ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА

К. Г. Валеев (Ленинград)

В заметке рассматривается случай движения спутника под действием ньютоновой силы и дополнительной возмущающей силы, которая направлена перпендикулярно скорости движения и лежит в плоскости траектории. Уравнения движения интегрируются в квадратурах, если величина F силы зависит лишь от скорости v и расстояния r спутника до притягивающего центра.

Уравнения плоского движения точки M с единичной массой (спутник) в полярной системе координат имеют вид

$$r^{\cdot\cdot} - r\varphi^{\cdot 2} + kr^{-2} = F_r, \qquad r\varphi^{\cdot\cdot} + 2r^{\cdot}\varphi^{\cdot} = F_\varphi \qquad (k = \mathrm{const}) \tag{1}$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени, F_r, F_φ — проекции возмущающей силы $\mathbf{F}$ на направления r и φ. При сделанных предположениях о силе имеем

$$F_r = -F(r, v)\frac{r\varphi^{\cdot}}{\sqrt{r^2\varphi^{\cdot 2} + r^{\cdot 2}}}, \qquad F_\varphi = F(r, v)\frac{r^{\cdot}}{\sqrt{r^2\varphi^{\cdot 2} + r^{\cdot 2}}} \tag{2}$$

Ищем решение системы (1), (2) с начальными условиями

$$r = r_0, \quad r^{\cdot} = r_0^{\cdot}, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \varphi^{\cdot} = \varphi_0^{\cdot}, \quad t = t_0 \tag{3}$$

Если продифференцировать по времени квадрат скорости v

$$v^2 = r^2\varphi^{\cdot 2} + r^{\cdot 2} \tag{4}$$

то, в силу (1), (2), приходим к интегрируемому уравнению

$$\frac{dv^2}{dt} = -\frac{2k}{r}\frac{dr}{dt} \tag{5}$$

Из (5) находим интеграл энергии

$$v^2 - 2kr^{-1} = C_1, \qquad C_1 = r_0^2\varphi_0^{\cdot 2} + r_0^{\cdot 2} - 2kr_0^{-1} \tag{6}$$

Второе уравнение (1) можно записать в виде

$$(r^2\varphi^{\cdot})^{\cdot} = F(r, v)\, rv^{-1}r^{\cdot} \tag{7}$$

Из него находим интеграл

$$r^2\varphi^{\cdot} = \Phi(r, C_1, C_2) \tag{8}$$

$$\Phi(r, C_1, C_2) = \int_{r_0}^{r} F(r, v)\frac{r}{v}\,dr + C_1, \qquad C_1 = r_0^2\varphi_0^{\cdot}, \qquad v = \frac{1}{C_1 + 2kr^{-1}} \tag{9}$$

Исключая из (6) производную $\varphi^{\cdot}$, приходим к интегрируемому уравнению

$$r^{\cdot} = (2kr^{-1} + C_1 - \Phi^2(r, C_1, C_2))^{1/2} \tag{10}$$

Отсюда имеем квадратуру

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} (2kr^{-1} + C_1 - \Phi^2(r, C_1, C_2))^{-1/2}\,dr \tag{11}$$

Из (8), (10) находим связь между r и φ

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \Phi r^{-2}(2kr^{-1} + C_1 - \Phi^2)^{-1/2}\,dr \tag{12}$$

В общем случае движение точки M происходит в кольце, которое ограничено окружностями с радиусами r_1, r_2. Числа r_1, r_2 являются простыми корнями подкоренного выражения в (10). Возможен случай $r_2 = \infty$.

А. И. Лурье указал автору, что некоторые случаи движения электронов в электромагнитных полях [1] приводят к уравнениям вида (1), (2).

Поступила 3 X 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Богуславский С. А. Пути электронов в электромагнитных полях. Мосгублит, 1929.