ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА — ОСТРОГРАДСКОГО ДЛЯ СИСТЕМ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ

Н. Е. Ставракова (Москва)

Голономные системы с двусторонними связями представляют собой хорошо изученный раздел аналитической механики, в то время как голономные системы с односторонними (или неудерживающими, освобождающими) связями исследованы недостаточно полно. Ниже для голономных систем с односторонними связями устанавливается интегральный вариационный принцип Гамильтона — Остроградского, доказывается его необходимость и достаточность

1. Рассмотрим голономную механическую систему, находящуюся под действием потенциальных сил. Предположим, что обобщенные координаты $q_1, \ldots, q_m, q_{m+1}, \ldots, q_n$ выбраны так, что односторонние связи, наложенные на систему, определяются так:

$$q_{m+1} \geqslant 0, \ldots, q_n \geqslant 0 \tag{1.1}$$

Такой выбор обобщенных координат всегда возможен.

Рассмотрим истинный путь системы $q_1(t), \ldots, q_n(t)$ на отрезке времени $[t_0, T]$. В самом общем случае этот путь может состоять из участков $r+1$ различных типов, где r—число различных сочетаний из индексов $m+1, \ldots, n$, очевидно равное 2^{n-m}.

Тип участка движения определяется тем, какие из координат (1.1) равны нулю на этом участке. Каждому типу участка движения припишем свой номер, причем нулевой номер припишем участку, в котором все $q_k > 0$ $(k = m+1, \ldots, n)$. Каждому номеру α соответствует совокупность индексов J_α из $m+1, \ldots, n$ такая, что если $k \in J_\alpha$, то $q_k = 0$ на данном участке движения типа α.

Предполагается, что система на отрезке времени $[t_0, T]$ переходит с одного участка движения на другой конечное число (N) раз. Пусть $L = T + U$ — функция Лагранжа. Уравнения движения системы на участке типа α имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_j^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad \left(\begin{matrix} j = 1, \ldots, m \\ j \text{ не принадлежит } J_\alpha \end{matrix}\right) \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_k^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \lambda_k \qquad (k \in J_\alpha) \\ q_k = 0 \qquad (k \in J_\alpha)\end{gathered} \tag{1.2}$$

с условием, что

$$\lambda_k \geqslant 0 \qquad (k \in J_\alpha) \tag{1.3}$$

Здесь и далее точкой обозначается дифференцирование по t.

Переход с одного участка движения на другой может быть двух типов: с ударом и без удара. Удар может произойти, если система, не лежавшая на какой-либо односторонней связи, вновь приходит на нее. Например, пусть система переходит в момент t_s с участка нулевого типа на участок с номером 1, для которого $q_{m+1} = 0$. Если $q_{m+1}^{\cdot}(t_s) \geqslant 0$, то удара не произойдет, если же $q_{m+1}^{\cdot}(t_s) < 0$, то происходит удар [1]: скорости $q_i^{\cdot}$ $(i = 1, \ldots, n)$ терпят разрыв, причем $q_{m+1}^{\cdot}$ мгновенно принимает неотрицательное значение.

Таким образом, при переходе с одного участка движения типа α на другой типа β скорости $q_i^{\cdot}$ $(i = 1, \ldots, n)$ либо меняются непрерывно, либо терпят разрыв. Если в момент удара система сходит со связей $q_k = 0$, $k \in J_\alpha - J_\alpha \times J_\beta$ и вновь приходит на связи $q_k = 0$, $k \in J_\beta - J_\alpha \times J_\beta$, то в момент удара [1]

$$\delta q_k = 0 \qquad (k \in J_\beta) \tag{1.4}$$

Значения скоростей после удара удовлетворяют уравнениям теории удара

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_j^{\cdot}}\right)_0 = \left(\frac{\partial L}{\partial q_j^{\cdot}}\right)_1 \qquad \left(\begin{matrix} j = 1, \ldots, m \\ j \text{ не принадлежит } J_\beta \end{matrix}\right) \tag{1.5}$$

[1] $A \times B$ обозначает пересечение множества A, B.

Значки 0 и 1 в (1.5) показывают, что в L подставлены значения скоростей до и после удара соответственно.

Предположим, что наложенные в момент удара связи являются сохраняющимися, тогда уравнений (1.5) достаточно для определения скоростей после удара. В противном случае необходимо сделать дополнительные предположения о поведении системы после удара [2].

Наряду с истинным путем рассмотрим совокупность окольных путей, состоящих из конфигураций, допускаемых связями и бесконечно близких к истинному пути [3]

$$q_1(t) + \delta q_1(t), \ldots, q_n(t) + \delta q_n(t)$$

где δq_j $(j = 1, \ldots, m)$ и те из δq_k $(k = m+1, \ldots, n)$, для которых на истинном пути $q_k > 0$, произвольны, и $\delta q_k \geqslant 0$ для тех q_k, которые на истинном пути равны нулю. Из всей совокупности окольных путей выделим такие, которые в моменты времени t_0 и T совпадают с истинным путем, так что

$$\delta q_i(t_0) = 0, \qquad \delta q_i(T) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

Введем в рассмотрение действие по Гамильтону за время $[t_0, T]$

$$S = \int_{t_0}^{T} L dt \tag{1.7}$$

Вычислим приращение действия S при переходе от истинного пути к одному из окольных с точностью до величин первого порядка малости относительно δq_i, $\delta q^{\cdot}_i$, т. е. вычислим вариацию

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{T} L dt = \delta \sum_{s=0}^{N+1} \int_{t_s}^{t_{s+1}} L\, dt \tag{1.8}$$

где $t_1, \ldots, t_N$ — моменты времени перехода с одного участка движения на другой, причем $t_{N+1} = T$. В силу того что моменты времени перехода с одного участка на другой участок движения могут варьироваться, к интегралу в (1.8) следует применить формулу асинхронного варьирования [3]

$$\delta S = \sum_{s=0}^{N+1} \left(\int_{t_s}^{t_{s+1}} \delta L\, dt + L|_{t=t_{s+1}} \delta t_{s+1} - L|_{t=t_s} \delta t_s \right)$$

Однако

$$\sum_{s=0}^{N+1} (L|_{t=t_{s+1}} \delta t_{s+1} - L|_{t=t_s} \delta t_s) = 0$$

так как общее время $(T - t_0)$ фиксировано. Имеем

$$\delta S = \sum_{s=0}^{N+1} \int_{t_s}^{t_{s+1}} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}} \delta q_i^{\cdot} + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right) \right] dt$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\delta S = \sum_{s=0}^{N+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}} \delta q_i \Big|_{t_s}^{t_{s+1}} + \sum_{s=0}^{N+1} \sum_{i=1}^{n} \int_{t_s}^{t_{s+1}} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}} \right) \delta q_i\, dt$$

Первое слагаемое этой суммы равно нулю в силу условий (1.4), (1.6) и уравнений удара (1.5).

Учитывая, что участки движения могут быть различных типов, получим

$$\delta S = - \sum_{\alpha=0}^{r} \sum_{s=0}^{N+1} \sum_{k \in J_\alpha} \int_{t_s}^{t_{s+1}} \lambda_k \delta q_k\, dt$$

Так как $\lambda_k \geqslant 0$, $\delta q_k \geqslant 0$ $(k \in J_\alpha)$, то

$$\delta S \leqslant 0 \tag{1.9}$$

Если истинный путь на всех своих участках сравнивается с окольными путями того же типа, что и данный участок истинного пути, т. е. если выполняется условие

$$\delta q_k = 0 \qquad (k \in J_\alpha) \tag{1.10}$$

то получим, что $\delta S = 0$.

Таким образом, доказана необходимость следующего принципа. Первая вариация действия по Гамильтону S неположительна, если с истинным путем сравниваются окольные пути, совпадающие с истинным в начальный и конечный моменты времени t_0 и T и для которых выполняются условия (1.1). Действие по Гамильтону S имеет стационарное значение, если с истинным путем сравниваются окольные пути, удовлетворяющие еще и условию (1.10).

Для доказательства достаточности этого принципа выведем из него уравнения движения. Задача состоит в разыскании необходимых условий экстремальности функционала (1.7) при условиях (1.1). Это — задача с односторонними вариациями.

Применяя для данного случая теорему из [4], обобщенную на пространство $n+1$-измерения, получаем следующий результат.

Теорема 1.1. Если кривая $\Gamma\{q_i(t)\,(i=1,\ldots,n)\}$ дает экстремальное значение интегралу (1.7) среди кривых $q_i(t)\,(i=1,\ldots,n)$, принадлежащих замкнутой области (1.1), соединяющих две данные точки и таких, что $q_i^{\cdot}(t)\,(i=1,\ldots,n)$ непрерывны, кроме, быть может, точек A_ν, где Γ переходит из области $\Phi_0\{q_k>0$ $(k=m+1,\ldots,n)\}$ на границу и с границы $\Phi_\alpha\{q_k=0,\ k\in J_\alpha\}$ на границу $\Phi_\beta\{q_k=0,\ k\in J_\beta\}$, то

(1) куски кривой Γ, принадлежащие области Φ_0, суть экстремали для интеграла S, т. е. удовлетворяют уравнениям Эйлера

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,\ldots,n)$$

(2) куски кривой Γ, принадлежащие границе Φ_α, суть экстремали задачи на условный экстремум S при условиях $q_k=0$, $k\in J_\alpha$, т. е. удовлетворяют уравнениям (1.2). Кроме того, в каждой точке границы в случае неположительности первой вариации δS должно выполняться условие (1.3);

(3) в точках, где Γ переходит из области Φ_0 на границу или с границы Φ_α на границу Φ_β, имеют место условия (1.5) и соотношение

$$(L)_1-(L)_0-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}}\right)_0(q^{\cdot}_{i1}-q^{\cdot}_{i0})=0$$

Если исключить случай, когда точки A_ν суть угловые точки искомой кривой, то условие (3) можно заменить следующим условием: кривая Γ обладает непрерывно вращающейся касательной, т. е. $q^{\cdot}_i(t)$ $(i=1,\ldots,n)$ — непрерывные функции t. Таким образом, достаточность доказана.

Замечание. Выясним характер экстремума действия S для систем с односторонними связями. Можно утверждать, что если истинный путь системы в интервале (t_0, T) состоит из участков, принадлежащих области Φ_0 и границам Φ_α, Φ_β, ..., то на таком пути не будет достигаться ни максимума, ни минимума (локальных) действия S. (Считаем, что участки, лежащие на границах Φ_α, Φ_β, ..., не являются экстремалями интеграла S, так как в противном случае связи (1.1) можно вообще не рассматривать.)

Действительно, сравнивая истинный путь с окольными путями, для которых выполняется условие (1.10), получаем, что $\delta S=0$, кроме того, в силу положительной определенности кинетической энергии, всегда выполнено условие Лежандра положительности второй вариации действия $\delta^2 S$. Это указывает на то, что на истинном пути максимум S, во всяком случае, не достигается. С другой стороны, сравнивая истинный путь с окольными путями, совпадающими с истинным в области Φ_0, для которых на границах Φ_α, Φ_β, ... $\delta q_k>0$, $k\in J_\alpha$, $k\in J_\beta$, ... получим $\delta S<0$.

Таким образом, можно выбрать такие окольные пути, удовлетворяющие условиям (1.1), (1.6), на которых значение действия S не менее, чем на истинном пути, и такие, на которых значение действия S меньше, чем на истинном пути.

2. Выше рассматривался вариационный принцип Гамильтона — Остроградского, справедливый только для голономных систем с потенциальными силами. Однако в механике этот принцип имеет более общее значение. Он применим и для систем с силами непотенциальными. Принцип заключается в том, что на истинном пути, состоящем, как и раньше, из участков различных типов, интеграл

$$\delta' R = \int\limits_{t_0}^{T} \left[\delta T + \sum_{\nu=1}^{n} (X_\nu \delta x_\nu + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu) \right] dt, \qquad T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (m_\nu^{\cdot 2} + y_\nu^{\cdot 2} + z_\nu^{\cdot 2})$$

неположителен для любых значений δx_ν, δy_ν, δz_ν, бесконечно близких к $x_\nu(t)$ $y_\nu(t)$, $z_\nu(t)$, соответствующих истинному пути, обращающихся в нуль в моменты t_0 и T, определяющих в интервале (t_0, T) перемещения, допускаемые односторонними связями; этот интеграл равен нулю для неосвобождающих возможных перемещений [2] (выполнение условия (1.10)). Здесь x_ν, y_ν, z_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ — декартовы координаты точек механической системы; T — кинетическая энергия; X_ν, Y_ν, Z_ν—активные силы; m_ν — масса ν-й точки.

Докажем этот принцип. Отметим, что

$$\delta T = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_\nu^{\cdot} \delta x_\nu + y_\nu^{\cdot} \delta y_\nu + z_\nu^{\cdot} \delta z_\nu)$$

Учитывая наличие N участков движения и интегрируя по частям, приведем $\delta' R$ к виду

$$\delta' R = \sum_{s=0}^{N+1} \sum_{\nu=1}^{n} (m_\nu x_\nu^{\cdot} \delta x_\nu + m_\nu y_\nu^{\cdot} \delta y_\nu + m_\nu z_\nu^{\cdot} \delta z_\nu) \Big|_{t_s}^{t_{s+1}} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{N+1} \int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} [(Y_\nu - m_\nu x_\nu^{\cdot\cdot}) \delta x_\nu + (Y_\nu - m_\nu y_\nu^{\cdot\cdot}) \delta y_\nu + (Z_\nu - m_\nu z_\nu^{\cdot\cdot}) \delta z_\nu] \right\} dt$$

Первое слагаемое этой суммы равно нулю в силу того, что δx_ν, δy_ν, δz_ν обращаются в нуль при t_0 и T и в силу общего уравнения теории удара, которое для данного случая, когда единственными ударами, действующими на систему, являются удары связей, имеет вид [2]

$$\sum_{\nu=1}^{n} [\Delta (m_\nu x_\nu^{\cdot}) \delta x_\nu + \Delta (m_\nu y_\nu^{\cdot}) \delta y_\nu + \Delta (m_\nu z_\nu^{\cdot}) \delta z_\nu] = 0$$

где $\Delta (m_\nu x_\nu^{\cdot})$, $\Delta (m_\nu y_\nu^{\cdot})$, $\Delta (m_\nu z_\nu^{\cdot})$ — разности значений $m_\nu x_\nu^{\cdot}$, $m_\nu y_\nu^{\cdot}$, $m_\nu z_\nu^{\cdot}$ до и после удара. Из принципа Даламбера — Лагранжа для систем с односторонними связями

$$\sum_{\nu=1}^{n} [(X_\nu - m_\nu x_\nu^{\cdot\cdot}) \delta x_\nu + (Y_\nu - m_\nu y_\nu^{\cdot\cdot}) \delta y_\nu + (Z_\nu - m_\nu z_\nu^{\cdot\cdot}) \delta z_\nu] \leqslant 0$$

(здесь знак равенства имеет место для неосвобождающих возможных перемещений), получаем $\delta' R \leqslant 0$ и $\delta' R = 0$ для неосвобождающих возможных перемещений, что и требовалось доказать.

В заключение искренне благодарю В. В. Румянцева за внимание к работе.

Поступила 5 I 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Суслов Г. К. Теоретическая механика, изд. 3. Гостехиздат, 1946.
2. Аппель П. Теоретическая механика, т. 1 и 2. Физматгиз, 1960.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.
4. Лаврентьев М. и Люстерник Л. Основы вариационного исчисления, т. 1, ч. 2. ОНТИ, 1935.