О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЗАТУХАЮЩИХ РЕШЕНИЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПОЛОСЫ

М. И. Гусейн-Заде (Москва)

В связи с построением уточненной теории изгиба пластинок [1] представляет интерес установить условия существования затухающих решений для полуполосы со свободными от напряжений продольными кромками при различных условиях на краю. В работе [2] для двух задач, соответствующих заданию на краю одного условия для напряжений и одного условия для смещений, получены достаточные условия существования затухающих решений, представимых рядами по функциям Папковича [3]. Случай задания на краю обеих составляющих смещения остался не исследованным.

В настоящей работе для получения решений уравнений Ламе применяется преобразование Лапласа, что позволяет с единой точки зрения подойти к решению задач, отвечающих различным условиям на краю, и установить необходимые и достаточные условия существования затухающих решений.

1. Рассмотрим четыре вида условий на краю $x = 0$ полуполосы

$$\sigma_x(0, y) = f_1(y), \qquad \tau_{xy}(0, y) = f_2(y) \qquad \text{(Задача 1)} \tag{1.1}$$

$$2\mu\, u(0, y) = f_1(y), \qquad \tau_{xy}(0, y) = f_2(y) \qquad \text{(Задача 2)} \tag{1.2}$$

$$\sigma_x(0, y) = f_1(y), \qquad 2\mu\, v(0, y) = f_2(y) \qquad \text{(Задача 3)} \tag{1.3}$$

$$2\mu\, u(0, y) = f_1(y), \qquad 2\mu\, v(0, y) = f_2(y) \qquad \text{(Задача 4)} \tag{1.4}$$

Граничные условия при $y = \pm 1$ для всех четырех задач имеют вид

$$\sigma_y(x, \pm 1) = 0, \qquad \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0 \tag{1.5}$$

Установим условия (необходимые и достаточные), налагаемые на краевые функции $f_1(y)$, $f_2(y)$, при выполнении которых решение уравнений Ламе

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} &= 0 \\ \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} &= 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

отвечающее заданным условиям на краю и на кромках полуполосы, имеет затухающий характер в направлении оси x, т. е. $u(x, y) \to 0$, $v(x, y) \to 0$ при $x \to \infty$.

Рассмотрим решения уравнений Ламе в классе функций, содержащем как затухающие, так и возрастающие функции. Условимся, что порядок возрастания функций при $x \to \infty$ не выше степенного.

Применим к уравнениям Ламе преобразование Лапласа по переменной x. Полагая, что

$$U(p; y) = \int_0^\infty u(x, y)\, e^{-px}\, dx, \qquad V(p; y) = \int_0^\infty v(x, y)\, e^{-px}\, dx \tag{1.7}$$

получим для $U(p; y)$, $V(p; y)$ неоднородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} p^2 U + \frac{\lambda + \mu}{\mu} p \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{1}{\mu}\, \Phi(p, y) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} p^2 V + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} p \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{1}{\lambda + 2\mu}\, \Psi(p, y) \end{aligned} \tag{1.8}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(p, y) &= (\lambda + 2\mu)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} + (\lambda + \mu)\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{x=0} + (\lambda + 2\mu)\, p u(0, y) \\ \Psi(p, y) &= \mu\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} + (\lambda + \mu)\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=0} + \mu p v(0, y) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Общее решение (1.8) содержит четыре произвольных постоянных, зависящих от параметра p, и имеет вид

$$U(p, y) = a_1(p)\sin py + a_2(p)\cos py + a_3(p)\, py\cos py + \\ + a_4(p)\, py\sin py + U_0(p; y) \qquad (1.10)$$

$$V(p, y) = (-a_2(p) - \varkappa_1 a_4(p))\sin py + (a_1(p) - \varkappa_1 a_3(p))\cos py + \\ + a_4(p)\, py\cos py - a_3(p)\, py\sin py + V_0(p, y)$$

где

$$U_0(p, y) = b_1(p, y)\sin py + b_2(p, y)\cos py + b_3(p, y)\, py\cos py + \\ + b_4(p, y)\, py\sin py \qquad (1.11)$$

$$V_0(p, y) = (-b_2(p, y) - \varkappa_1 b_4(p, y))\sin py + (b_1(p, y) - \varkappa_1 b_3(p, y))\cos py + \\ + b_4(p, y)\, py\cos py - b_3(p, y)\, py\sin py$$

$$b_1(p, y) = \frac{\varkappa}{p}\int_{y_1}^{y}[\Psi(p, y)\, py\cos py + \Phi(p, y)(\varkappa_1\cos py - py\sin py)]\, dy$$

$$b_2(p, y) = \frac{\varkappa}{p}\int_{y_2}^{y}[-\Psi(p, y)\, py\sin py - \Phi(p, y)(\varkappa_1\sin py + py\cos py)]\, dy$$

$$b_3(p, y) = \frac{\varkappa}{p}\int_{y_1}^{y}[\Psi(p, y)\sin py + \Phi(p, y)\cos py]\, dy \qquad (1.12)$$

$$b_4(p, y) = \frac{\varkappa}{p}\int_{y_2}^{y}[-\Psi(p, y)\cos py + \Phi(p, y)\sin py]\, dy$$

$$\varkappa_1 = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}, \qquad \varkappa = \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}$$

Выразив в (1.5) напряжения через перемещения и применив преобразование Лапласа, получим

$$-\lambda u(0, \pm 1) + (\lambda + 2\mu)\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{y=\pm 1} + \lambda p U(p, \pm 1) = 0$$
$$-\mu v(0, \pm 1) + \mu\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=\pm 1} + \mu p V(p, \pm 1) = 0 \qquad (1.13)$$

Условия (1.13) позволяют определить $a_i(p)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, входящие в (1.10).

2. Остановимся сначала на исследовании кососимметричной деформации полуполосы. Будем полагать, что в (1.1) — (1.4) функции $f_1(y)$ — нечетные, а $f_2(y)$ — четные, что в общем решении (1.10) коэффициенты $a_2(p)$, $a_4(p)$ равны нулю и что в (1.12) нижние пределы y_1 и y_2 равны -1 и 0 соответственно. Определяя $a_1(p)$, $a_3(p)$ из условий (1.13), имеем

$$a_1(p) = -\frac{1}{\varphi(p)}\left[b_2(p, 1)\left(\cos^2 p - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\right) + pb_4(p; 1)\left(-p - \frac{\mu(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)^2}\frac{1}{p}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\lambda}{2\mu} u(0, 1)\left(\sin p + \frac{\mu}{\lambda + \mu}\frac{\cos p}{p}\right) - \frac{1}{2} v(0, 1)\left(-\cos p + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\frac{\sin p}{p}\right)\right] \qquad (2.1)$$

$$a_3(p) = -\frac{1}{\varphi(p)}\left[-b_2(p, 1) + pb_4(p, 1)\left(-\frac{\mu}{\lambda + \mu}\frac{1}{p} - \frac{\cos^2 p}{p}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\lambda}{2\mu} u(0, 1)\frac{\cos p}{p} - \frac{1}{2} v(0, 1)\frac{\sin p}{p}\right], \qquad \varphi(p) = \sin p\cos p - p$$

Значения $b_2(p, 1)$, $b_4(p, 1)$ получим из (1.12), полагая $y = 1$.

Из изложенного следует, что в выражения (1.10) для $U(p, y)$, $V(p, y)$ входят значения величин $u(x, y)$, $\partial u / \partial x$, $\partial u / \partial y$, $v(x, y)$, $\partial v / \partial x$, $\partial v / \partial y$ при $x = 0$. В случае краевых условий (1.1) — (1.4) известна лишь часть этих величин. Следовательно, в выражения (1.10) входят как известные из краевых условий величины, так и неизвестные.

В плоскости комплексного переменного p функции $U(p, y)$, $V(p, y)$ имеют особенности в точках, соответствующих корням уравнения

$$\varphi(p) = \sin p \cos p - p = 0 \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) имеет корень третьего порядка в начале координат и бесконечное множество четверок комплексных корней первого порядка p_n, $\bar{p}_n$, $-\bar{p}_n$, $-p_n$ $n = 1, 2, \ldots$). В соответствии с этим $U(p, y)$ имеет полюс третьего порядка в точке $p = 0$ и полюсы первого порядка в комплексных корнях уравнения (2.2), а $V(p, y)$ — полюс четвертого порядка в точке $p = 0$ и полюсы первого порядка в остальных корнях уравнения (2.2).

По условию $u(x, y)$, $v(x, y)$ относятся к классу функций, порядок возрастания которых при x, стремящемся к бесконечности, не выше степенного. Поэтому $U(p; y)$, $V(p; y)$ не должны иметь особенностей, расположенных правее мнимой оси. Для этого необходимо, чтобы вычеты $U(p; y)e^{px}$, $V(p, y)e^{px}$ относительно полюсов p_n, $\bar{p}_n$ с положительной действительной частью равнялись нулю. Но обращение в нуль указанных вычетов и достаточно для того, чтобы порядок роста $u(x, y)$, $v(x, y)$ при $x\to\infty$ был не выше степенного.

Определяя вычеты $U(p; y)e^{px}$, $V(p; y)e^{px}$ относительно полюса p_n, получим

$$\operatorname{res}_{p_n} U(p; y)e^{px} = F(p_n)\frac{\varkappa}{p_n\varphi'(p_n)}\left[\left(\cos^2 p_n - \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\right)\sin p_n y - p_n y\cos p_n y\right]e^{p_n x}$$

$$\operatorname{res}_{p_n} V(p; y)e^{px} = F(p_n)\frac{\varkappa}{p_n\varphi'(p_n)}\left[\left(\cos^2 p_n + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\cos p_n y + p_n y\sin p_n y\right]e^{p_n x} \tag{2.3}$$

где

$$F(p_n) = \int_0^1\left\{\Psi(p_n, y)\left[p_n y\sin p_n y + \cos p_n y\left(\cos^2 p_n + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \Phi(p_n, y)\left[p_n y\cos p_n y - \sin p_n y\left(\cos^2 p_n - \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\right)\right]\right\}dy - \tag{2.4}$$

$$-\frac{\lambda(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}u(0, 1)\cos p_n - \frac{\mu(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}v(0, 1)\sin p_n$$

Из условия обращения в нуль вычетов $U(p; y)e^{px}$, $V(p; y)e^{px}$ относительно полюсов с положительной действительной частью следует, что

$$F(p_n) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.5}$$

Применяя теорему обращения, получим

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U(p; y)e^{px}dp, \qquad v(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} V(p; y)e^{px}dp \quad (\sigma > 0)$$

Отсюда

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{res}_{-p_n} + \operatorname{res}_{-\bar{p}_n})U(p; y)e^{px} + \operatorname{res}_0 U(p; y)e^{px}$$

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{res}_{-p_n} + \operatorname{res}_{-\bar{p}_n})V(p; y)e^{px} + \operatorname{res}_0 V(p; y)e^{px} \tag{2.6}$$

Вычеты относительно полюсов с отрицательной действительной частью дают члены, затухающие по экспоненте; вычеты относительно полюса $p = 0$ дают члены, возрастающие по степенному закону.

Для того чтобы $u(x, y)$, $v(x, y)$ были затухающими функциями, необходимо, чтобы вычеты относительно полюса $p = 0$ обращались в нуль, т. е. необходимо, чтобы

$$\operatorname{res}_0 U(p, y)\, e^{px} = 0, \qquad \operatorname{res}_0 V(p, y)\, e^{px} = 0 \tag{2.7}$$

Но условия (2.7) и достаточны для того, чтобы $u(x, y)$, $v(x, y)$ были затухающими функциями, так как, если эти условия выполняются, то $u(x, y)$, $v(x, y)$ не будут содержать незатухающих членов.

Определяя вычеты $U(p; y)\, e^{px}$, $V(p; y)\, e^{px}$ относительно точки $p = 0$, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_0 U(p; y)\, e^{px} &= -\frac{3y}{8}\,\frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)}\left(Ax^2 + 2Bx + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}C\right) \\ \operatorname{res}_0 V(p; y)\, e^{px} &= \frac{3}{8}\,\frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)}\left(\frac{1}{3}Ax^3 + Bx^2 + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}Cx + D\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

где

$$A = \mu\left[\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0} dy + u(0, 1)\right]$$

$$B = (\lambda + 2\mu)\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} dy - \lambda\int_0^1 v(0, y)\, dy + \lambda v(0, 1)$$

$$C = \lambda\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0} y^2 dy + 2(3\lambda + 4\mu)\int_0^1 u(0, y)\, y dy + \lambda u(0, 1) \tag{2.9}$$

$$D = \frac{1}{3}(3\lambda + 4\mu)\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} y^3 dy - (3\lambda + 2\mu)\int_0^1 v(0, y)\, y^2 dy + $$

$$+ \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}\int_0^1 v(0, y)\, dy + \frac{\lambda(3\lambda + 4\mu)}{3(\lambda + 2\mu)}\, v(0, 1)$$

Из (2.7) и (2.8) имеем

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0 \tag{2.10}$$

Таким образом, при выполнении условий (2.5) и (2.10) смещения в полуполосе имеют затухающий характер. Из (2.6) и (2.7) видно, что $u(x, y)$, $v(x, y)$ при $x > 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ представляются равномерно сходящимися рядами, каждый член которых при $x \to \infty$ затухает по экспоненте. Отсюда следует, что напряжения в полуполосе также имеют затухающий характер.

3. В выражения (2.9) для A, B, C, D и в (2.4) для $F(p_n)$ входят смещения и их производные при $x = 0$. Эти выражения можно преобразовать таким образом, что в них войдут только величины $u(0, y)$, $v(0, y)$, $\sigma_x(0, y)$, $\tau_{xy}(0, y)$. Тогда условия (2.10) запишутся в виде

$$\int_0^1 \tau_{xy}(0, y)\, dy = 0 \tag{3.1}$$

$$\int_0^1 \sigma_x(0, y)\, y dy = 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\lambda}{4(\lambda + \mu)}\int_0^1 \tau_{xy}(0, y)\, y^2 dy + 2\mu\int_0^1 u(0, y)\, y\, dy = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{3\lambda + 4\mu}{6(\lambda + \mu)}\int_0^1 \sigma_x(0, y)\, y^3 dy - 2\mu\int_0^1 v(0, y)(y^2 - 1)\, dy = 0 \tag{3.4}$$

а условия (2.5) — в виде

$$\int_0^1 [\sigma_x(0, y)\, h_n(y) + \tau_{xy}(0, y)\, g_n(y) + 2\mu u(0, y)\, s_n(y) + 2\mu v(0, y)\, t_n(y)]\, dy = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.5}$$

где

$$\begin{aligned} h_n(y) &= p_n y \cos p_n y + \sin p_n y \left(\sin^2 p_n + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) \\ g_n(y) &= p_n y \sin p_n y + \cos p_n y \left(\cos^2 p_n + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) \\ s_n(y) &= p_n [p_n y \cos p_n y + \sin p_n y (\sin^2 p_n + 1)] \\ t_n(y) &= p_n [p_n y \sin p_n y - \cos p_n y \sin^2 p_n] \end{aligned} \tag{3.6}$$

Полученная система условий (3.1) — (3.5) позволяет определить неизвестные величины, входящие в решение задачи, и получить два условия, налагаемых на краевые функции, которые необходимы и достаточны для существования затухающих решений.

Для задачи 1, подставляя (1.1) в (3.1) и (3.2), получим два условия

$$\int_0^1 f_2(y)\, dy = 0, \qquad \int_0^1 f_1(y)\, y dy = 0 \tag{3.7}$$

Система условий (3.3) — (3.5) служит для определения неизвестных величин $u(0, y)$, $v(0, y)$. Способ определения этих величин будет показан на примере задачи 4.

Для задачи 2, подставляя (1.2) в (3.1) и (3.3), имеем условия

$$\int_0^1 f_2(y)\, dy = 0, \qquad \frac{\lambda}{4(\lambda+\mu)} \int_0^1 f_2(y)\, y^2\, dy + \int_0^1 f_1(y)\, y dy = 0 \tag{3.8}$$

Система остальных условий (3.2), (3.4) и (3.5) позволяет определить $\sigma_x(0, y)$, $v(0, y)$. Однако для получения затухающего решения задачи нет необходимости определять $\sigma_x(0, y)$, $v(0, y)$ из этой системы. В самом деле, в решение задачи входят вычеты $U(p;\, y)\, e^{px}$, $V(p;\, y)\, e^{px}$ относительно полюсов $-p_n$, $-\bar{p}_n$; значения этих вычетов можно получить из (2.3), (2.4) заменой p_n на $-p_n$ и $-\bar{p}_n$ соответственно. Неизвестные $\sigma_x(0, y)$, $v(0, y)$ входят в выражения $F(-\bar{p}_n)$, $F(-p_n)$ таким образом, что они легко исключаются на основании условий (3.5).

Для задачи 3, подставляя (1.3) в (3.2) и (3.4), получим два условия

$$\int_0^1 f_1(y)\, y dy = 0, \qquad \frac{3\lambda + 4\mu}{6(\lambda+\mu)} \int_0^1 f_1(y)\, y^3 dy - \int_0^1 f_2(y)\, (y^2 - 1)\, dy = 0 \tag{3.9}$$

Как и в предыдущем случае, нет необходимости определять неизвестные $\tau_{xy}(0, y)$, $u(0, y)$ из системы условий (3.1), (3.3) и (3.5), так как они легко исключаются из решения задачи на основании условий (3.5).

Обратимся к рассмотрению задачи 4. Неизвестные величины $\sigma_x(0, y)$, $\tau_{xy}(0, y)$ входят во все условия (3.1) — (3.4). Таким образом, определение этих величин требуется не только для построения решения задачи, но и для получения условий, налагаемых на краевые функции $f_1(y)$ и $f_2(y)$ в (1.4). Методы функционального анализа позволяют определить $\sigma_x(0, y)$, $\tau_{xy}(0, y)$ из системы условий (3.1), (3.2) и (3.5). После того как будут определены $\sigma_x(0, y)$, $\tau_{xy}(0, y)$, из (3.3) и (3.4) получим в довольно сложной форме условия, налагаемые на краевые функции $f_1(y)$ и $f_2(y)$.

Заметим, что необходимые и достаточные условия затухания решений (3.7) — (3.9), установленные для задач 1, 2, 3 соответственно, совпадают с условиями, полученными для этих же задач в [2] другими способами. Но в работе [2] для задач 2, 3 был установлен лишь достаточный характер полученных условий.

4. Остановимся на вопросе определения неизвестных величин $\sigma_x(0, y)$, $\tau_{xy}(0, y)$ из системы условий (3.1), (3.2) и (3.5). Заметим, что эту систему условий можно дополнить условиями

$$F(\bar{p}_n) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.1}$$

которые равносильны (3.5).

Воспользуемся матричной формой записи [4]. Обозначим

$$W(y) = \begin{pmatrix} \sigma_x(0, y) \\ \tau_{xy}(0, y) \end{pmatrix}, \qquad \Phi_n(y) = \begin{pmatrix} h_n(y) & g_n(y) \\ \bar{h}_n(y) & \bar{g}_n(y) \end{pmatrix}, \qquad \Phi_0(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n \\ \bar{a}_n \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a_n = -\int_0^1 [f_1(y)\, s_n(y) + f_2(y)\, t_n(y)]\, dy \tag{4.2}$$

Для матрицы, являющейся интегралом от произведения двух матриц $M_i(y)$ и $N_j(y)$, введем обозначение

$$J(M_i, N_j) = \int_0^1 M_i(y)\, N_j(y)\, dy \tag{4.3}$$

Тогда систему условий (3.1), (3.2), (3.5) и (4.1), учитывая (1.4), представим в виде

$$J(\Phi_n, W) = A_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.4}$$

Задача определения матрицы $W(y)$ из условий (4.4) аналогична задаче определения функции из ее разложения по неортогональной системе функций.

Если бесконечная система матриц $\Phi_n(y)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ полна, то условия (4.4) позволяют определить матрицу $W(y)$ единственным образом. Доказательства полноты бесконечной системы матриц $\Phi_n(y)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ не проводилось. Однако есть основания предполагать, что эта система полна.

От системы матриц $\Phi_n(y)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ перейдем к ортогональной системе матриц $\Psi_n(y)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Будем считать, что матрица $\Psi_n(y)$ ортогональна к матрице $\Psi_k(y)$, если

$$\int_0^1 \Psi_n(y)\, \Psi_k^*(y)\, dy = 0 \tag{4.5}$$

где звездочка обозначает транспонированную матрицу. Систему матриц $\Psi_n(y)$ составим следующим образом:

$$\begin{aligned} &\Psi_0(y) = \Phi_0(y) \\ &\Psi_1(y) = C_0^{(1)}\Psi_0(y) + \Phi_1(y) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Psi_n(y) = C_0^{(n)}\Psi_0(y) + C_1^{(n)}\Psi_1(y) + \ldots + C_{n-1}^{(n)}\Psi_n(y) + \Phi_n(y) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4.6}$$

Здесь квадратные числовые матрицы $C_0^{(1)}, C_0^{(2)}, C_1^{(2)}, \ldots$ выбираются таким образом, что матрица $\Psi_1(y)$ ортогональна к матрице $\Psi_0(y)$, матрица $\Psi_2(y)$ ортогональна к $\Psi_0(y)$ и к $\Psi_1(y)$ и т. д. Выпишем формулы для $C_0^{(n)}, C_1^{(n)}, \ldots, C_{n-1}^{(n)}$

$$\begin{aligned} C_0^{(n)} &= -J(\Phi_n, \Psi_0^*)\, J^{-1}(\Psi_0, \Psi_0^*) \\ C_1^{(n)} &= -J(\Phi_n, \Psi_1^*)\, J^{-1}(\Psi_1, \Psi_1^*) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{n-1}^{(n)} &= -J(\Phi_n, \Psi_{n-1}^*)\, J^{-1}(\Psi_{n-1}, \Psi_{n-1}^*) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Существование обратных матриц в (4.7) нетрудно установить на основании линейной независимости матриц $\Phi_n(y)$. По построению система матриц $\Psi_n(y)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ такова, что $\Psi_n(y)$ ортогональна ко всем $\Psi_k(y)$, для которых $k < n$.

Принимая во внимание, что транспонированное произведение матриц равно произведению транспонированных сомножителей, взятых в обратном порядке, получим, что матрица $\Psi_n(y)$ ортогональна ко всем матрицам $\Psi_k(y)$ из системы (4.6).

Составим разложение $W(y)$ в ряд по ортогональной системе матриц $\Psi_n(y)$

$$W(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n^*(y)\,\alpha_n \tag{4.8}$$

Для определения матриц α_n, являющихся коэффициентами в разложении (4.8), умножим обе части равенства (4.8) слева на $\Psi_m(y)$ и проинтегрируем по y от 0 до 1. Так как система $\Psi_n(y)$ ортогональна, то справа останется лишь один член с α_m, т. е.

$$J(\Psi_m, W) = J(\Psi_m, \Psi_m^*)\,\alpha_m$$

Умножая это соотношение слева на матрицу, обратную к матрице, являющейся коэффициентом при α_m, т. е. на $J^{-1}(\Psi_m, \Psi_m^*)$, получим значение α_m. Таким образом, для коэффициентов в (4.8) имеем

$$\alpha_n = J^{-1}(\Psi_n, \Psi_n^*)\, J(\Psi_n, W) \tag{4.9}$$

Коэффициенты α_n можно выразить через A_n, пользуясь соотношениями (4.4). Для этой цели рассмотрим последовательно, начиная с $n = 0$, матрицы $J(\Psi_n, W)$. Принимая во внимание (4.6) и (4.4), получим

$$\begin{gathered} J(\Psi_0, W) = A_0 = B_0 \\ J(\Psi_1, W) = C_0^{(1)} B_0 + A_1 = B_1 \\ J(\Psi_2, W) = C_0^{(2)} B_0 + C_1^{(2)} B_1 + A_2 = B_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{4.10}$$

Подставляя эти выражения в (4.9), получим значения α_n. Таким образом, можно последовательно определять члены ряда (4.8) для $W(y)$.

5. Рассмотрим симметричную деформацию полуполосы. В этом случае следует считать, что в (1.1) — (1.4) функции $f_1(y)$ четные, а $f_2(y)$ — нечетные, что в общем решении (1.10) коэффициенты $a_1(p)$, $a_3(p)$ равны нулю и что в (1.12) нижние пределы y_1 и y_2 равны 0 и —1 соответственно. Определяя $a_2(p)$, $a_4(p)$ из (1.13), имеем

$$\begin{aligned} a_2(p) = \frac{1}{\varphi(p)} \Big\{ & b_1(p, 1)\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \cos^2 p\right) - b_3(p, 1)\left(\frac{\mu(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)^2} + p^2\right) - \\ & - \frac{\lambda}{2\mu} u(0, 1)\left(\cos p - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{\sin p}{p}\right) + \frac{1}{2} v(0, 1)\left(-\sin p - \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{\cos p}{p}\right)\Big\} \\ a_4(p) = \frac{1}{\varphi(p)} \Big\{ & -b_1(p, 1) + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \sin^2 p\right) b_3(p, 1) - \\ & - \frac{\lambda}{2\mu} u(0, 1)\frac{\sin p}{p} + \frac{1}{2} v(0, 1)\frac{\cos p}{p}\Big\} \\ & (\varphi(p) = \sin p \cos p + p) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Значения $b_1(p, 1)$, $b_3(p, 1)$ получаются из (1.12), если принять $y = 1$.

Функции $U(p, y)$, $V(p, y)$ в плоскости комплексного переменного p имеют особенности в точках, соответствующих корням уравнения

$$\varphi(p) = \sin p \cos p + p = 0 \tag{5.2}$$

Уравнение (5.2) имеет корень первого порядка в начале координат и бесконечное множество четверок комплексных корней первого порядка p_n, $\bar p_n$, $-\bar p_n$, $-p_n$ ($n = 1, 2, \ldots$). Нетрудно заметить, что $U(p; y)$ имеет полюс второго порядка в точке $p = 0$ и полюсы первого порядка в комплексных корнях уравнения (5.2), а $V(p, y)$ — полюсы первого порядка во всех корнях уравнения (5.2).

Приравнивая нулю вычеты $U(p, y)\, e^{px}$, $V(p, y)\, e^{px}$ относительно полюсов p_n, $\bar{p}_n$ с положительной действительной частью, получим систему условий, выполнение которых необходимо и достаточно для того, чтобы при x, стремящемся к бесконечности, порядок возрастания $u\,(x, y)$, $v\,(x, y)$ был не выше степенного. Эту систему условий можно записать в виде

$$\int_0^1 [\sigma_x (0, y)\, h_n (y) + \tau_{xy} (0, y)\, g_n (y) + 2\mu u\, (0, y)\, s_n (y) + 2\mu v\, (0, y)\, t_n(y)]\, dy = 0 \qquad (5.3)$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

где

$$\begin{aligned} h_n (y) &= p_n y \sin p_n y - \left(\cos^2 p_n + \frac{\mu}{\lambda + \mu}\right) \cos p_n y \\ g_n (y) &= - p_n y \cos p_n y + \left(\sin^2 p_n + \frac{\mu}{\lambda + \mu}\right) \sin p_n y \\ s_n (y) &= p_n\, [p_n y \sin p_n y - (1 + \cos^2 p_n) \cos p_n y] \\ t_n (y) &= p_n\, [- p_n y \cos p_n y - \cos^2 p_n \sin p_n y] \end{aligned} \qquad (5.4)$$

Приравнивая нулю вычеты $U\,(p, y)\, e^{px}$, $V\,(p, y)\, e^{px}$ относительно полюса $p = 0$ получим еще два условия, выполнение которых совместно с (5.3) необходимо и достаточно для того, чтобы $u\,(x, y)$, $v\,(x, y)$ не содержали незатухающих членов. Эти условия имеют вид

$$\int_0^1 \sigma_x\, (0, y)\, dy = 0 \qquad (5.5)$$

$$2\mu \int_0^1 u\, (0, y)\, dy + \frac{\lambda}{2\,(\lambda + \mu)} \int_0^1 \tau_{xy}\, (0, y)\, y dy = 0 \qquad (5.6)$$

Система условий (5.3), (5.5), (5.6) позволяет определить неизвестные величины входящие в решение задачи, и получить одно условие, налагаемое на краевые функции. выполнение которого необходимо и достаточно для существования затухающего решения. Рассмотрим отдельно каждую из четырех задач, отвечающих условиям (1.1) — (1.4). Для задачи 1, подставляя (1.1) в (5.5), получим условие

$$\int_0^1 f_1\, (y)\, dy = 0 \qquad (5.7)$$

Условия (5.3), (5.6) позволяют определить неизвестные величины $u\,(0, y)$, $v\,(0, y)$, знание которых необходимо для получения затухающего решения задачи. Для того чтобы перейти к матричной форме записи и использовать метод, изложенный выше, заменим в условиях (5.3), (5.6) интегралы от 0 до единицы интегралами от -1 до 1 и добавим еще одно очевидное условие

$$\int_{-1}^1 v\, (0, y)\, dy = 0$$

Для задачи 2, подставляя (1.2) в (5.6), получим условие

$$\int_0^1 f_1\, (y)\, dy + \frac{\lambda}{2\, (\lambda + \mu)} \int_0^1 f_2\, (y)\, y dy = 0 \qquad (5.8)$$

Определять неизвестные $\sigma_x\, (0, y)$, $v\, (0, y)$ из условий (5.3), (5.5) нет необходимости, так как эти величины входят в решение задачи таким образом, что они легко исключаются из него на основании соотношений (5.3).

Для задачи 3, подставляя (1.3) в (5.5), получим условие, налагаемое на $f_1\, (y)$. Заметим, что оно совпадает с условием (5.7) для первой задачи. Система условий (5.3) позволяет исключить неизвестные $\tau_{xy}\, (0, y)$, $u\, (0, y)$, входящие в решение задачи.

В случае задачи 4 неизвестные величины $\sigma_x(0, y)$, $\tau_{xy}(0, y)$ входят во все условия (5.3), (5.5), (5.6). Определение этих величин требуется и для построения решения задачи и для получения условия, налагаемого на краевые функции $f_1(y)$ и $f_2(y)$ в (1.4).

Для определения $\sigma_x(0, y)$, $\tau_{xy}(0, y)$ в условиях (5.3), (5.5) заменим интегралы от 0 до единицы интегралами от -1 до 1, добавим к ним еще одно очевидное условие

$$\int_{-1}^{1} \tau_{xy}(0, y)\, dy = 0$$

перейдем к матричной форме записи и воспользуемся методом, изложенным выше при решении задачи 4 в случае кососимметричной деформации.

Подставляя определенное таким образом значение $\tau_{xy}(0, y)$ в (5.6) и заменяя $2\mu u(0, y)$ через $f_1(y)$, получим условие, налагаемое на краевые функции $f_1(y)$ и $f_2(y)$, выполнение которого необходимо и достаточно для существования затухающего решения.

Поступила 21 XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнения теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
2. Гусейн-Заде М. И. Об условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
3. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля. ч. II. Судпромгиз, 1941.
4. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Гостехиздат, 1955.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТРУБЫ ПРИ ПРОТЕКАНИИ ЧЕРЕЗ НЕЕ ЖИДКОСТИ

А. А. Мовчан (Москва)

Задача об устойчивости трубы при протекании через нее жидкости, рассмотренная в работе В. И. Феодосьева [1] методом Галеркина, решена прямым методом Ляпунова без предположения о представимости прогиба в виде произведения функции координат на функцию времени. Показано, что полученное в [1] значение критической скорости является точным. Найдено, что при ненулевых докритических скоростях течения жидкости собственные колебания трубы являются бегущими вдоль трубы волнами.

1. Уравнения работы [1] для прогиба трубы $w(x, t)$ после введения безразмерных переменных можно представить в виде

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \pi^2 v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\pi\rho v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{1.1}$$

$$w(x, t)\Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = w(x, t)\Big|_{x=1} = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}\Big|_{x=1} = 0$$

Безразмерная скорость жидкости v и безразмерный параметр массы ρ определяются равенствами

$$v = V\frac{a}{\pi}\left(\frac{\rho_2 F_2}{EI}\right)^{1/2}, \qquad \rho = \left(\frac{\rho_2 F_2}{\rho_1 F_1 + \rho_2 F_2}\right)^{1/2}$$

где a — длина трубы, EI — жесткость трубы, $\rho_1 F_1$ и $\rho_2 F_2$ — массы трубы и жидкости соответственно, приходящиеся на единицу длины трубы, V — скорость жидкости в направлении оси x.

Легко проверить, что решения $w(x, t)$ задачи (1.1) удовлетворяют соотношениям

$$\frac{dH}{dt} = 0, \qquad H = \int_0^1 dx \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x^2} - \pi^2 v^2 \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \overline{w}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial \overline{w}}{\partial t}\right) \tag{1.2}$$