В случае задачи 4 неизвестные величины σ_x (0, y), τ_{xy}(0, y) входят во все условия (5.3), (5.5), (5.6). Определение этих величин требуется и для построения решения задачи и для получения условия, налагаемого на краевые функции f_1 (y) и f_2 (y) в (1.4).

Для определения σ_x (0, y), τ_{xy} (0, y) в условиях (5.3), (5.5) заменим интегралы от 0 до единицы интегралами от —1 до 1, добавим к ним еще одно очевидное условие

$$\int_{-1}^{1} \tau_{xy}(0, y)\, dy = 0$$

перейдем к матричной форме записи и воспользуемся методом, изложенным выше при решении задачи 4 в случае кососимметричной деформации.

Подставляя определенное таким образом значение τ_{xy} (0, y) в (5.6) и заменяя $2\mu u$ (0, y) через f_1 (y), получим условие, налагаемое на краевые функции f_1 (y) и f_2 (y), выполнение которого необходимо и достаточно для существования затухающего решения.

Поступила 21 XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнения теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
2. Гусейн-Заде М. И. Об условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
3. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля. ч. II. Судпромгиз, 1941.
4. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Гостехиздат, 1955.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТРУБЫ ПРИ ПРОТЕКАНИИ ЧЕРЕЗ НЕЕ ЖИДКОСТИ

А. А. Мовчан (Москва)

Задача об устойчивости трубы при протекании через нее жидкости, рассмотренная в работе В. И. Феодосьева [1] методом Галеркина, решена прямым методом Ляпунова без предположения о представимости прогиба в виде произведения функции координат на функцию времени. Показано, что полученное в [1] значение критической скорости является точным. Найдено, что при ненулевых докритических скоростях течения жидкости собственные колебания трубы являются бегущими вдоль трубы волнами.

1. Уравнения работы [1] для прогиба трубы w (x, t) после введения безразмерных переменных можно представить в виде

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \pi^2 v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\pi\rho v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{1.1}$$

$$w(x, t)\Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = w(x, t)\Big|_{x=1} = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}\Big|_{x=1} = 0$$

Безразмерная скорость жидкости v и безразмерный параметр массы ρ определяются равенствами

$$v = V\frac{a}{\pi}\left(\frac{\rho_2 F_2}{EI}\right)^{1/2}, \qquad \rho = \left(\frac{\rho_2 F_2}{\rho_1 F_1 + \rho_2 F_2}\right)^{1/2}$$

где a — длина трубы, EI — жесткость трубы, $\rho_1 F_1$ и $\rho_2 F_2$ — массы трубы и жидкости соответственно, приходящиеся на единицу длины трубы, V — скорость жидкости в направлении оси x.

Легко проверить, что решения w (x, t) задачи (1.1) удовлетворяют соотношениям

$$\frac{dH}{dt} = 0, \qquad H = \int_0^1 dx \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x^2} - \pi^2 v^2 \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \overline{w}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial \overline{w}}{\partial t}\right) \tag{1.2}$$

Здесь и ниже функции $w(x, t)$ предполагаются непрерывными по совокупности x, t вместе с производными, которые встречаются при получении соотношений (1.2) из уравнений (1.1). Третий член первого уравнения (1.1) не вошел в интеграл энергии (1.2), что свидетельствует о гироскопическом характере этого члена.

Уравнения (1.1) допускают решение $w(x, t) \equiv 0$, отвечающее равновесию трубы. При исследовании устойчивости этого равновесия выберем в качестве меры возмущений функционал

$$\rho(z) = \sup_x w\bar{w} + \sup_x \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \int_0^1 dx \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial \bar{w}}{\partial t}\right) \tag{1.3}$$

определенный на точках

$$z = \left[w(x, t), \ \frac{\partial w(x, t)}{\partial t}\right]_{t=\mathrm{const}}$$

Равновесие $w(x, t) \equiv 0$ будем считать устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что всякое решение задачи (1.1), удовлетворяющее в начальный момент времени t_0 условию

$$\rho(z(t_0)) < \delta \tag{1.4}$$

при всех $t \geqslant t_0$ из области определения решения $w(x, t)$ удовлетворяет условию

$$\rho(z(t)) < \varepsilon \tag{1.5}$$

Здесь принято определение 3.2 [2] устойчивости, равномерной на множестве начальных моментов времени $T_0 = T\ (-\infty < t < \infty)$.

2. Используем функционал $H(z)$, определенный вторым равенством (1.2), для доказательства следующего утверждения: при выполнении условия

$$v^2 < 1 \tag{2.1}$$

равновесие $w(x, t) \equiv 0$ устойчиво.

Первое равенство (1.2) показывает, что для рассматриваемых решений $w(x, t)$ задачи (1.1) функционал $H(z)$ не возрастает с течением времени. Согласно теореме 5.2 [2], остается доказать, что при выполнении условия (2.1) функционал $H(z)$ будет определенно-положительным и непрерывным по отношению к мере возмущений (1.3). Эти свойства непосредственно следуют из соотношений

$$H(z) \geqslant {}^1/_8 (1 - v^2)\, \rho(z), \qquad H(z) \leqslant \rho(z)$$

при доказательстве которых учтено, что для функций $w(x, t)$, описывающих рассматриваемые движения трубы, выполняются неравенства

$$\begin{gathered} \int_0^1 dx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \geqslant \pi^2 \int_0^1 dx \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \geqslant \pi^4 \int_0^1 dx\, w\bar{w}; \\ \int_0^1 dx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \geqslant \sup_x \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}, \qquad \int_0^1 dx \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \geqslant \sup_x w\bar{w} \end{gathered} \tag{2.2}$$

Первые два неравенства (2.2) можно получить методами, данными в работах [3,4], остальные два неравенства легко получить при помощи неравенства Коши — Буняковского.

Доказанное утверждение оставляет открытым вопрос о свойствах устойчивости равновесия $w(x, t) \equiv 0$, если условие (2.1) нарушено.

Легко проверить, что при выполнении любого из условий

$$v = \pm m \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{2.3}$$

равновесие $w(x, t) \equiv 0$ неустойчиво, так как в этом случае уравнения (1.1) допускают решение

$$w(x, t) = c\,[(t - t_0) \sin m\pi x + \varphi(x)] \tag{2.4}$$

$$\varphi(x) = \pm \frac{2\rho}{m^2\pi^2}\left\{x\,[1 - (-1)^m] - 1 + \cos m\pi x + \frac{m\pi x}{\pi} \sin m\pi x\right\}$$

Выбор произвольной постоянной c в решении (2.4) позволяет удовлетворить в начальный момент времени t_0 условию (1.4) при любом заданном числе $\delta > 0$, однако условие (1.5) при достаточно большом $t > t_0$ нарушится. Неустойчивость равновесия $w(x, t) \equiv 0$ при выполнении любого из условий (2.3) обусловлена ростом решения (2.4) с течением времени t.

Итак, применительно к уравнениям (1.1) точное значение первой безразмерной критической скорости дается равенством $v = \pm 1$. Отсюда при переходе к размерным величинам получается критическая скорость работы [1]

$$V = \pm \frac{\pi}{a} \left(\frac{EI}{\rho_2 F_2}\right)^{1/2}$$

3. Условие устойчивости (2.1) получено нами без ограничения на вид решений задачи (1.1). Вводя дополнительное предположение о представимости решений в виде

$$w(x, t) = X(x) e^{\omega t} \tag{3.1}$$

получим из (1.1) для функции $X(x)$ и частоты $\omega = p + iq$ обобщенную краевую задачу

$$X^{\text{IV}}(x) + \pi^2 v^2 X''(x) + 2\pi\rho v\omega X'(x) + \omega^2 X(x) = 0 \tag{3.2}$$

$$X(0) = X''(0) = X(1) = X''(1) = 0$$

Нули собственной функции $X(x)$, отвечающей какому-нибудь собственному значению ω, разделяют промежуток $0 \leqslant x \leqslant 1$ на конечное число интервалов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, в каждом из которых функция может быть представлена в виде

$$X(x) = |X(x)| e^{i\psi(x)}$$

где функция $\psi(x) = \operatorname{Arg} X(x)$ непрерывна на ξ_k. Отсюда видно, что вещественная и мнимая части решения (3.1), которые также будут решениями задачи (1.1), на каждом из интервалов ξ_k представимы в виде (3.3)

$$w(x, t) = |X(x)| e^{pt} \cos[\psi(x) + qt], \qquad w(x, t) = |X(x)| e^{pt} \sin[\psi(x) + qt]$$

Используя соотношения (1.2), (2.2), можно доказать следующее утверждение: при выполнении условия $0 < v^2 < 1$ все собственные значения ω задачи (3.2) являются чисто мнимыми числами ($\omega = iq$, $q \neq 0$, $p = 0$), причем на каждом из интервалов ξ_k для соответствующих решений (3.3) выполняется условие $\psi(x) \neq \text{const}$, т. е. колебания (3.3) имеют вид волн, бегущих вдоль трубы.

Заметим, что при нарушении условия $0 < v^2 < 1$ высказанное утверждение может не выполняться. Например, при выполнении любого из условий (2.3) обобщенная краевая задача (3.2) имеет двукратное собственное значение $\omega = 0$, которому отвечают собственная функция $X(x) = \sin m\pi x$ и присоединенная [5] функция $\varphi(x)$, входящая в решение (2.4).

Для собственной функции $X(x) = \sin m\pi x$ на каждом из интервалов ξ_k, где $X(x)$ не обращается в нуль, выполняется условие $\psi = \text{const}$ ($\psi = 0$ или $\psi = \pi$).

Поступила 6 V 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В. И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости. Инж. сб., Изд-во АН СССР, 1951, т. 10.
2. Мовчан А. А. Устойчивость процессов по двум метрикам. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
3. Стеклов В. А. Основные задачи математической физики. Изд-во АН СССР, 1922—1923.
4. Крылов Н. М. О некоторых неравенствах, устанавливаемых при изложении метода Шварца — Пуанкаре — Стеклова и встречающихся также при решении многих минимальных задач (1915). Избр. тр., т. 1, стр. 113, Изд-во АН УССР, Киев, 1961.
5. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. Докл. АН СССР, 1951, т. 77, № 1, стр. 11—14.