ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ НА АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

И. М. Миндлин, Г. К. Пожарицкий

(Горький, Москва)

В работе [1], исследована устойчивость вертящегося волчка со сферической опорой при помощи функции Ляпунова, построенной из интеграла энергии и интегралов Желле и Чаплыгина [2]. В работе [3] исследована устойчивость прямолинейно катящегося диска с гироскопом, в статье [4] — устойчивость произвольных стационарных движений диска [на плоскости. При этом используются гипергеометрические решения Аппеля и Кортевега [2]. В работе [4] исследована устойчивость стационарных движений тела с гироскопом, ограниченного произвольной поверхностью вращения, при которых ось тела располагается вертикально и горизонтально.

При этом указываются и используются интегралы, линейные относительно угловых скоростей, причем предполагается, что силовая функция является аналитической, что гарантирует аналитичность решения. При построении функции Ляпунова в окрестности стационарного движения вычисляются два первых члена ряда.

В предлагаемой работе получено необходимое и достаточное условие устойчивости всех стационарных движений тяжелого однородного тела, ограниченного произвольной поверхностью вращения, при помощи функции Ляпунова — суммы квадратов интегралов [5]. Выяснение условий знакоопределенности этой функции не потребовало явного вычисления линейных интегралов.

Рассмотрим тяжелое твердое тело, катящееся без скольжения по горизонтальной плоскости и ограниченное поверхностью вращения с осью ζ. Пусть тело динамически симметрично относительно этой оси и несет ротор гироскопа, свободно насаженный на ось ζ. Введем две системы координат $OXYZ$ — неподвижную и $G\xi\eta\zeta$ — подвижную с началом в G — центре тяжести системы. Ось $G\xi$ направим в плоскости вертикального меридиана перпендикулярно оси $G\zeta$, а ось $G\eta$ — перпендикулярно плоскости вертикального меридиана. Обозначим через α угол ζNM оси тела с горизонтальной касательной NM его меридиана $G\xi$; через p, q, r — компоненты угловой скорости тела на оси ξ, η, ζ соответственно. Главный момент количества движения гироскопа вокруг его оси обозначим через s; по условию задачи $s = \text{const}$.

Пусть M — масса системы; A — ее момент инерции вокруг осей $G\xi$, $G\eta$; B — момент инерции одного тела, а B^1 — одного гироскопа вокруг оси симметрии. Пусть также $(0, \xi(\alpha), \eta(\alpha))$ — координаты точки касания тела с плоскостью.

Как показал С. А. Чаплыгин, три уравнения движения при $\alpha \neq {}^1/_2\pi$ можно получить в виде [2]

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(p\zeta - r\xi) + pq(\zeta \operatorname{tg}\alpha - \xi) = \frac{B}{\xi M}\frac{dr}{dt} \\ &A\frac{dp}{dt} + (Br + s + Ap\operatorname{tg}\alpha)\, q = -\frac{B\zeta}{\xi}\frac{dr}{dt} \end{aligned} \qquad \left(q = -\frac{d\alpha}{dt}\right) \tag{1}$$

Кроме того, рассматриваемая механическая система имеет интеграл энергии

$$2H = Ap^2 + Br^2 + M(p\zeta - r\xi) + [A + M(\zeta^2 + \xi^2)]\, q^2 + 2Mgz(\alpha) = \text{const} \tag{2}$$

Здесь $z(\alpha)$ — высота центра тяжести над горизонтальной плоскостью

$$\xi = z\cos\alpha - z'\sin\alpha, \qquad \zeta = -z\sin\alpha - z'\cos\alpha$$

Вычисляя производную по времени от выражения (2) и учитывая уравнения (1), получим четвертое замыкающее уравнение движения

$$\begin{aligned} [A + M(\xi^2 + \eta^2)]\frac{dq}{dt} = p(Br + s + Ap\operatorname{tg}\alpha) + M(\xi\xi' + \zeta\zeta')\, q^2 + \\ + Mgz' + Mp(\zeta\operatorname{tg}\alpha - \xi)(p\zeta - r\xi) \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь ξ', η', z' — производные по α.

Из (1) при $q = -d\alpha / dt \neq 0$ следуют линейные уравнения

$$\frac{d}{d\alpha}(p\zeta - r\xi) - p(\zeta \operatorname{tg}\alpha - \xi) = \frac{B}{\xi M}\frac{dr}{d\alpha}, \quad A\frac{dp}{d\alpha} - (Br + s + Ap\operatorname{tg}\alpha) = -\frac{B\zeta}{\xi}\frac{dr}{d\alpha}$$

разрешая которые относительно производных, получим

$$\frac{dp}{d\alpha} = (\operatorname{tg}\alpha + a_1)p + a_2 r + h_1, \qquad \frac{dr}{d\alpha} = b_1 p + b_2 r + h_2 \tag{4}$$

Здесь

$$a_1 = \frac{B\zeta(\zeta' + \xi)}{\Delta}, \quad a_2 = \frac{B(B/M + \xi^2 + \zeta\xi')}{\Delta}, \quad b_1 = \frac{A\xi(\xi + \zeta')}{\Delta}, \quad b_2 = \xi\frac{B\xi - A\zeta'}{\Delta} \tag{5}$$

$$h_1 = \frac{B + M\xi^2}{\Delta}, \qquad h_2 = \frac{\xi\zeta}{\Delta}, \qquad \Delta = \frac{AB}{M} + A\xi^2 + B\zeta^2 > 0$$

Пусть

$$p = c_1\varphi_1(\alpha) + c_2\varphi_2(\alpha) + \varphi_3(\alpha), \qquad r = c_1\psi_1(\alpha) + c_2\psi_2(\alpha) + \psi_3(\alpha) \tag{6}$$

есть общее решение уравнений (4).

Разрешая (6) относительно постоянных, получим два интеграла [4]

$$\lambda_1(\alpha)(p - \varphi_3) + \lambda_2(\alpha)(r - \psi_3) = c_1, \qquad \mu_1(\alpha)(p - \varphi_3) + \mu_2(\alpha)(r - \psi_3) = c_2 \tag{7}$$

Очевидно, любой интеграл $F(\alpha, p, r)$ уравнений (4) есть интеграл системы (1), ибо, если $dF / d\alpha = 0$, в силу (4), то

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = 0$$

в силу (1). Все дальнейшие вычисления справедливы, если потенциальная энергия $Mgz(\alpha)$ обладает двумя непрерывными производными, что, согласно соотношениям

$$\xi = z\cos\alpha - z'\sin\alpha, \qquad \zeta = -z\sin\alpha - z'\cos\alpha$$

гарантирует ограниченность ξ', ζ', а следовательно, ограниченность коэффициентов системы (4) на интервале $0 \leqslant \alpha \leqslant {}^1/_2\pi - \varepsilon^2$ (ε — произвольная малая) и представимость функции $\delta H'$ в указанном ниже виде. Тем самым снимается требование аналитичности $z(\alpha)$, имеющееся в работе [4].

Уравнения (1.1) и (1.3) допускают частное решение

$$\alpha = \alpha_0 \neq {}^1/_2\pi, \qquad q = 0, \qquad p = p_0, \qquad r = r_0 \tag{8}$$

если постоянные p_0, r_0, α_0 удовлетворяют уравнению

$$p_0^2 A_1 \operatorname{tg}\alpha_0 + (B_1 r_0 + s)p_0 + Mgz'(\alpha_0) = 0 \tag{9}$$

Здесь

$$A_1 = A - Mz\frac{\zeta(\alpha_0)}{\sin\alpha_0}, \qquad B_1 = A + Mz\frac{\xi(\alpha_0)}{\cos\alpha_0} \tag{10}$$

Условием существования решений (8) является положительность дискриминанта уравнения (9), квадратного относительно p_0,

$$D(\alpha_0, r_0) = (B_1 r_0 + s)^2 - 4MgA_1 z'(\alpha_0)\operatorname{tg}\alpha_0 > 0 \tag{11}$$

Исследуем устойчивость стационарного движения (8). Устойчивость стационарных вертикальных ($\alpha = {}^1/_2\pi$) вращений исследована в работах [3,4]; для диска в работе [6] исследована устойчивость всех вращений.

Пусть в невозмущенном движении (8) интегралы H, c_1, c_2 принимают значения $H°$, $c_1°$, $c_2°$. Обозначая через x_1, x_2 вариации переменных p, r, через q, $\delta\alpha$ — вариации переменных q, α, через δH, δc_1, δc_2 — вариации функций H, c_1, c_2, рассмотрим сумму квадратов интегралов уравнений возмущенного движения [5]

$$V = [\delta H(x_1, x_2, q, \delta\alpha)]^2 + [\delta c_1(x_1, x_2, q, \delta\alpha)]^2 + (\delta c_2)^2$$

Эта положительная функция будет положительно определенной, если $\delta H > 0$ при тех значениях аргументов, когда $\delta c_1 = \delta c_2 = 0$.

Иначе говоря, из уравнений $\delta c_1 = \delta c_2 = 0$ найдем $x_1(q, \delta\alpha)$, $x_2(q, \delta\alpha)$; подставляя эти значения в функцию δH, получим

$$\delta H(x_1(q, \delta\alpha), x_2(q, \delta\alpha), q, \delta\alpha) = \delta H^1(q, \delta\alpha)$$

Если $\delta H^1(q, \delta\alpha)$ будет знакоопределенной функцией своих аргументов, то в этом и только в этом случае функция V будет положительно определенной.

Другими словами, вариация H, вычисленная при постоянных c_1°, c_2°, должна быть знакоопределенной. При практическом подсчете знание явного вида функций $c_1(x_1, \ldots, \delta\alpha)$, $c_2(x_1, \ldots, \delta\alpha)$ не является обязательным, ибо входящие в вариацию δH величины $dp / d\alpha$, $dr / d\alpha$ равны правым частям уравнений (4), взятым на стационарном решении (8). Выписывая вариацию $\delta H(c_1^\circ, c_2^\circ, q, \delta\alpha) = \delta H^1$, получим

$$\delta H^1 = \left[\frac{\partial H^1(c_1^\circ, c_2^\circ, q, \delta\alpha)}{\partial\alpha}\right]^\circ \delta\alpha + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 H^1}{\partial q^2}\right]^\circ q^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 H^1}{\partial\alpha^2}\right]^\circ (\delta\alpha)^2 + Z =$$
$$= f_1\delta\alpha + f_2 q^2 + f_3(\delta\alpha)^2 + Z$$

Здесь Z — члены высших порядков, а величина

$$\left[\frac{\partial^2 H^1}{\partial q\, \partial\alpha}\right]^\circ \equiv 0$$

В силу (4) и (8), находим

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial H^1}{\partial\alpha}\right]^\circ = \left[Ap\frac{dp}{d\alpha} + 2Br\frac{dr}{d\alpha} + M(\xi\xi' + \zeta\zeta')q^2 + Mgz' + M(p\zeta - r\xi)\left(p\zeta' - r\xi' +\right.\right.$$
$$\left.\left. + \zeta\frac{dp}{d\alpha} - \xi\frac{dp}{d\alpha}\right)\right]^\circ = p_0^2 A_1 \operatorname{tg}\alpha + (B_1 r_0 + s)p_0 + Mgz'(\alpha_0) = f_1(\alpha_0)$$

В силу (9), заключаем, что $f_1(\alpha_0) = 0$. Поскольку всегда

$$\left[\frac{\partial^{2\prime} H^1}{\partial q^2}\right]^\circ > 0$$

то для положительной определенности δH^1 достаточно неравенства $f_3 > 0$, причем для вычисления этой величины достаточно вычислить производную по α_0 от левой части уравнения (9), считая p_0, q_0 функциями α_0 (т. е. в силу (4)). Производя указанные вычисления, получим условие устойчивости в форме

$$f_3 = (2A_1 \operatorname{tg}\alpha_0 p_0 + B_1 r_0 + s)\,[(\operatorname{tg}\alpha_0 + a_1)p_0 + a_2 r_0 + h_1] + A_1 p_0^2 \sec^2\alpha_0 +$$
$$+ p_0^2 A_1' \operatorname{tg}\alpha_0 + B_1 p_0(b_1 p_0 + b_2 r_0 + h_2) + B_1' r_0 p_0 + Mgz(\alpha_0) > 0 \qquad (12)$$

в котором параметры движения связаны уравнением (9); A_1', A_2' — производные по α_0 от A_1, B_1. Поскольку $dH^1(c_1^\circ, \ldots, \alpha) / dt \equiv 0$ должно выполняться в силу (3), то следует, что (3) равносильно уравнению

$$\frac{d}{dt}H = \frac{d}{dt}[\gamma(\alpha)q^2 + \beta(\alpha)] = q\,[2\gamma q^{\cdot} + \gamma q^2 + \beta'] = 0] \text{ при } q \neq 0 \quad (\beta'^\circ = f_1 = 0)$$

Отсюда ясно, что уравнение первого приближения для $\delta\alpha$ имеет вид

$$2\gamma(\alpha_0)(\delta\alpha)^{\cdot\cdot} + \left[\frac{\partial^2 H^1}{\partial\alpha^2}\right]^\circ \delta\alpha = 0$$

и при $f_3 < 0$ решение (8) неустойчиво. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. *Тело, опирающееся на плоскость иглой.* В этом случае

$$\xi = 0, \qquad \xi = -a, \qquad a_1 = b_1 = b_2 = h_2 \equiv 0$$
$$a_2 = B / A_1, \qquad h_1 = s / A_1, \qquad A = A + M_a^2, \qquad B_1 = B$$

Из (12), в силу (4), следует известное условие устойчивости

$$(Br_0 + s)^2 - 4MgA_1 \sin\alpha_0 > 0$$

для регулярной прецессии твердого тела с неподвижной точкой.

2. *Прямолинейно катящееся тело.* Пусть $z'(\alpha^0) = 0$, т. е. при $\alpha = \alpha_0$ центр тяжести тела лежит над точкой опоры.

При $p_0 = 0$ уравнение (9) удовлетворяется автоматически.

Неравенство (12) примет вид

$$(B_1 r_0 + s)(a_2 r_0 + h_1) + Mgz''(\alpha) > 0$$

В частности, для прямолинейно катящегося колеса ($\alpha_0 = p_0 = 0$) величина $z(\alpha)$ — четная функция α, и $z'(0) = 0$. В этом случае $\zeta(0) = 0$, $\xi(0) = a$ — радиус колеса, $\rho = z(0) + z''(0)$ — радиус кривизны меридиана

$$A_1 = A, \qquad B_1 = B + Ma^2$$

Условие устойчивости имеет вид [4]

$$(Br_0 + s)^2 (Br_0 + s + Ma^2 r_0) - MgaA(1 - \rho / a) > 0$$

3. *Малые регулярные прецессии волчка.* В этом случае

$$\alpha_0 = {}^1/_2\pi - \beta_0; \quad z'({}^1/_2\pi) = 0, \qquad z({}^1/_2\pi) + z''({}^1/_2\pi) = \rho, \qquad z''({}^1/_2\pi) = \rho l$$

Пусть $O(\beta_0^n)$ — малая величина порядка β_0^n. Из (1) следует, что $p_0 = O(\beta_0)$, и что произведение $p_0 \operatorname{ctg} \beta_0$ ограничено. Условие существования сколь угодно малых прецессий следует из (11) и имеет вид

$$D({}^1/_2\pi, r_0) = \{[B + M\rho^2(1 - l)] r_0 + s\}^2 + 4Mg\rho l\, [A + M\rho^2(1 - l)^2] > 0$$

Неравенство (12) при помощи уравнения (9) приводится к виду

$$D({}^1/_2\pi, r_0) + O(\beta_0) > 0$$

Таким образом, по любой $z(\alpha)$ возможно указать такое $\varepsilon > 0$, что прецессии при ${}^1/_2\pi - \varepsilon < \alpha_0 < {}^1/_2\pi$ будут устойчивы.

Поступила 17 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Дувакин А. П., Об устойчивости движения волчка по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Инж. ж., 1962, т. 2, № 2.
2. Чаплыгин С. А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости. Гостехиздат., 1948, Собр. соч., т. 1, М.
3. Миндлин И. М. Об устойчивости диска, несущего гироскоп. Инж. ж., 1964, т. 4, № 1.
4. Мидлин И. М. Об устойчивости движения тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости. Инж. ж., 1964, т. 4, № 2.
5. Пожарицкий Г. К. О построении функций Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
6. Дувакин А. П. Об устойчивости движений диска. Инж. ж., 1965, т. 5, № 1.

ОПТИМИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ДВУСТУПЕНЧАТОЙ РАКЕТЫ

В. А. Троицкий (Ленинград)

Рассматривается пространственная задача оптимизации движения двуступенчатой ракеты в однородном параллельном силовом поле [1,2]. Сила тяги двигателей обеих ступеней считается ограниченной. При решении используются результаты работы [3].

1. Постановка задачи. Уравнения движения двуступенчатой ракеты в однородном параллельном силовом поле могут быть представлены в виде [4,5]

$$\mathbf{v}^{+\cdot} = \frac{c^+\beta^+}{M_0^+}\mathbf{e}^+ - g\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}^{+\cdot} = \mathbf{v}^+, \qquad M_0^{+\cdot} = -\beta^+, \qquad \mathbf{e}^+\cdot\mathbf{e}^+ = 1 \tag{1.1}$$

$$\mathbf{v}^{-\cdot} = \frac{c^-\beta^-}{M_0^-}\mathbf{e}^- - g\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}^{-\cdot} = \mathbf{v}^-, \qquad M_0^{-\cdot} = -\beta^-, \qquad \mathbf{e}^-\cdot\mathbf{e}^- = 1 \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, $\mathbf{v}$ — вектор скорости, M_0 — масса ракеты, c — скорость истечения, $\mathbf{e}$ — единичный вектор направления тяги, $\mathbf{k}$ — единичный вектор направления сил поля, g — ускорение силы тяжести. Значок «плюс» относится к первой ступени, а значок «минус» — ко второй.

Уравнения (1.1) справедливы при выполнении неравенства

$$M_0^+(t) \geqslant M_1 \tag{1.3}$$