Автор искренне благодарен Г. Д. Блюмину, Ю. К. Жбанову и Д. М. Климову за обсуждение работы и ценные замечания.

Поступила 13 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. К теории гироскопического маятника. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
2. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.
4. Ляшенко В. Ф. Об интегрировании уравнений движения гироскопического маятника в конечных углах. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 2.
5. Чертков Р. И. Метод Якоби в динамике твердого тела. Судпромгиз, 1960.

НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО ЗАКРЕПЛЕННУЮ ТОЧКУ

Е. И. Харламова (Новосибирск)

Задача о движении твердого тела с неподвижной точкой в однородном поле силы тяжести, как известно, сводится к интегрированию системы уравнений

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)\,qr + (e_2\gamma_3 - e_3\gamma_2)\,\Gamma \qquad \begin{pmatrix}123\\ ABC\\ pqr\end{pmatrix} \tag{0.1}$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3 \tag{0.2}$$

где e_1, e_2, e_3 — единичный вектор, направленный из неподвижной точки в центр масс тела, Γ — произведение веса тела на расстояние между центром масс и точкой опоры. Остальные обозначения обычные [1]; символы (123, ABC, pqr) означают циклические перестановки. При определенных ограничениях, накладываемых на параметры, характеризующие распределение масс и начальные условия, найдены отдельные частные решения этих уравнений.

В последнее время интенсивно изучаются различные обобщения указанной задачи, получаемые усложнением действующих на тело сил. Следуя Н. Е. Жуковскому [2], вводят гироскопические силы; вместо однородного силового поля рассматривают центральное поле [1] и т. д. При этом выяснилось, что некоторые из полученных в задаче (0.1), (0.2) частных решений не обладают «устойчивостью» к такого рода обобщениям. В частности, решение С. В. Ковалевской не имеет там соответствующего аналога. В связи с этим представляется интересным указать решения уравнений

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)(qr - \mu^2\gamma_2\gamma_3) + \lambda_2 r - \lambda_3 q + (e_2\gamma_3 - e_3\gamma_2)\,\Gamma \tag{0.3}$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3 \qquad (123,\ ABC,\ pqr)$$

обобщающие соответствующее решение уравнений (0.1), (0.2).[2] До настоящего времени такие решения были найдены лишь при условии, что по крайней мере одна из величин $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ или μ равна нулю.

Здесь указаны пять решений уравнений (0.3), (0.2), найденные при условии $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\,\mu \neq 0$. При обращении этого выражения в нуль указанные решения сводятся либо к известным частным решениям, либо к некоторым их обобщениям.

§ 1. Известны три интеграла уравнений (0.2), (0.3)

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + \mu^2(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2) - 2\Gamma(e_1\gamma_1 + e_2\gamma_2 + e_3\gamma_3) = 2E \tag{1.1}$$

$$(Ap + \lambda_1)\gamma_1 + (Bq + \lambda_2)\gamma_2 + (Cr + \lambda_3)\gamma_3 = k \tag{1.2}$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{1.3}$$

и, как следует из теории последнего множителя, для сведения задачи к квадратурам достаточно указать четвертый, не зависящий явно от t интеграл, содержащий произвольную постоянную.

[1] Силовую функцию для этого случая см., например, в монографии [1].

[2] Решение, указанное в §§ 4, 5, приводилось в статье автора, направленной в ПММ, 24 II 1964, объединенной затем с настоящей статьей.

1°. Тривиальное обобщение решения Лагранжа получаем при условиях

$$B = C, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \qquad e_2 = e_3 = 0$$

Четвертый интеграл в этом случае $p = \text{const}$.

Сведение к квадратурам проводится здесь обычным для случая Лагранжа путем.

2°. При условиях $e_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ существует частное решение

$$p = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad q = r = 0, \qquad \gamma_1 = 0, \qquad \gamma_2 = \cos\varphi, \qquad \gamma_3 = \sin\varphi$$

$$A\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{1}{2}\mu^2(B - C)\sin 2\varphi + \Gamma\sin(\varphi - \alpha) \qquad (\operatorname{tg}\alpha = e_3/e_2)$$

— тривиальное обобщение на рассматриваемую задачу движения физического маятника. Вектор угловой скорости тела в этом случае сохраняет направление.

3°. Обычным путем [3] находятся движения, при которых вектор угловой скорости неизменен по отношению к телу. Возможные оси такого движения — образующие конуса, который в пересечении с единичной сферой (1.3) дает кривую

$$[(B - C)\, e_1\gamma_2\gamma_3 + (C - A)\, e_2\gamma_3\gamma_1 + (A - B)\, e_3\gamma_1\gamma_2]^2\,\Gamma +$$
$$+ [(B - C)\,\lambda_1\gamma_2\gamma_3 + (C - A)\,\lambda_2\gamma_3\gamma_1 + (A - B)\,\lambda_3\gamma_1\gamma_2]\,[(\lambda_2 e_3 - \lambda_3 e_2)\,\gamma_1 + (\lambda_3 e_1 - \lambda_1 e_3)\,\gamma_2 +$$
$$+ (\lambda_1 e_2 - \lambda_2 e_1)\,\gamma_3] = \mu^2\Gamma^{-1}\,[(B - C)\,\lambda_1\gamma_2\gamma_3 + (C - A)\,\lambda_2\gamma_3\gamma_1 + (A - B)\,\lambda_3\gamma_1\gamma_2]^2$$

Каждой образующей этого конуса соответствует определенное значение угловой скорости равномерного вращения

$$\omega = -\Gamma\frac{(B - C)\, e_1\gamma_2\gamma_3 + (C - A)\, e_2\gamma_3\gamma_1 + (A - B)\, e_3\gamma_1\gamma_2}{(B - C)\,\lambda_1\gamma_2\gamma_3 + (C - A)\,\lambda_2\gamma_3\gamma_1 + (A - B)\,\lambda_3\gamma_1\gamma_2}$$

§ 2. Если тело имеет полости, заполненные жидкостью, то условие

$$A = B + C \tag{2.1}$$

может иметь место для измененных моментов инерции, входящих в уравнение (0.3) [4]. В случае тела, не имеющего такого заполнения, условие (2.1) выполняется для бесконечно тонкой пластинки. Пусть, наряду с (2.1), параметры стеснены условиями

$$e_1 = 0, \qquad \lambda_1 = 0 \qquad (B^2\lambda_2^2 + C^2\lambda_3^2)\,\mu^2 = (B^2e_2^2 + C^2e_3^2)\,\Gamma^2$$

Введя новый параметр ν, последнее условие представим в виде

$$\mu\lambda_2 B = (Be_2\cos 2\nu + Ce_3\sin 2\nu)\,\Gamma, \qquad \mu\lambda_3 C = (Be_2\sin 2\nu - Ce_3\cos 2\nu)\,\Gamma$$

При этих условиях уравнения (0.3,2) имеют решение с тремя линейными интегралами

$$(B + C)\,p = \mu\,\{(B - C)\,\gamma_1\cos 2\nu + s\} \tag{2.2}$$

$$q = \mu\,(\gamma_2\cos 2\nu + \gamma_3\sin 2\nu) + \lambda_2 / C, \qquad r = \mu\,(\gamma_2\sin 2\nu - \gamma_3\cos 2\nu) + \lambda_3 / B$$

Здесь s — произвольная постоянная.

Внося (2.2) в интегралы (1.1), (1.2), приходим к соотношению

$$\mu\,\{(C\gamma_2^2 - B\gamma_3^2)\cos 2\nu + (B + C)\,\gamma_2\gamma_3\sin 2\nu\} + (B + C)\left(s\gamma_1 + \frac{\lambda_2}{C}\gamma_2 + \frac{\lambda_3}{B}\gamma_3\right) = h^*$$

Здесь h^* — постоянная интегрирования.

Найденное решение удобно изучать в системе координат, повернутой по отношению к главным осям вокруг первой оси на угол ν в направлении от второй оси к третьей (изменившиеся при повороте переменные и параметры отмечены штрихами).

$$(B' + C')\,p = \mu\,\{(B' - C')\,\gamma_1 + s\}, \qquad q' = \mu\gamma_2' + s_*, \qquad r' = -\mu\gamma_3' + s^* \tag{2.3}$$

$$C'\left(\gamma_2' + \frac{B' + C'}{2\mu C'}s_*\right)^2 - B'\left(\gamma_3' - \frac{B' + C'}{2\mu B'}s^*\right)^2 = h - s\gamma_1 \tag{2.4}$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2'^2 + \gamma_3'^2 = 1 \tag{2.5}$$

Здесь h — новая произвольная постоянная, а

$$s_* = 2\frac{2B'\lambda_2' - \lambda_3'(B' - C')\operatorname{tg}2\nu}{4B'C' - (B' - C')^2\operatorname{tg}^2 2\nu}, \qquad s^* = 2\frac{2C'\lambda_3' - \lambda_2'(B' - C')\operatorname{tg}2\nu}{4B'C' - (B' - C')^2\operatorname{tg}^2 2\nu}$$

Внося (2.3) в первое уравнение (0.2), имеющее в новых осях вид

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r'\gamma_2' - q'\gamma_3'$$

причем

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = -2\mu\gamma_2'\gamma_3' + s^*\gamma_2' - s_*\gamma_3' \tag{2.6}$$

Подстановка в это уравнение γ_2' и γ_3', найденных из (2.4), (2.5) в зависимости от γ_1, позволяет установить зависимость γ_1 (а вместе с нею — и остальных переменных) от времени. Однако в общем случае для определения функций $\gamma_2'(\gamma_1)$, $\gamma_3'(\gamma_1)$ из (2.4), (2.5) приходится решать полное алгебраическое уравнение четвертой степени. Задача упрощается, если $s = 0$ или $\Gamma = 0$. В случае $s = 0$, удовлетворяя уравнению (2.4), выразим γ_2' и γ_3' через новую переменную σ:

$$\gamma_2' = \left(\frac{h}{C'}\right)^{1/2}\operatorname{ch}\sigma - \frac{B'+C'}{2\mu C'}s_*, \qquad \gamma_3' = \left(\frac{h}{B'}\right)^{1/2}\operatorname{sh}\sigma + \frac{B'+C'}{2\mu B'}s^* \tag{2.7}$$

и, следовательно,

$$p = \mu\frac{B'-C'}{B'+C'}\gamma_1 = \mu\frac{B'-C'}{B'+C'}\left\{1 - \left[\left(\frac{h}{C'}\right)^{1/2}\operatorname{ch}\sigma - \frac{B'+C'}{2\mu C'}s_*\right]^2 - \right.$$

$$\left. - \left[\left(\frac{h}{B'}\right)^{1/2}\operatorname{sh}\sigma + \frac{B'+C'}{2\mu B'}s^*\right]^2\right\}^{1/2} \tag{2.8}$$

$$q' = \mu\left(\frac{h}{C'}\right)^{1/2}\operatorname{ch}\sigma - \frac{B'-C'}{2C'}s^*, \qquad r' = -\mu\left(\frac{h}{B'}\right)^{1/2}\operatorname{sh}\sigma + \frac{B'-C'}{2B'}s^*$$

Чтобы определить зависимость σ от t, достаточно подставить (2.7, 8) в (2.6). Случай $\Gamma = 0$ обсуждается в следующем параграфе.

§ 3. В случае

$$\Gamma = 0 \tag{3.1}$$

имеем

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \tag{3.2}$$

и уравнения (0.3) принимают вид

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)(qr - \mu^2\gamma_2\gamma_3) \qquad (123\ ABC,\ pqr) \tag{3.3}$$

Система (3.3), (0.2) изучалась многими авторами. По-видимому, первый результат здесь принадлежит Клебшу [5]. Занимаясь задачей о движении по инерции твердого тела в безграничной идеальной жидкости, Клебш рассмотрел тот случай, когда кинетическая энергия системы имеет вид

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + LR_1^2 + MR_2^2 + NR_3^2$$

(здесь R_1, R_2, R_3 — компоненты импульсивной силы) и, следовательно, движение тела описывается уравнениями

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)qr + (N - M)R_2R_3, \qquad \frac{dR_1}{dt} = rR_2 - qR_3 \qquad (123,\ ABC,\ LMN,\ pqr)$$

Он установил, что при условии

$$A(M - N) + B(N - L) + C(L - M) = 0 \tag{3.4}$$

эта задача получает полное решение, так как определяется четвертый интеграл

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - \frac{BC}{A}LR_1^2 - \frac{CA}{B}MR_2^2 - \frac{AB}{C}NR_3^2 = \mathrm{const}$$

что позволяет указать квадратуры.

Очевидно, уравнения (3.3) следуют из уравнений задачи Клебша, если в последних положить $L = \mu^2 A$, $M = \mu^2 B$, $N = \mu^2 C$ (условие (3.4) удовлетворено). При этом четвертый интеграл принимает вид

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 - \mu^2(BC\gamma_1^2 + CA\gamma_2^2\ AB\gamma_3^2) = \mathrm{const} \tag{3.5}$$

Несколько позже этот интеграл был указан Тиссераном [6].

Уравнения (3.3) и интеграл (3.5) иногда без оснований связывают с именем Бруна, который гораздо позже Клебша пришел к этим уравнениям, рассматривая одну весьма искусственно поставленную задачу динамики твердого тела [7].

Квадратуры, к которым сведены уравнения (3.3), (0.2) [8,9], хотя и дают общее аналитическое решение задачи, оказываются весьма громоздкими. Кинематическое истолкование движения тела указано для этой задачи лишь при условии, что постоянная интеграла площадей — нуль [9]. Поэтому представляет интерес исследование частных случаев этой задачи, таких, например, как решение Стеклова с линейными интегралами [10].

Простое частное решение уравнений (3.3), (0.2) получим из решения, указанного в предыдущем параграфе, при условиях (3.1,2). Относя это решение к новым осям, введенным в том же параграфе, получим

$$(B'+C')p=\mu\{(B'-C')\gamma_1+s\},\qquad q'=\mu\gamma_2',\qquad r'=-\mu\gamma_3'$$
$$(B'+C')\gamma_2'^2=B'+h-s\gamma_1-B'\gamma_1^2,\qquad (B'+C')\gamma_3'^2=C'-h+s\gamma_1-C'\gamma_1^2$$
$$\frac{d\gamma_1}{dt}=-2\mu\gamma_2'\gamma_3'$$

В этом случае γ_1, вместе с остальными переменными задачи,— эллиптические функции времени.

Очевидно, указанное здесь решение является также и решением задачи Клебша.

Частный случай этого решения, получаемый при $s=0$, $\nu={}^1/_4\pi$, рассмотрен Ю. А. Архангельским [11]. В новых осях условие $\nu={}^1/_4\pi$ соответствует $B'=C'$.

§ 4. Укажем еще одно решение, любопытное своей связью с исследованиями Н. Е. Жуковского [2] и В. Вольтерра [12]. Это решение характеризуется наличием трех соотношений

$$\gamma_1=n_1p+m_1\qquad (pqr,\ 123)\tag{4.1}$$

Подставим (4.1) в (0.3,2)

$$\begin{gathered}A\frac{dp}{dt}=(B-C)(1-\mu^2n_2n_3)qr+[\lambda_2+e_2n_3\Gamma-\mu^2(B-C)n_3m_2]r-\\ -[\lambda_3+e_3n_2\Gamma-\mu^2(C-B)n_2m_3]q+e_2m_3\Gamma-e_3m_2\Gamma-\mu^2(B-C)m_2m_3\end{gathered}\tag{4.2}$$
$$n_1\frac{dp}{dt}=(n_2-n_3)qr+m_2r-m_3q\qquad (ABC,\ pqr,\ 123)$$

Эти шесть соотношений, определяющих p, q, r, совместны, если

$$(B-C)(1-\mu^2n_2n_3)=(n_2-n_3)An_1^{-1},\qquad \lambda_2+e_2n_3\Gamma-\mu^2(B-C)n_3m_2=m_2An_1^{-1}$$
$$\lambda_3+e_3n_2\Gamma-\mu^2(C-B)n_2m_3=m_3An_1^{-1},\qquad e_2m_3\Gamma-e_3m_2\Gamma=\mu^2(B-C)m_2m_3$$
$$(ABC,\ 123)$$

Отсюда находим

$$n_1=\left(\frac{1+As}{(1+Bs)(1+Cs)\mu^2}\right)^{1/2},\qquad m_1=-\frac{se_1\Gamma}{[2+(B+C)s]\mu^2}\qquad \binom{ABC}{123}\tag{4.3}$$

если параметры системы связаны соотношениями

$$\lambda_1=-\frac{e_1\Gamma(2+As)}{2+(B+C)s}\left(\frac{(1+Bs)(1+Cs)}{(1+As)\mu^2}\right)^{1/2}\qquad \binom{ABC}{123}\tag{4.4}$$

Здесь s — произвольный параметр.

§ 5. Обозначим $1+As$, $1+Bs$, $1+Cs$ соответственно через a, b, c и введем безразмерные переменные, относя компоненты угловой скорости к величине $s\sqrt{abc/\mu^2}$; величины γ_1, γ_2, γ_3 — к s/μ^2, а переменную t — к величине $(s\sqrt{abc/\mu^2})^{-1}$.

Подставим (4.3.4) в (4.2,1), перейдя к указанным безразмерным переменным

$$a\frac{dp}{dt}=(b-c)qr+\frac{e_3\Gamma}{a+b}q-\frac{e_2\Gamma}{a+c}r\qquad (abc,\ pqr,\ 123)\tag{5.1}$$
$$\gamma_1=ap-\frac{e_1\Gamma}{b+c}\qquad (abc,\ pqr,\ 123)\tag{5.2}$$

Уравнения (5.1) по форме совпадают с уравнениями Жуковского [2] в задаче о движении по инерции тела с полостями, заполненными жидкостью. Известны два интеграла уравнений (5.1), (5.2)

$$ap^2+bq^2+cr^2=h\tag{5.3}$$
$$\left(ap-\frac{e_1\Gamma}{b+c}\right)^2+\left(bq-\frac{e_2\Gamma}{c+a}\right)^2+\left(cr-\frac{e_3\Gamma}{a+b}\right)^2=\frac{\mu^4}{s^2}$$

и, следовательно, зависимость p, q, r от t определяется квадратурами [12], после чего из (5.2) устанавливается зависимость от времени угла нутации и собственного вращения. Для определения угла прецессии потребуется еще одна квадратура.

Квадратуры, к которым Вольтерра привел уравнения (5.1), в общем случае сложны. Задача упрощается, если положить одну из величин e_i равной нулю.

Пусть $e_1 = 0$. Исключая p из (5.3), получим

$$\frac{[q - e_2\Gamma/(c+a)(b-a)]^2}{H/b(b-a)} + \frac{[r - e_3\Gamma/(a+b)(c-a)]^2}{H/c(c-a)} = 1 \tag{5.4}$$

$$\left(H = \frac{\mu^4}{s^2} - ah + \frac{ae_2^2\Gamma^2}{(c+a)^2(b-a)} + \frac{ae_3^2\Gamma^2}{(a+b)^2(c-a)}\right)$$

Удовлетворяя соотношению (5.4), введем новую переменную σ так, что

$$\begin{aligned} q &= e_2\Gamma/(c+a)(b-a) + \sqrt{H/b(b-a)}\cos\sigma \\ r &= e_3\Gamma/(a+b)(c-a) + \sqrt{H/c(c-a)}\sin\sigma \end{aligned} \tag{5.5}$$

(если знаки знаменателей в (5.4) различны, вместо тригонометрических в (5.5) войдут гиперболические функции от σ). Из (5.3,5) имеем

$$\begin{aligned} ap^2 = h &- be_2^2\Gamma^2/(c+a)^2(b-a)^2 - ce_3^2\Gamma^2/(a+b)^2(c-a)^2 - \\ &- \frac{2be_2\Gamma}{(c+a)(b-a)}\left(\frac{H}{b(b-a)}\right)^{1/2}\cos\sigma - \frac{2ce_3\Gamma}{(a+b)(c-a)}\left(\frac{H}{c(c-a)}\right)^{1/2}\sin\sigma - \\ &- \frac{H}{b-a}\cos^2\sigma - \frac{H}{c-a}\sin^2\sigma \end{aligned} \tag{5.6}$$

Подставив (5.5,6) в (5.1), заключаем, что σ — эллиптическая функция времени.

Еще более простой вид имеет решение в случае $e_2 = e_3 = 0$ (и, следовательно, $e_1 = 1$). Уравнения (5.3) дают

$$\begin{aligned} b(b-c)\,q^2 &= Q + 2a\Gamma p\,(b+c)^{-1} + a\,(c-a)\,p^2 \\ c(b-c)\,r^2 &= R - 2a\Gamma p\,(b+c)^{-1} - a\,(b-a)\,p^2 \end{aligned}$$

Постоянные Q, R введены вместо h и k^2

$$Q = k^2 - hc - \Gamma^2(b+c)^{-2}, \qquad R = -k^2 + hb + \Gamma^2(b+c)^{-2}$$

Первое уравнение (5.1) определяет p как эллиптическую функцию времени

$$t = \int_{p_0}^{p} \frac{a\sqrt{bc}\,dp}{\sqrt{[Q + 2a\Gamma p\,(b+c)^{-1} + a\,(c-a)\,p^2]\,[R - 2a\Gamma p\,(b+c)^{-1} - a\,(b-a)\,p^2]}}$$

Поступила 23 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.
2. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., т. 3, ОНТИ, 1936.
3. Харламов П. В. О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
4. Харламова Е. И. Один частный случай интегрируемости уравнений Эйлера — Пуассона. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 5.
5. Clebch A. Über die Bewegung eines Korpers in einer Flussigkeit. Math. Ann., 1870, vol. 3.
6. Tisserand M. F. Sur les mouvements relatifs a la surface de la Terre, Comptes. Rendus., 1872, vol. 75, No. 26.
7. Brun F., Rotation kring on fix punkt. Ofversigt af Kongl. Svenska Vetensk. Akad. Forhandlinger, Stokholm, 1893.
8. Kobb C. Sur le probleme de la rotation d'un corps autour d'un point fixe. Bull. Soc. math., 1895, vol. 23.
9. Харламова Е. И. О движении твердого тела вокруг неподвижной точки и центральном ньютоновском поле сил. Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1959, № 6.
10. Стеклов В. А. О некоторых возможных случаях движения твердого тела в жидкости. Тр. отд. физ. наук Об-ва люб. естеств., 1896, т. 8, № 2.
11. Архангельский Ю. А. Об одном движении диска в ньютоновском поле сил. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
12. Volterra V. Sur la theorie des variations des latitudes. Acta Mathem., 1899, vol. 22.