Неравенство (12) примет вид

$$(B_1 r_0 + s)(a_2 r_0 + h_1) + Mgz''(\alpha) > 0$$

В частности, для прямолинейно катящегося колеса ($\alpha_0 = p_0 = 0$) величина $z(\alpha)$ — четная функция α, и $z'(0) = 0$. В этом случае $\zeta(0) = 0$, $\xi(0) = a$ — радиус колеса, $\rho = z(0) + z''(0)$ — радиус кривизны меридиана

$$A_1 = A, \qquad B_1 = B + Ma^2$$

Условие устойчивости имеет вид [4]

$$(Br_0 + s)^2 (Br_0 + s + Ma^2 r_0) - MgaA(1 - \rho / a) > 0$$

3. *Малые регулярные прецессии волчка.* В этом случае

$$\alpha_0 = {}^1/_2\pi - \beta_0; \quad z'({}^1/_2\pi) = 0, \quad z({}^1/_2\pi) + z''({}^1/_2\pi) = \rho, \quad z''({}^1/_2\pi) = \rho l$$

Пусть $O(\beta_0^n)$ — малая величина порядка β_0^n. Из (1) следует, что $p_0 = O(\beta_0)$, и что произведение $p_0 \operatorname{ctg} \beta_0$ ограничено. Условие существования сколь угодно малых прецессий следует из (11) и имеет вид

$$D({}^1/_2\pi, r_0) = \{[B + M\rho^2(1 - l)] r_0 + s\}^2 + 4Mg\rho l\,[A + M\rho^2(1 - l)^2] > 0$$

Неравенство (12) при помощи уравнения (9) приводится к виду

$$D({}^1/_2\pi, r_0) + O(\beta_0) > 0$$

Таким образом, по любой $z(\alpha)$ возможно указать такое $\varepsilon > 0$, что прецессии при ${}^1/_2\pi - \varepsilon < \alpha_0 < {}^1/_2\pi$ будут устойчивы.

Поступила 17 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Д у в а к и н А. П., Об устойчивости движения волчка по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Инж. ж., 1962, т. 2, № 2.
2. Ч а п л ы г и н С. А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости. Гостехиздат., 1948, Собр. соч., т. 1, М.
3. М и н д л и н И. М. Об устойчивости диска, несущего гироскоп. Инж. ж., 1964, т. 4, № 1.
4. М и д л и н И. М. Об устойчивости движения тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости. Инж. ж., 1964, т. 4, № 2.
5. П о ж а р и ц к и й Г. К. О построении функций Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
6. Д у в а к и н А. П. Об устойчивости движений диска. Инж. ж., 1965, т. 5, № 1.

ОПТИМИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ДВУСТУПЕНЧАТОЙ РАКЕТЫ

В. А. Троицкий (Ленинград)

Рассматривается пространственная задача оптимизации движения двуступенчатой ракеты в однородном параллельном силовом поле [1,2]. Сила тяги двигателей обеих ступеней считается ограниченной. При решении используются результаты работы [3].

1. Постановка задачи. Уравнения движения двуступенчатой ракеты в однородном параллельном силовом поле могут быть представлены в виде [4,5]

$$\mathbf{v}^{+\cdot} = \frac{c^+\beta^+}{M_0^+}\mathbf{e}^+ - g\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}^{+\cdot} = \mathbf{v}^+, \qquad M_0^{+\cdot} = -\beta^+, \qquad \mathbf{e}^+\cdot\mathbf{e}^+ = 1 \tag{1.1}$$

$$\mathbf{v}^{-\cdot} = \frac{c^-\beta^-}{M_0^-}\mathbf{e}^- - g\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}^{-\cdot} = \mathbf{v}^-, \qquad M_0^{-\cdot} = -\beta^-, \qquad \mathbf{e}^-\cdot\mathbf{e}^- = 1 \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, $\mathbf{v}$ — вектор скорости, M_0 — масса ракеты, c — скорость истечения, $\mathbf{e}$ — единичный вектор направления тяги, $\mathbf{k}$ — единичный вектор направления сил поля, g — ускорение силы тяжести. Значок «плюс» относится к первой ступени, а значок «минус» — ко второй.

Уравнения (1.1) справедливы при выполнении неравенства

$$M_0^+(t) \geqslant M_1 \tag{1.3}$$

в котором M_1 — масса ракеты в момент $t = t_1$ окончания работы двигателя первой ступени. Уравнениями (1.2) описывается движение второй ступени ракеты. Для него выполняется неравенство

$$M^-(t) \leqslant M_1 - M_c \tag{1.4}$$

где M_c — «сухая» масса первой ступени [6]. Параметр β считается ограниченным. Интервалы его допустимых изменений задаются неравенствами

$$\beta_1^{\pm} \leqslant \beta^{\pm} \leqslant \beta_2^{\pm} \tag{1.5}$$

Граничные значения β_1^+ и β_2^+ могут отличаться от β_1^- и β_2^-.

Задача оптимизации ставится следующим образом.

Среди непрерывных функций $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$, $M(t)$ и кусочно-непрерывных параметров $\beta(t)$ и $\mathbf{e}(t)$, удовлетворяющих в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ уравнениям (1.1) и (1.2) и неравенствам (1.5), а на концах его — соотношениям

$$\varphi_l[\mathbf{r}(t_0), \mathbf{v}(t_0), M(t_0), \mathbf{r}(T), \mathbf{v}(T), M(T), t_0, T] = 0 \quad (l = 1, \ldots, p \leqslant 15) \tag{1.6}$$

найти такие, которые сообщают функционалу

$$J = J[\mathbf{r}(t_0), \mathbf{v}(t_0), M(t_0), t_0, \mathbf{r}(T), \mathbf{v}(T), M(T), T] \tag{1.7}$$

минимальное значение. Введем новую переменную $M(t)$ соотношениями

$$M^+(t) = M_0^+(t), \qquad M^-(t) = M_0^-(t) + M_c \tag{1.8}$$

Тогда уравнения (1.1) и (1.2) примут вид

$$\mathbf{g}_v^+ = \mathbf{v}^{+\cdot} + \frac{c^+\beta^+}{M^+}\mathbf{e}^+ + g\mathbf{k} = 0, \qquad \mathbf{g}_r^+ = \mathbf{r}^{+\cdot} - \mathbf{v}^+ = 0$$
$$g_M^+ = M^{+\cdot} + \beta^+ = 0, \qquad \psi_e^+ = \mathbf{e}^+\cdot\mathbf{e}^+ - 1 = 0 \tag{1.9}$$

$$\mathbf{g}_v^- = \mathbf{v}^{-\cdot} - \frac{c^-\beta^-}{M^- - M_c}\mathbf{e}^- - g\mathbf{k} = 0, \qquad \mathbf{g}_r^- = \mathbf{r}^{-\cdot} - \mathbf{v}^- = 0$$
$$g_M^- = M^{-\cdot} + \beta^- = 0, \qquad \psi_e^- = \mathbf{e}^-\cdot\mathbf{e}^- - 1 = 0 \tag{1.10}$$

и будут иметь разрыв правой части при $t = t_1$, когда выполняется зависимость $\vartheta = M(t_1) - M_1 = 0$. Построим вспомогательные зависимости

$$\psi_\beta^{\pm} = (\beta^{\pm} - \beta_1^{\pm})(\beta_2^{\pm} - \beta^{\pm}) - (u^{\pm})^2 = 0 \tag{1.11}$$

Здесь $u^{\pm}$ — дополнительные управления. После этого задачу оптимизации режимов движения двуступенчатой ракеты можно сформулировать следующим образом.

Среди непрерывных функций $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$, $M(t)$ и кусочно-непрерывных управлений $\beta(t)$, $\mathbf{e}(t)$ и $u(t)$, удовлетворяющих в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ уравнениям (1.9) — (1.11), а на концах его — соотношениям (1.6), найти такие, которые сообщают функционалу (1.7) минимальное значение.

В такой формулировке задача является частным случаем рассмотренной в работе [3] общей задачи оптимизации процессов управления в системах, описываемых дифференциальными уравнениями с разрывными правыми частями.

2. Составление уравнений вариационной задачи. Следуя правилам, изложенным в работе [3], строим функции H и φ. Для них получатся выражения

$$H^+ = H_\lambda^+ + H_\mu^+ = \lambda_v^+\cdot\left(\frac{c^+\beta^+}{M^+}\mathbf{e}^+ - g\mathbf{k}\right) + \lambda_r^+\mathbf{v}^+ - \lambda_M^+\beta^+ + \mu_e^+(\mathbf{e}^+\cdot\mathbf{e}^+ - 1) +$$
$$+ \mu_\beta^+[(\beta^+ - \beta_1^+)(\beta_2^+ - \beta^+) - (u^+)^2] \tag{2.1}$$

$$H^- = H_\lambda^- + H_\mu^- = \lambda_v^-\cdot\left(\frac{c^-\beta^-}{M^- - M_c}\mathbf{e}^- - g\mathbf{k}\right) + \lambda_r^-\cdot\mathbf{v}^- - \lambda_M^-\beta^- + \mu_e^-(\mathbf{e}^-\cdot\mathbf{e}^- - 1) +$$
$$+ \mu_\beta^-[(\beta^- - \beta_1^-)(\beta_2^- - \beta^-) - (u^-)^2] \tag{2.2}$$

$$\varphi = J + \sum_{l=1}^{p} \rho_l\varphi_l \tag{2.3}$$

Использовав формулы (2.13) и (2.14) статьи [3], найдем уравнения (2.4)

$$\lambda_v^{+\cdot}+\lambda_r^+=0,\qquad \lambda_r^{+\cdot}=0,\qquad \lambda_м^{+\cdot}-\frac{c^+\beta^+}{(M^+)^2}\lambda_v^+\cdot\mathbf{e}^+=0,\qquad \frac{c^+\beta^+}{M^+}\lambda_v^++2\mu_e^+\mathbf{e}^+=0$$

$$\frac{c^+}{M^+}\lambda_v^+\cdot\mathbf{e}^+-\lambda_м^+-\mu_\beta^+(2\beta^+-\beta_1^+-\beta_2^+)=0,\qquad \mu_\beta^+u^+=0 \tag{2.5}$$

$$\lambda_v^{-\cdot}+\lambda_r^-=0,\qquad \lambda_r^{-\cdot}=0,\qquad \lambda_м^{-\cdot}-\frac{c^-\beta^-}{(M^--M_c)^2}\lambda_v^-\cdot\mathbf{e}^-=0 \tag{2.6}$$

$$\frac{c^-\beta^-}{M^--M_c}\lambda_v^-+2\mu_e^-\mathbf{e}^-=0$$

$$\frac{c^-}{M^--M_c}\lambda_v^-\cdot\mathbf{e}^--\lambda_м^--\mu_\beta^-(2\beta^--\beta_1^--\beta_2^-)=0,\qquad \mu_\beta^-u^-=0 \tag{2.7}$$

При помощи соотношений (2.16) и (2.22) этой же статьи строим концевые условия

$$\lambda_r(t_0)=\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}(t_0)},\qquad \lambda_v(t_0)=\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{v}(t_0)},\qquad \lambda_м(t_0)=\frac{\partial\varphi}{\partial M(t_0)}$$

$$\lambda_r(T)=-\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}(T)},\qquad \lambda_v(T)=-\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{v}(T)},\qquad \lambda_м(T)=-\frac{\partial\varphi}{\partial M(T)} \tag{2.8}$$

и зависимости

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}=-(H)_{t_0},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial T}=(H)_T \tag{2.9}$$

Наконец, формулы (2.17) и (2.33) работы [3] приводят к следующим условиям Эрдманна — Вейерштрасса:

$$\lambda_r^+(t_1)-\lambda_r^-(t_1)=0,\qquad \lambda_v^+(t_1)-\lambda_v^-(t_1)=0,\qquad \lambda_м^+(t_1)-\lambda_м^-(t_1)+\nu=0, \tag{2.10}$$

$$(H^+)_{t_1}-(H^-)_{t_1}=0 \tag{2.11}$$

Отметим еще, что уравнения задачи не содержат явно времени, и в ней имеется первый интеграл

$$H=h=\text{const} \tag{2.12}$$

В оптимальном режиме должно выполняться также неравенство

$$(\eta\beta)^\pm\geqslant(\eta^*\beta^*)^\pm \tag{2.13}$$

в котором

$$\eta^*=\frac{c^+}{M^+}\lambda_v^+\cdot\mathbf{e}^+-\lambda_м^+,\qquad \eta^{*+}=\frac{c^+}{M^+}\lambda_v^+\cdot\mathbf{e}^{*+}-\lambda_м^+$$

$$\eta^- -\frac{c^-}{M^--M_c}\lambda_v^-\cdot\mathbf{e}^--\lambda_м,\qquad \eta^{*-}=\frac{c^-}{M^--M_c}\lambda_v^-\cdot\mathbf{e}^{*-}-\lambda_м^- \tag{2.14}$$

и $\mathbf{e}^\pm$, $\beta^\pm$ соответствуют оптимальному режиму, а $\mathbf{e}^{*\pm}$ и $\beta^{*\pm}$ — любые допустимые функции. Неравенство (2.13) получено из соотношения (3.4) работы [3] после подстановки в него функции H, представляемой равенствами (2.1) и (2.2).

3. Построение оптимального режима. Рассмотрим первые из формул (2.5) и (2.7). Они показывают, что векторы λ_v и $\mathbf{e}$ параллельны. Последние из этих соотношений позволяют сделать заключение, что в оптимальном режиме могут выполняться следующие системы зависимостей:

$$1.\quad \mu_\beta=0,\quad u\neq0;\qquad 2.\quad \mu_\beta\neq0,\quad u=0;\qquad 3.\quad \mu_\beta=u=0$$

Наконец, вторые равенства этих же групп (2.5) и (2.7) дают возможность убедиться, что случаю $\mu_\beta=0$ отвечает значение $\eta=0$, а при $\mu_\beta\neq0$ выполняется неравенство $\eta\neq0$.

Обратимся к неравенству (2.13). Заметив, что функция $\eta^*=\eta$ является допустимой, подставим ее в это неравенство Тогда будем иметь соотношение $\eta\beta\geqslant\eta\beta^*$

Следовательно, при $\eta \neq 0$ получим

$$\beta^\pm = \begin{cases} \beta_1^\pm & \text{при } \eta^\pm < 0 \\ \beta_2^\pm & \text{при } \eta^\pm > 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Двум другим случаям отвечают соотношения:

$$1.\ \beta_1^\pm < \beta^\pm < \beta_2^\pm;\ 2.\ \eta^\pm = 0;\ 3.\ \beta^\pm = \beta_{1,2}^\pm,\ \eta^\pm = 0$$

При $\eta \neq \eta^*$, $\beta = \beta^*$ найдем $\eta \geqslant \eta^*$ или

$$\frac{c^+}{M^+}\lambda_v^+ \cdot \mathbf{e}^+ \geqslant \frac{c^+}{M^+}\lambda_v^+ \cdot \mathbf{e}^{*+}, \qquad \frac{c^-}{M^- - M_c}\lambda_v^- \cdot \mathbf{e}^- \geqslant \frac{c^-}{M^- - M_c}\lambda_v^- \cdot \mathbf{e}^{*-} \tag{3.2}$$

Анализ этих неравенств показывает, что в оптимальном режиме векторы λ_v и $\mathbf{e}$ сонаправлены, так что

$$\boldsymbol{\lambda}_v^\pm = \lambda_v^\pm \mathbf{e}^\pm \tag{3.3}$$

где $\lambda_v^\pm$ — длины векторов $\boldsymbol{\lambda}_v^\pm$.

При помощи условий (2.10) и (2.11) находим, что векторные множители $\lambda_r(t)$ и $\lambda_v(t)$ и функция H непрерывны во всем интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Разрыв непрерывности первого рода в точке $t = t_1$ могут иметь множитель $\lambda_м(t)$ и функция η.

Подставив в равенство (2.11) выражения (2.1) и (2.2), получим соотношение

$$\eta^+(t_1)\,\beta^+(t_1) = \eta^-(t_1)\,\beta^-(t_1) \tag{3.4}$$

Так как $\beta^\pm > 0$, значения $\eta^+(t_1)$ и $\eta^-(t_1)$ имеют один и тот же знак. В точке $t = t_1$ не происходит смены режимов, и если $\beta^+(t_1) = \beta_2^+$, то $\beta^-(t_1) = \beta_2^-$, а при $\beta^+(t_1) = \beta_1^+$ будем иметь $\beta^-(t_1) = \beta_1^-$.

Рассмотрим случай задания начального и конечного положений ракеты соотношениями

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}^\circ, \qquad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}^\circ, \qquad M(0) = M^\circ, \qquad t_0 = (0) \tag{3.5}$$

$$\mathbf{r}(T) = \mathbf{r}^T, \qquad \mathbf{v}(T) = \mathbf{v}^T \tag{3.6}$$

Функционал J имеет вид

$$J = J[M(T),\ T] \tag{3.7}$$

Функция φ представится равенством

$$\varphi = J + \rho_r^\circ(\mathbf{r}(0) - \mathbf{r}^\circ) + \rho_v^\circ(\mathbf{v}(0) - \mathbf{v}^\circ) + \rho_м(M(0) - M^\circ) + \\ + \rho_{t_0} t_0 + \rho_r(\mathbf{r}(T) - \mathbf{r}^T) + \rho_v(\mathbf{v}(T) - \mathbf{v}^T) \tag{3.8}$$

Первая группа соотношений (2.8) и первая зависимость (2.9) приводят к формулам

$$\lambda_r(0) = \rho_r^\circ, \qquad \lambda_v(0) = \rho_v^\circ, \qquad \lambda_м(0) = \rho_м^\circ, \qquad (H)_{t_0} = -\rho_{t_0} \tag{3.9}$$

так что вместо разыскания множителей ρ_r°, ρ_v°, $\rho_м^\circ$, ρ_{t_0} можно вычислять начальные значения соответствующих функций.

На основании второй группы условий (2.8) и второго равенства (2.9) имеем

$$\lambda_r(T) = -\rho_r, \qquad \lambda_v(T) = -\rho_v$$

Проинтегрировав уравнения (2.4) и (2.6) с учетом этих соотношений, получим

$$\lambda_r^\pm(t) = -\rho_r, \qquad \lambda_v^\pm(t) = \rho_r(t - T) - \rho_v$$

Составим теперь производную $\eta^\cdot$, после чего найдем

$$\eta^{+\cdot} = -\frac{c^+}{M^+}\lambda_r^+ \cdot \mathbf{e}^+, \qquad \eta^{-\cdot} = -\frac{c^-}{M^- - M_c}\lambda_r^- \cdot \mathbf{e}^- \tag{3.10}$$

Подстановка в эти выражения функции $\lambda_r^\pm(t)$ приводит к соотношениям

$$\eta^{+\cdot} = -\frac{c^+}{M^+\lambda_v^+}[\rho_r \cdot \rho_v - \rho_r^2(t - T)], \qquad \eta^{-\cdot} = -\frac{c^-}{(M^- - M_c)\lambda_v^-}[\rho_r \cdot \rho_v - \rho_r^2(t - T)] \tag{3.11}$$

В них ρ_r — длина вектора ρ_r, и использовано равенство

$$\lambda_v = \sqrt{\rho_v^2 - 2\rho_v \cdot \rho_r (t - T) + \rho_r^2 (t - T)^2}$$

Формулы (3.11) показывают, что производная $\eta^{\cdot}$ при $\rho_r \neq 0$ может обратиться в нуль не более чем в одной точке интервала $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Если при $\eta^{\cdot} = 0$ и $\eta = 0$, то в соседних точках $\eta \neq 0$. Поэтому функция η может обратиться в нуль в конечном числе точек интервала $t_0 \leqslant t \leqslant T$; во всех остальных точках она отлична от нуля.

Так как левый и правый пределы функции η в точке $t = t_1$ имеют одинаковые знаки, а ее производная имеет не более одного нуля, сама функция η может иметь не более двух нулей. Таким образом, при задании концевых значений равенствами (3.5) и (3.6) в оптимальном режиме параметр управления может принимать только свои граничные значения $\beta^{\pm} = \beta_1^{\pm}$ или $\beta^{\pm} = \beta_2^{\pm}$. Смена режимов, т. е. переход параметра управления от значения $\beta = \beta_1$ к значению $\beta = \beta_2$, или наоборот, может произойти лишь при $\eta = 0$. Соответствующих моментов времени может быть не более двух. Кроме них, имеется точка $t = t_1$ разрыва непрерывности правых частей уравнений движения, в которой параметр управления переходит от значения β_1^+ к β_1^- или от β_2^+ к β_2^-.

4. **Вертикальные движения ракеты.** При отсутствии сил сопротивления уравнения вертикального движения ракеты имеют вид (4.1)

$$w^{+\cdot} - \frac{c^+\beta^+}{M^+} + g = 0, \quad w^{-\cdot} - \frac{c^-\beta^-}{M^- - M_c} + g = 0, \quad z^{\pm\cdot} - w^{\pm} = 0, \qquad M^{\pm\cdot} + \beta^{\pm} = 0$$

Здесь z — вертикальная координата, w — вертикальная скорость. Концевые условия будем задавать зависимостями

$$z(0) = z^\circ, \quad w(0) = w^\circ, \quad M(0) = M^\circ, \quad \varphi_z = z(T) - z^T = 0 \tag{4.2}$$

Рассмотрим задачу минимизации расхода горючего. Тогда

$$J = -M(T) \tag{4.3}$$

Использовав приведенные выше зависимости, придем к уравнениям

$$\begin{gathered}\lambda_w^{\pm\cdot} - \lambda_z^{\pm} = 0, \quad \lambda_z^{\pm\cdot} = 0, \quad \lambda_м^{+\cdot} - \frac{c^+\beta^+}{(M^+)}\lambda_w^+ = 0, \quad \lambda_м^- - \frac{c^-\beta^-}{(M^- - M_c)^2}\lambda_w^- = 0 \\ \frac{c^+}{M^+}\lambda_w^+ - \lambda_м^+ - \mu_\beta^+(2\beta^+ - \beta_1^+ - \beta_2^+) = 0 \\ \frac{c^-}{M^- - M_c}\lambda_w^- - \lambda_м^- - \mu_\beta^-(2\beta^- - \beta_1^- - \beta_2^-) = 0, \qquad \mu_\beta^{\pm}u^{\pm} = 0\end{gathered} \tag{4.4}$$

и к концевым условиям для множителей λ вида

$$\lambda_z(T) = -\rho_z, \qquad \lambda_w(T) = 0, \qquad \lambda_м(T) = 1 \tag{4.5}$$

Кроме того, будем иметь равенство $(H)_T = 0$. Для функций $\eta^{\pm}$ будем иметь

$$\eta^+ = \frac{c^+}{M^+}\lambda_z^+ - \lambda_м^+, \qquad \eta^- = \frac{c^-}{M^- - M_c}\lambda_w^- - \lambda_м^- \tag{4.6}$$

а неравенство Вейерштрасса запишется в виде $(\eta\beta)^{\pm} \geqslant (\eta\beta^*)^{\pm}$.

Для производных $\eta^{\cdot}$ будем иметь формулы

$$\eta^{+\cdot} = -\frac{c^+}{M^+}\lambda_z^+, \qquad \eta_z^{-\cdot} = -\frac{c^-}{M^- - M_c}\lambda_z^- \tag{4.7}$$

Условия Эрдманна — Вейерштрасса для точки разрыва правых частей уравнений движения запишутся следующим образом:

$$\begin{gathered}\lambda_z^+(t_1) - \lambda_z^-(t_1) = 0, \qquad \lambda_w^+(t_1) - \lambda_w^-(t_1) = 0 \\ \lambda_м^+(t_1) - \lambda_м^-(t_1) + \nu = 0, \qquad (H^+)_{t_1} - (H^-)_{t_1} = 0\end{gathered} \tag{4.8}$$

Соответствующие условия для точек разрыва непрерывности параметров управления эквивалентны требованию непрерывности множителей $\lambda_z(t)$, $\lambda_w(t)$, $\lambda_м(t)$ и функции H.

Проинтегрировав уравнения (4.4) при условиях (4.5), придем к выражениям

$$\lambda_z = -\rho_z, \qquad \lambda_w = -\rho_z(t-T) \tag{4.9}$$

Подставив λ_z в формулу для $\eta^{\cdot}$, убедимся, что эта производная не меняет знак в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Следовательно, функция η не может иметь в этом интервале больше одного нуля. Во всех остальных точках будем иметь $\eta \neq 0$. При $t = t^*$, ($\eta(t^*) = 0$) происходит смена режимов.

Рассмотрим правый конец оптимальной траектории. Подставим $t = T$ во вторую формулу (4.6) и используем равенства (4.4).

Тогда получим

$$\eta^{\pm}(T) = -\lambda_м^{\pm}(T) = -1 < 0 \tag{4.10}$$

Значит, оптимальный режим заканчивается при

$$\beta^{\pm}(T) = \beta_1^{\pm} \tag{4.11}$$

Вторая характеристика правого конца траектории найдется при помощи равенства $H = 0$. Подставив в него $t = T$, будем иметь

$$(H^{\pm})_T = \lambda_z^{\pm}(T)\, w^{\pm}(T) - \beta^{\pm}(T) = 0, \qquad \text{или} \qquad w^{\pm}(T) = -\frac{\beta_1^{\pm}}{\beta_z}$$

При $\beta_1^{\pm} = 0$ приведенные выше результаты упрощаются и приводят к соотношениям $\beta^{\pm}(T) = 0$, $w^{\pm}(T) = 0$.

Для двуступенчатых ракет такого типа могут быть указаны следующие оптимальные режимы:

$$\beta^{(1)} = \begin{cases} \beta_2^{+} & (0 \leqslant t \leqslant t^*) \\ 0 & (t^* \leqslant t \leqslant T) \end{cases} \tag{4.12}$$

$$\beta^{(2)} = \begin{cases} \beta_2^{+} & (0 \leqslant t \leqslant t_1) \\ \beta_2^{-} & (t_1 \leqslant t \leqslant t^*) \\ 0 & (t^* \leqslant t \leqslant T) \end{cases} \tag{4.13}$$

Первый из них соответствует случаю, когда выход ракеты на заданную высоту $z(T) = z^T$ при скорости $w(T) = 0$ может быть осуществлен при помощи запаса топлива первой ступени; во втором используется двигатель второй ступени.

Сами оптимальные режимы могут быть построены без определения лагранжевых множителей. Для этого нужно найти решение уравнений движения при значениях β, даваемых соотношениями (4.12) или (4.13), такое, чтобы для него при $t = T$ выполнялись равенства $z(T) = z^T$, $w(T) = 0$.

Поступила 23 X 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Leitmann G. On a class of variational problems in rocket flight. J. Aero/space sci., 1959, vol. 27, No 29, p. 586—591.
2. Исаев В. К. Принцип максимума Л. С. Понтрягина и оптимальное программирование тяги ракет. Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 8, стр. 986—1001.
3. Троицкий В. А. О вариационных задачах оптимизации процессов управления. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1, стр. 233—246.
4. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики, ч. II. Гостехиздат, 1948.
5. Мещерский И. В. Работы по механике тел переменной массы. Гостехиздат, 1952.
6. Сб. «Исследование оптимальных режимов движения ракет» (под ред. И. Н. Садовского). Оборонгиз, 1959.