.5)$$

где  $F(y)$  удовлетворяет уравнению

$$\left\{ D_k \left[ \left( -\lambda^2 + \frac{d^2}{dy^2} \right)^2 + \frac{Ekh^2}{D} \right] - \rho \omega^2 \right\} F(y) = 0 \quad (4.6)$$

Его решение, затухающее с ростом  $y$ , имеет вид

$$F(y) = Ae^{-\beta_1 y} + Be^{-\beta_2 y} \quad (4.7)$$

где

$$\beta_{1,2} = \left[ \lambda^2 \pm \left( \frac{\rho \omega^2}{D_k} - \frac{Ekh^2}{D} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (4.8)$$

Здесь берется та ветвь внешнего радикала, на которой вещественная часть радикала положительна. Благодаря наличию рассеяния энергии такие  $\beta_1$  и  $\beta_2$  всегда существуют.

Удовлетворение граничным условиям в заделке (4.2) дает следующие значения постоянных  $A$  и  $B$ :

$$A = \frac{\beta_2 + i\mu}{\beta_1 - \beta_2}, \quad B = \frac{\beta_1 + i\mu}{\beta_2 - \beta_1} \quad (4.9)$$

При их помощи найдем значение изгибного напряжения в заделке оболочки ( $y = 0$ )

$$\sigma_y = \frac{6D}{h^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\omega t + \lambda x)} V(\omega, \lambda, \mu)}{D_k [(\lambda^2 + \mu^2)^2 + Ekh^2/D] - \rho \omega^2} [\mu^2 - \beta_1 \beta_2 - i\mu(\beta_1 + \beta_2)] d\omega d\lambda d\mu \quad (4.10)$$

Корреляционная функция изгибного напряжения в зависимости только от временного интервала  $\tau$  имеет вид

$$K_{\sigma_y}(\tau) = \left(\frac{6D}{h^2}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\omega, \lambda, \mu) e^{i\omega\tau} S_p(\omega, \lambda, \mu) d\omega d\lambda d\mu}{|D_k [(\lambda^2 + \mu^2)^2 + Ehk^2/D] - \rho\omega^2|^2} \quad (4.11)$$

$$R(\omega, \lambda, \mu) = |\mu^2 - \beta_1\beta_2 - i\mu(\beta_1 + \beta_2)|^2 \quad (4.12)$$

Приводим значения  $R$  при различных соотношениях между его аргументами и параметрами

$$R = \begin{cases} (\lambda^2 + \mu^2)^2 & \text{при } m < 0 \\ (\lambda^2 + \mu^2)^2 - m & \text{при } 0 < m < \lambda^4 \quad \left(m = \frac{\rho\omega^2 - Ehk^2}{D}\right) \\ (\mu \operatorname{sign} \omega + \sqrt{V\bar{m} - \lambda^2})^2 (\lambda^2 + \mu^2 + \sqrt{\bar{m}}) & \text{при } m > \lambda^4 \end{cases} \quad (4.13)$$

При вычислениях здесь отброшены члены, имеющие порядок величины  $\psi$ . При помощи соотношения (4.11) находим спектральную плотность напряжения в заделке

$$\Phi_{\sigma_y}(\omega) = \left(\frac{6D}{h^2}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\omega, \lambda, \mu) S_p(\omega, \lambda, \mu) d\lambda d\mu}{|D_k [(\lambda^2 + \mu^2)^2 + Ehk^2/D] - \rho\omega^2|^2} \quad (4.14)$$

Ниже приводятся вычисления спектральной плотности напряжений в заделке для двух типов внешней нагрузки.

При внешней нагрузке волнового типа спектральная плотность нагрузки имеет вид (2.3), и вычисление интеграла в (4.14) дает

$$\Phi_{\sigma_y}(\omega) = \left(\frac{6D}{h^2}\right)^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \frac{\Phi_p(\omega) G}{|D_k [(\omega/c)^4 + Ehk^2/D] - \rho\omega^2|^2} \quad (4.15)$$

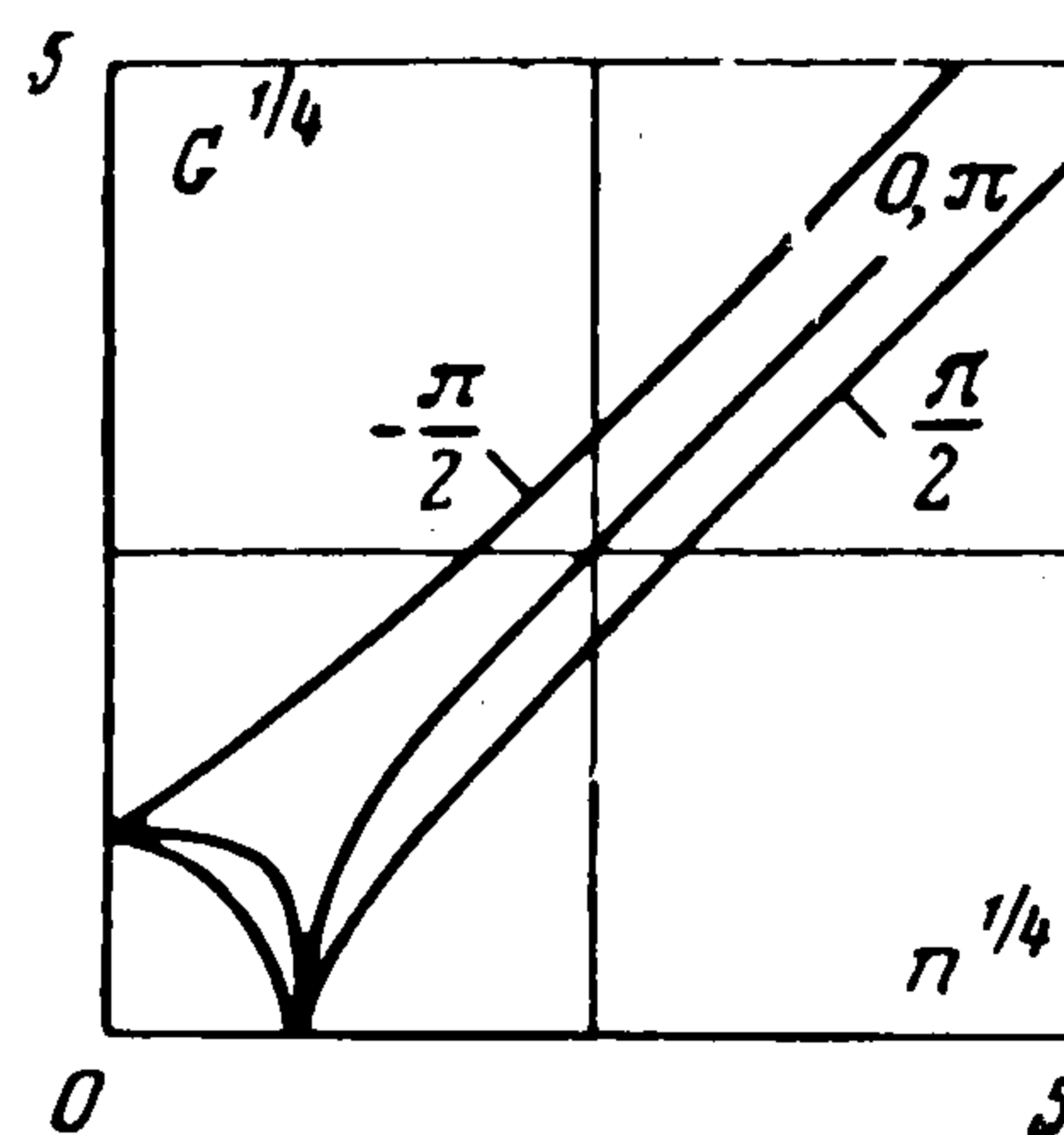
причем  $G$  имеет выражение

$$G = \left(\frac{c}{\omega}\right)^4 R\left(\omega, \frac{\omega}{c} \cos \gamma, \frac{\omega}{c} \sin \gamma\right) \quad (4.16)$$

В соответствии с (4.13), (4.14), имеем следующие представления  $G$  в зависимости от величины частоты  $\omega$ :

$$G(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n < 0 \\ 1 - n & \text{при } 0 < n < \cos^4 \gamma \\ (-\sin \gamma + \sqrt{V\bar{n} - \cos^2 \gamma})^2 (1 + \sqrt{\bar{n}}) & \text{при } n > \cos^4 \gamma \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\left(n = \left(\frac{c}{\omega}\right)^4 \frac{\rho\omega^2 - Ehk^2}{D}\right)$$



Фиг. 3

По своему смыслу  $G$  представляет отношение спектральной плотности напряжений в заделке сферической оболочки к спектральной плотности максимального напряжения  $\Phi_{\sigma}(\omega)$  во внутренней области оболочки

$$\Phi_{\sigma_y}(\omega) = \Phi_{\sigma}(\omega) G, \quad \Phi_{\sigma}(\omega) = \left(\frac{6D}{h^2}\right)^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \frac{\Phi_p(\omega)}{|D_k [(\omega/c)^4 + Ehk^2/D] - \rho\omega^2|^2} \quad (4.18)$$

На фиг. 3 показана зависимость  $G^{1/4}$  от  $n^{1/4}$  при различных значениях  $\gamma = -1/2\pi, 0, \pi, 1/2\pi$ . Если нагрузка на оболочку представляет пространственный белый шум, спектральная плотность имеет вид (2.5). Подстановка ее в (4.14) и переход к новым переменным интегрирования (2.7) дает

$$\Phi_{\sigma_y}(\omega) = \left(\frac{6D}{h^2}\right)^2 \frac{\Psi(\omega)}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{R(\omega, \sqrt{z} \cos \theta, \sqrt{z} \sin \theta) dz}{|D_k (z^2 + Ehk^2/D) - \rho\omega^2|^2} \quad (4.19)$$

Интеграл по  $z$  вычислим приближенно, используя тот факт, что  $\psi$  мало. В этом случае основной вклад в величину интеграла дают значения подынтегральной функции в области, близкой к тому значению  $z$ , при котором знаменатель подынтегрального выражения достигает минимума, т. е. при  $z$ , близких к

$$z^* = \sqrt{(\rho\omega^2 - Ehk^2)/D} \quad (4.20)$$

Поэтому при вычислении интеграла по  $z$  в (4.20) можно заменить  $R$  его значением при  $z = z^*$ . Тогда получим следующее выражение интеграла по  $z$ :

$$A = R(\omega, \sqrt{z^*} \cos \theta, \sqrt{z^*} \sin \theta) \int_0^\infty \frac{dz}{|D_k(z^2 + Ehk^2/D) - \rho\omega^2|^2} \quad (4.21)$$

Но этот интеграл уже вычислен [см. (2.17)]. Далее, заметим, что при условиях 2.7), (4.20) и при  $\omega^2 > Ehk^2/\rho$  имеем

$$(\rho\omega^2 - Ehk^2)/D > \lambda^4 \quad (4.22)$$

Поэтому в (4.21) должно быть взято нижнее выражение  $R$  по формуле (4.13). Внося туда  $\lambda$  и  $\mu$  по формулам (2.7), (4.20), получим

$$R(\omega, \sqrt{z^*} \cos \theta, \sqrt{z^*} \sin \theta) = \begin{cases} 8(\rho\omega^2 - Ehk^2)D^{-1} \sin^2 \theta & \text{при } \omega \sin \theta > 0 \\ 0 & \text{при } \omega \sin \theta < 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

Подставляя (4.23), (2.17) в (4.21) и затем внося полученное выражение интеграла по  $z$  в (4.19), придем к следующей окончательной формуле:

$$\Phi_{\sigma y} = \frac{36}{h^4} \frac{\pi^2 \Psi(\omega)}{|\psi\omega|} \left(\frac{D}{\rho}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{Ehk^2}{\rho\omega^2}\right)^{1/2} \quad (4.24)$$

При отрицательном подкоренном выражении в (4.24)  $\Phi$  равно нулю.

Сравнивая (4.24) с (3.14), найдем, что отношение спектральной плотности напряжений в заделке оболочки к ее значению вдали от края равно

$$16 / (3 + 2\nu + 3\nu^2) \approx 4.14 \quad \text{при } \nu = 0.3$$

Подобный результат для дисперсий напряжений в пластинке получен ранее в работе В. В. Болотина [2].

Поступила 30 III 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. Госстройиздат, 1961.
2. Болотин В. В. Об упругих колебаниях, возбуждаемых случайными силами с широким спектром. Изв. высш. учебн. завед., Машиностроение, 1963, № 4.
3. Болотин В. В. Применение методов теории вероятностей в теории пластин и оболочек. Теория оболочек и пластин. Труды IV Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. Изд. АН АрмССР, 1964.
4. Dyer I. Response of Space vehicle structures to rocket engine noise. Random vibration, 1963, vol. 2, ch. 7, Crandall S. ed.
5. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.
6. Болотин В. В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
7. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. Судпромгиз, 1961.
8. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.