О ПРИМЕНЕНИИ ПАРАМЕТРОВ РОДРИГА—ГАМИЛЬТОНА И КЭЛИ—КЛЕЙНА В ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ ГИРОСКОПОВ

В. Н. Кошляков (Киев)

В настоящей работе в прикладную (прецессионную) теорию гироскопов привлекается аналитический аппарат, основанный на использовании параметров Родрига — Гамильтона и Кэли — Клейна. Рассматривается кинематика однороторного гиромаятника [1], гирогоризонткомпаса Геккелера — Ишлинского [2], а также динамические уравнения прецессионного движения гиромаятника в конечных углах.

1. Движение однороторного гиромаятника будем рассматривать относительно правого координатного трехгранника $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ с началом в центре карданового подвеса, ориентированного по вектору скорости точки подвеса [1, 2].

Введем еще не принимающий участия в собственном вращении гироскопа трехгранник Резаля $Oxyz$, имеющий начало также в точке O.

Переход от трехгранника $x^\circ y^\circ z^\circ$ к трехграннику xyz осуществляется путем последовательности двух конечных поворотов на углы α и β внешнего и внутреннего колец соответственно [1].

Направляющие косинусы между осями введенных трехгранников образуют матрицу $a = \| a_{jk} \|$ $(i,\ k = 1,\ 2,\ 3)$, определяемую табличкой:

	x°	y°	z°
x	$a_{11} = \cos\beta$	$a_{12} = \sin\alpha \sin\beta$	$a_{13} = -\cos\alpha \sin\beta$
y	$a_{21} = 0$	$a_{22} = \cos\alpha$	$a_{23} = \sin\alpha$
z	$a_{31} = \sin\beta$	$a_{32} = -\sin\alpha\cos\beta$	$a_{33} = \cos\alpha\cos\beta$

Пусть λ_s $(s = 0, 1, 2, 3)$ — параметры Родрига — Гамильтона, относящиеся к вектору конечного поворота θ, который переводит систему $x^\circ y^\circ z^\circ$ в xyz.

Выражения направляющих косинусов a_{jk} через параметры λ_s будут иметь вид

$$\begin{aligned}
&a_{11} = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2, && a_{12} = 2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2), && a_{13} = 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) \quad (1.1)\\
&a_{21} = 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3), && a_{22} = \lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_1^2, && a_{23} = 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)\\
&a_{31} = 2(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1), && a_{32} = 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1), && a_{33} = \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2
\end{aligned}$$

Связь углов α и β с параметрами λ_s устанавливается формулами [3]

$$\lambda_0 = \cos{}^1\!/_2\,\alpha \cos{}^1\!/_2\,\beta, \quad \lambda_1 = \sin{}^1\!/_2\,\alpha \cos{}^1\!/_2\,\beta, \quad \lambda_2 = \cos{}^1\!/_2\,\alpha \sin{}^1\!/_2\,\beta, \quad \lambda_3 = \sin{}^1\!/_2\,\alpha \sin{}^1\!/_2\,\beta \qquad (1.2)$$

Из (1.2) следуют также соотношения

$$\sin\alpha = 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3), \qquad \sin\beta = 2(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1) \qquad (1.3)$$

2. Пусть p, q, r — проекции угловой скорости трехгранника xyz, связанного с внутренним кольцом (кожухом), на его же оси. Имеем

$$p = \alpha^\cdot a_{11} + \frac{v}{R} a_{12} + r^\circ a_{13}, \qquad q = \beta^\cdot + \frac{v}{R} a_{22} + r^\circ a_{23}, \qquad r = \alpha^\cdot a_{31} + \frac{v}{R} a_{32} + r^\circ a_{33} \qquad (2.1)$$

Здесь v — скорость точки подвеса, r° — проекция на ось z° угловой скорости трехгранника $x^\circ y^\circ z^\circ$.

Выражения p, q, r через параметры λ_s и их производные имеют вид [3]

$$\begin{aligned}
p &= 2[\lambda_0\lambda_1^\cdot - \lambda_1\lambda_0^\cdot + \lambda_3\lambda_2^\cdot - \lambda_2\lambda_3^\cdot + q^\circ(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) + r^\circ(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)] \qquad (q^\circ = v/R)\\
q &= 2[\lambda_0\lambda_2^\cdot - \lambda_2\lambda_0^\cdot + \lambda_1\lambda_3^\cdot - \lambda_3\lambda_1^\cdot + {}^1\!/_2\, q^\circ(\lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_1^2) + r^\circ(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)] \qquad (2.2)\\
r &= 2[\lambda_0\lambda_3^\cdot - \lambda_3\lambda_0^\cdot + \lambda_2\lambda_1^\cdot - \lambda_1\lambda_2^\cdot + q^\circ(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) + {}^1\!/_2\, r^\circ(\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2)]
\end{aligned}$$

Параметры λ_s связаны уравнением

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \qquad (2.3)$$

[1] См. фиг. 9 работы [1]. Там эти углы обозначены соответственно через θ и ψ.

из которого следует дифференциальное соотношение

$$\lambda_0\lambda_0^{\cdot} + \lambda_1\lambda_1^{\cdot} + \lambda_2\lambda_2^{\cdot} + \lambda_3\lambda_3^{\cdot} = 0 \qquad (2.4)$$

Из (2.2) и (2.4) легко получаются уравнения Родрига — Гамильтона для производных от λ_s, обобщенные на случай подвижного основания. Последние образуют систему линейных дифференциальных уравнений, имеющую вид (2.5)

$$2\lambda_0^{\cdot} = -p\lambda_1 - (q - q^\circ)\lambda_2 - (r - r^\circ)\lambda_3, \quad 2\lambda_1^{\cdot} = p\lambda_0 + (r + r^\circ)\lambda_2 - (q + q^\circ)\lambda_3$$
$$2\lambda_2^{\cdot} = (q - q^\circ)\lambda_0 + p\lambda_3 - (r + r^\circ)\lambda_1, \quad 2\lambda_3^{\cdot} = (r - r^\circ)\lambda_0 + (q + q^\circ)\lambda_1 - p\lambda_2$$

Классические уравнения Родрига — Гамильтона (неподвижное основание) получаются из (2.5), если положить в них $q^\circ = r^\circ = 0$.

3. Рассмотрим здесь кинематику движения чувствительного элемента (гиросферы) двуроторного гирогоризонткомпаса [2].

Пусть $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ — правый координатный трехгранник, ориентированный, как и в случае гиромаятника, по вектору скорости точки подвеса.

Введем еще связанный с гиросферой подвижный трехгранник $Oxyz$, получаемый из $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ посредством трех последовательных конечных поворотов на углы α, β и γ.

В этом случае выражения для направляющих косинусов будут иметь вид

$$a_{11} = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma, \quad a_{12} = \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
$$a_{13} = -\cos\beta\cos\gamma, \quad a_{21} = -\sin\alpha\cos\beta, \quad a_{22} = \cos\alpha\cos\beta, \quad a_{23} = \sin\beta \qquad (3.1)$$
$$a_{31} = \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma, \quad a_{32} = \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma, \quad a_{33} = \cos\beta\cos\gamma$$

Сопоставляя (1.1) (эти формулы, конечно, сохраняют свою структуру) с (3.1), убеждаемся в справедливости формул (3.2)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2(\lambda_0\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2)}{\lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_1^2}, \quad \sin\beta = 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3), \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{2(\lambda_0\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3)}{\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2}$$

Несколько сложнее установить выражения параметров Родрига — Гамильтона через функции углов α, β, γ. Переход от системы $x^\circ y^\circ z^\circ$ к системе xyz определим последовательностью трех конечных поворотов

$$\theta_1 = 2\mathbf{e}_1 \operatorname{tg} {}^1/_2\,\alpha, \qquad \theta_2 = 2\mathbf{e}_2 \operatorname{tg} {}^1/_2\,\beta, \qquad \theta_3 = 2\mathbf{e}_3 \operatorname{tg} {}^1/_2\,\gamma \qquad (3.3)$$

Здесь орты $\mathbf{e}_s$ задают направления осей, вокруг которых совершаются последовательные повороты на углы α, β, γ.

Для получения выражений α_s через функции углов α, β, γ можно дважды применить к (3.3) процедуру сложения конечных поворотов. Проще, однако, воспользоваться теоремой Лурье о переставимых конечных поворотах. Согласно этой теореме, последовательность поворотов θ_1 и θ_2 эквивалентна последовательности

$$\theta_1' = \theta_2 = 2\mathbf{e}_2 \operatorname{tg} {}^1/_2\,\beta, \qquad \theta_2' = 2\mathbf{e}_1' \operatorname{tg} {}^1/_2\,\alpha \qquad (3.4)$$

Здесь $\mathbf{e}_1'$ — единичный вектор, в который переходит $\mathbf{e}_1$ при повороте θ_2.

Поэтому, обозначая через λ_s' параметры Родрига, соответствующие результирующему повороту θ_{12}, а через ν_s и μ_s ($s = 0, 1, 2, 3$) — параметры слагаемых поворотов, согласно теореме о переставимых поворотах, пологаем

$$\nu_0 = \cos {}^1/_2\,\beta, \qquad \nu_1 = \sin {}^1/_2\,\beta, \qquad \nu_2 = \nu_3 = 0 \qquad (3.5)$$
$$\mu_0 = \cos {}^1/_2\,\alpha, \qquad \mu_1 = \mu_2 = 0, \qquad \mu_3 = \sin {}^1/_2\,\alpha$$

Для λ_s' имеем формулы

$$\lambda_0' = \nu_0\mu_0 - \sum_{s=1}^{3} \nu_s\mu_s, \qquad \lambda_s' = \nu_s\mu_0 + \mu_s\nu_0 + \sum_{r=1}^{3}\sum_{t=1}^{3} \in_{rts}\mu_r\nu_t \qquad (3.6)$$

Здесь $\in_{rts}$ — символ Леви—Чивита [3]. Отсюда следует, что

$$\lambda_0' = \cos {}^1/_2\,\alpha \cos {}^1/_2\,\beta, \qquad \lambda_1' = \cos {}^1/_2\,\alpha \sin {}^1/_2\,\beta$$
$$\lambda_2' = \sin {}^1/_2\,\alpha \sin {}^1/_2\,\beta \qquad \lambda_3' = \sin {}^1/_2\,\alpha \cos {}^1/_2\,\beta \qquad (3.7)$$

Далее следует рассмотреть последовательность поворотов θ_{12} и θ_3, воспользовавшись опять теоремой о переставимых поворотах.

В этом случае следует уже полагать

$$\nu_0 = \cos {}^1/_2\gamma, \quad \nu_1 = 0, \quad \nu_2 = \sin {}^1/_2\gamma, \quad \nu_3 = 0, \quad \mu_s = \lambda_s' \tag{3.8}$$

Обозначая искомые параметры Родрига — Гамильтона через λ_s и пользуясь опять формулами структуры (3.6), получаем

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \cos {}^1/_2 \alpha \cos {}^1/_2 \beta \cos {}^1/_2 \gamma - \sin {}^1/_2 \alpha \sin {}^1/_2 \beta \sin {}^1/_2 \gamma \\
\lambda_1 &= \cos {}^1/_2 \alpha \sin {}^1/_2 \beta \cos {}^1/_2 \gamma - \sin {}^1/_2 \alpha \cos {}^1/_2 \beta \sin {}^1/_2 \gamma \\
\lambda_2 &= \cos {}^1/_2 \alpha \cos {}^1/_2 \beta \sin {}^1/_2 \gamma + \sin {}^1/_2 \alpha \sin {}^1/_2 \beta \cos {}^1/_2 \gamma \\
\lambda_3 &= \sin {}^1/_2 \alpha \cos {}^1/_2 \beta \cos {}^1/_2 \gamma + \cos {}^1/_2 \alpha \sin {}^1/_2 \beta \sin {}^1/_2 \gamma
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Обобщенные уравнения Родрига — Гамильтона для гирогоризонткомпаса могут быть получены из (2.5), если положить в них $p = 0$ [2]. Имеем

$$\begin{aligned}
2\lambda_0^{\cdot} &= -(q - q^\circ)\lambda_2 - (r - r^\circ)\lambda_3, & 2\lambda_1^{\cdot} &= (r + r^\circ)\lambda_2 - (q + q^0)\lambda_3 \\
2\lambda_2^{\cdot} &= (q - q^\circ)\lambda_0 - (r + r^0)\lambda_1, & 2\lambda_3^{\cdot} &= (r - r^\circ)\lambda_0 + (q + q^\circ)\lambda_1
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Здесь

$$q = q^\circ a_{22} + (r^\circ + \alpha^{\cdot}) a_{23} + \gamma^{\cdot}, \qquad r = q^\circ a_{32} + (r^\circ + \alpha^{\cdot}) a_{33} + \beta^{\cdot} \sin\gamma \tag{3.11}$$

причем a_{jk} выражаются формулами (3.1).

4. Применение параметров Родрига — Гамильтона в динамических задачах прикладной теории гироскопов встречает, конечно, большие трудности, по сравнению с чисто кинематическими вопросами, изложенными в п. 1—3.

Однако и здесь в некоторых случаях возможно упрощение аналитической стороны задачи, состоящее в том, чо путем перехода от углов Эйлера — Резаля к параметрам Родрига — Гамильтона можно прийти к линейным дифференциальным уравнениям без предварительной линеаризации исходных уравнений.

В качестве примера, поясняющего эту мысль, рассмотрим уравнения прецессионного движения однороторного гиромаятника, установленного на неподвижном основании. Эти уравнения, отнесенные к осям Резаля, имеют вид [1]

$$Hq = M_x, \qquad -Hp = M_y \tag{4.1}$$

где, учитывая (2.1), следует полагать

$$p = \alpha^{\cdot} \cos\beta, \quad q = \beta^{\cdot}, \quad M_x = -Pl\sin\alpha, \quad M_y = -Pl\cos\alpha\sin\beta \tag{4.2}$$

Здесь α, β — по-прежнему углы поворота внешнего и внутреннего колец, Pl — маятниковый момент, H — собственный кинетический момент гироскопа, который будем считать постоянным. Известно [1], что структура уравнений (4.1) сохраняется и для произвольного трехгранника $Ox^*y^*z^*$ с началом в центре карданового подвеса и осью z^*, совпадающей с осью z трехгранника $Oxyz$.

Введем связанный с ротором трехгранник $Ox^*y^*z^*$, образуемый при повороте трехгранника $Oxyz$ вокруг оси z на угол γ. Положение ротора, таким образом, будет определяться углами α, β и γ.

Параметры Родрига — Гамильтона, соответствующие трем последовательным поворотам на углы α, β, γ, переводящим систему $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ в $Ox^*y^*z^*$, определяются формулами

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \cos {}^1/_2 \gamma \cos {}^1/_2 \alpha \cos {}^1/_2 \beta - \sin {}^1/_2 \gamma \sin {}^1/_2 \alpha \sin {}^1/_2 \beta \\
\lambda_1 &= \cos {}^1/_2 \gamma \sin {}^1/_2 \alpha \cos {}^1/_2 \beta + \sin {}^1/_2 \gamma \cos {}^1/_2 \alpha \sin {}^1/_2 \beta \\
\lambda_2 &= \cos {}^1/_2 \gamma \cos {}^1/_2 \alpha \sin {}^1/_2 \beta - \sin {}^1/_2 \gamma \sin {}^1/_2 \alpha \cos {}^1/_2 \beta \\
\lambda_3 &= \sin {}^1/_2 \gamma \cos {}^1/_2 \alpha \cos {}^1/_2 \beta + \cos {}^1/_2 \gamma \sin {}^1/_2 \alpha \sin {}^1/_2 \beta
\end{aligned} \tag{4.3}$$

получаемыми аналогично тому, как это сделано в п. 3 для гирогоризонткомпаса.

Уравнения прецессионного движения, отнесенные к осям $x^*y^*z^*$, имеют вид

$$Hq^* = M_{x^*}, \qquad -Hp^* = M_{y^*} \tag{4.4}$$

где следует считать

$$\begin{aligned}
p^* &= p\cos\gamma + q\sin\gamma, & q^* &= -p\sin\gamma + q\cos\gamma \\
M_{x^*} &= M_x\cos\gamma + M_y\sin\gamma, & M_{y^*} &= -M_x\sin\gamma + M\cos\gamma
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Уравнения (4.4) в переменных λ_s, определяемых формулами (4.3), имеет вид

$$\begin{aligned}\lambda_0\lambda_1^{\cdot} - \lambda_1\lambda_0^{\cdot} + \lambda_3^{\cdot}\lambda_2^{\cdot} - \lambda_2\lambda_3^{\cdot} + \omega(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) = 0 \\ \lambda_0\lambda_2^{\cdot} - \lambda_2\lambda_0^{\cdot} + \lambda_1\lambda_3^{\cdot} - \lambda_3\lambda_1^{\cdot} + \omega(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) = 0\end{aligned} \qquad \left(\omega = \frac{Pl}{H}\right) \tag{4.6}$$

К уравнениям (4.6) следует присовокупить уравнение (2.4). Четвертое уравнение можно получить при помощи интеграла энергии, имеющего в данном случае вид [5]

$$\frac{H^2}{2C} + Pl\cos\alpha\cos\beta = h_1 \tag{4.7}$$

где C — полярный момент инерции ротора, а величина

$$H \equiv Cr^* = C(\gamma^{\cdot} + \alpha^{\cdot}\sin\beta) = h_2 \tag{4.8}$$

определяет циклический интеграл в установившемся вращении гироскопа.

Из (4.7) и (4.8) вытекает справедливость выражения

$$r^* + \frac{Pl}{H}\cos\alpha\cos\beta = h \qquad (h = \text{const}) \tag{4.9}$$

Уравнение (4.9) в переменных λ_s будет

$$\lambda_0\lambda_3^{\cdot} - \lambda_3\lambda_0^{\cdot} + \lambda_1^{\cdot}\lambda_2 - \lambda_3^{\cdot}\lambda_1 + {}^1/_2\omega(\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2) = {}^1/_2 h \tag{4.10}$$

Разрешая уравнения (4.6), (2.4) и (4.10) относительно производных от параметров Родрига — Гамильтона, получим четыре линейных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами, распадающихся на две независимые системы вида

$$\begin{aligned}2\lambda_0^{\cdot} &= (\omega - h)\lambda_3, & 2\lambda_1^{\cdot} &= (\omega + h)\lambda_2 \\ 2\lambda_3^{\cdot} &= -(\omega - h)\lambda_0, & 2\lambda_2^{\cdot} &= -(\omega + h)\lambda_1\end{aligned} \tag{4.11}$$

Здесь, в силу (4.9), следует полагать с учетом начальных условий

$$\begin{aligned}\omega - h &= \frac{Pl}{H} - \gamma^{\cdot}(0) - \alpha^{\cdot}(0)\sin\beta(0) - \frac{Pl}{H}\cos\alpha(0)\cos\beta(0) \\ \omega + h &= \frac{Pl}{H} + \gamma^{\cdot}(0) + \alpha^{\cdot}(0)\sin\beta(0) + \frac{Pl}{H}\cos\alpha(0)\cos\beta(0)\end{aligned} \tag{4.12}$$

Уравнения (4.11) еще более упрощаются, если перейти к параметрам Кэли — Клейна, полагая

$$\lambda_0 + i\lambda_3 = u_1, \qquad \lambda_1 + i\lambda_2 = u_2 \tag{4.13}$$

Относительно параметров Кэли — Клейна u_1 и u_2 получаем уравнения

$$u_1^{\cdot} = -(\omega - h)\, iu_1, \qquad u_2^{\cdot} = -(\omega + h)\, iu_2 \qquad (i = \sqrt{-1}) \tag{4.14}$$

Уравнения (4.11) (или (4.14)) интегрируются и дают решение задачи.

5. Полученные уравнения легко допускают вырождение на линейный случай. Для малых углов α и β в качестве α_s можно принять выражения (5.1)

$$\lambda_0 = \cos{}^1/_2\gamma, \quad \lambda_1 = {}^1/_2(\alpha\cos{}^1/_2\gamma + \beta\sin{}^1/_2\gamma), \quad \lambda_2 = {}^1/_2(\beta\cos{}^1/_2\gamma - \alpha\sin{}^1/_2\gamma), \quad \lambda_3 = \sin{}^1/_2\gamma$$

Далее, из (4.8), пренебрегая слагаемым второго порядка малости, получаем

$$r = \gamma^{\cdot} = \gamma^{\cdot}(0) = \text{const} \tag{5.2}$$

При этих условиях первые два из уравнений (4.11) превращаются в тождества; из двух других получаются уравнения вида

$$\begin{aligned}\alpha^{\cdot}\cos{}^1/_2\gamma + \beta^{\cdot}\sin{}^1/_2\gamma &= (Pl/H)(\beta\cos{}^1/_2\gamma - \alpha\sin{}^1/_2\gamma) \\ -\alpha^{\cdot}\sin{}^1/_2\gamma + \beta^{\cdot}\cos{}^1/_2\gamma &= -(Pl/H)(\alpha\cos{}^1/_2\gamma + \beta\sin{}^1/_2\gamma)\end{aligned} \tag{5.3}$$

отсюда вытекают уравнения малых колебаний гироскопического маятника

$$H\beta^{\cdot} = -Pl\alpha, \qquad H\alpha^{\cdot} = Pl\beta \tag{5.4}$$

которые, конечно, непосредственно получаются после линеризации системы (4.1).

В заключение заметим, что, в силу произвольности выбора системы координат $Ox^*y^*z^*$ с началом в центре подвеса и осью z^*, совпадающей с осью z трехгранника Резаля, движение системы по координате γ можно выбрать так, чтобы выполнялось условие $h = 0$. Это обстоятельство еще более упрощает дело.

Автор искренне благодарен Г. Д. Блюмину, Ю. К. Жбанову и Д. М. Климову за обсуждение работы и ценные замечания.

Поступила 13 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. К теории гироскопического маятника. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
2. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.
4. Ляшенко В. Ф. Об интегрировании уравнений движения гироскопического маятника в конечных углах. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 2.
5. Чертков Р. И. Метод Якоби в динамике твердого тела. Судпромгиз, 1960.

НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО ЗАКРЕПЛЕННУЮ ТОЧКУ

Е. И. Харламова (Новосибирск)

Задача о движении твердого тела с неподвижной точкой в однородном поле силы тяжести, как известно, сводится к интегрированию системы уравнений

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)\,qr + (e_2\gamma_3 - e_3\gamma_2)\,\Gamma \qquad \begin{pmatrix}123\\ ABC\\ pqr\end{pmatrix} \tag{0.1}$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3 \tag{0.2}$$

где e_1, e_2, e_3 — единичный вектор, направленный из неподвижной точки в центр масс тела, Γ — произведение веса тела на расстояние между центром масс и точкой опоры. Остальные обозначения обычные [1]; символы (123, ABC, pqr) означают циклические перестановки. При определенных ограничениях, накладываемых на параметры, характеризующие распределение масс и начальные условия, найдены отдельные частные решения этих уравнений.

В последнее время интенсивно изучаются различные обобщения указанной задачи, получаемые усложнением действующих на тело сил. Следуя Н. Е. Жуковскому [2], вводят гироскопические силы; вместо однородного силового поля рассматривают центральное поле [1] и т. д. При этом выяснилось, что некоторые из полученных в задаче (0.1), (0.2) частных решений не обладают «устойчивостью» к такого рода обобщениям. В частности, решение С. В. Ковалевской не имеет там соответствующего аналога. В связи с этим представляется интересным указать решения уравнений

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)(qr - \mu^2\gamma_2\gamma_3) + \lambda_2 r - \lambda_3 q + (e_2\gamma_3 - e_3\gamma_2)\,\Gamma \tag{0.3}$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3 \qquad (123,\ ABC,\ pqr)$$

обобщающие соответствующее решение уравнений (0.1), (0.2).[2] До настоящего времени такие решения были найдены лишь при условии, что по крайней мере одна из величин $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ или μ равна нулю.

Здесь указаны пять решений уравнений (0.3), (0.2), найденные при условии $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\,\mu \neq 0$. При обращении этого выражения в нуль указанные решения сводятся либо к известным частным решениям, либо к некоторым их обобщениям.

§ 1. Известны три интеграла уравнений (0.2), (0.3)

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + \mu^2(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2) - 2\Gamma(e_1\gamma_1 + e_2\gamma_2 + e_3\gamma_3) = 2E \tag{1.1}$$

$$(Ap + \lambda_1)\gamma_1 + (Bq + \lambda_2)\gamma_2 + (Cr + \lambda_3)\gamma_3 = k \tag{1.2}$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{1.3}$$

и, как следует из теории последнего множителя, для сведения задачи к квадратурам достаточно указать четвертый, не зависящий явно от t интеграл, содержащий произвольную постоянную.

---

[1] Силовую функцию для этого случая см., например, в монографии [1].

[2] Решение, указанное в §§ 4, 5, приводилось в статье автора, направленной в ПММ, 24 II 1964, объединенной затем с настоящей статьей.