Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

КОРРЕКТИРУЕМЫЙ ГИРОГОРИЗОНТКОМПАС

Я. Н. Ройтенберг

(Москва)

Гирогоризонткомпас, чувствительный элемент которого установлен на стабилизированной в горизонте платформе и приводится в меридиан корректирующими вращающими моментами [1], можно назвать корректируемым гирогоризонткомпасом.

Ниже рассматривается одна из возможных схем корректируемого гирогоризонткомпаса, чувствительным элементом которого является гиросфера обычного двуроторного гироскопического компаса, отличающаяся тем, что ее центр тяжести совпадает с геометрическим центром. В схеме прибора предусмотрена также возможность приложения корректирующих вращающих моментов вокруг соответствующих осей гиросферы и оси кожуха одного из гироскопов, установленных в гиросфере.

1. Уравнения движения гиросферы [2,3], центр тяжести которой совпадает с ее геометрическим центром, относительно географической системы отсчета имеют следующий вид (1.1)

$$[2B\cos(\varepsilon-\delta)\sin\beta]' + 2B\cos(\varepsilon-\delta)(u_1\cos\alpha\cos\beta + u_2\sin\alpha\cos\beta) = M_\zeta$$

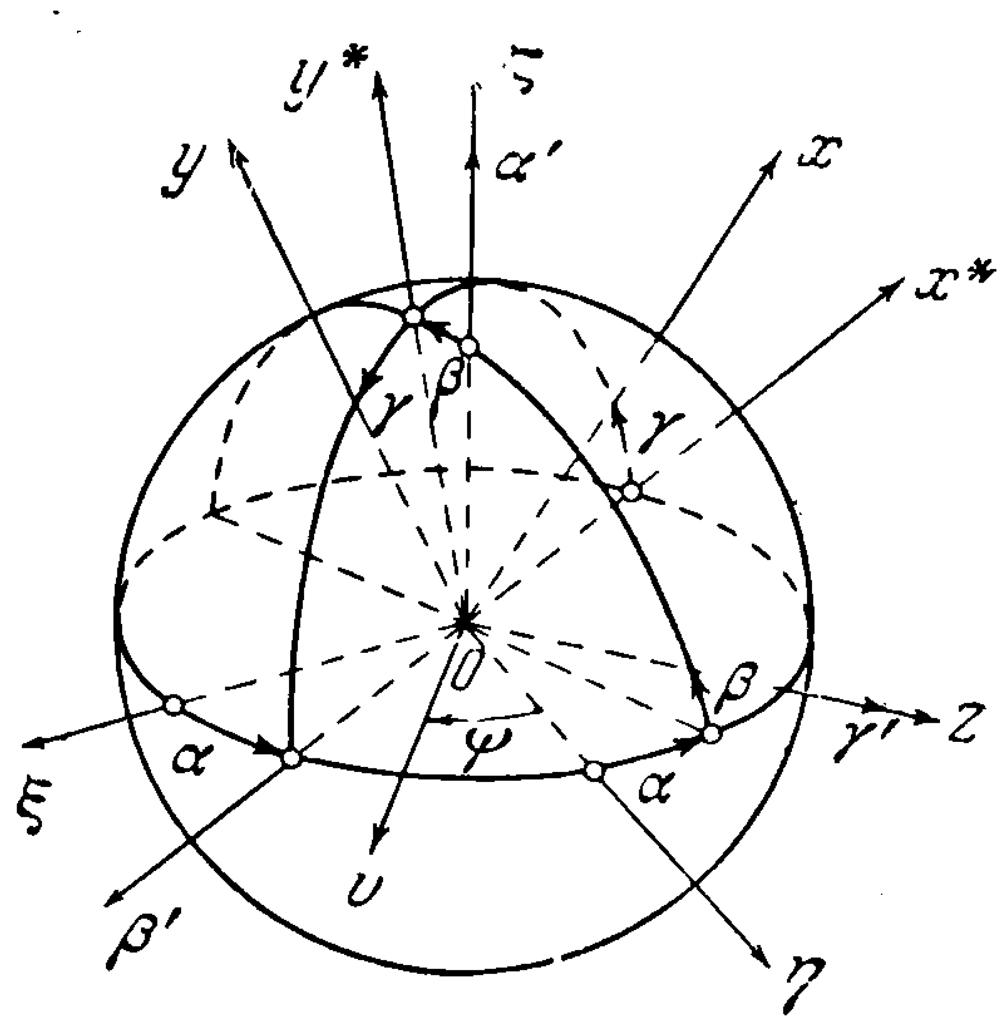
$$2B\cos(\varepsilon-\delta)(\alpha'\cos\beta + u_1\sin\alpha\sin\beta - u_2\cos\alpha\sin\beta + u_3\cos\beta) = M_{x^*}$$

$$[2B\cos(\varepsilon-\delta)]' = M_z$$

$$2B\sin(\varepsilon-\delta)(\alpha'\sin\beta + \gamma' - u_1\sin\alpha\cos\beta + u_2\cos\alpha\cos\beta + u_3\sin\beta) =$$
$$= \varkappa\sin\delta\cos\delta - M_{y_1}$$

$$\left(u_1 = -\frac{v_N}{R}, \quad u_2 = U\cos\varphi + \frac{v_E}{R}, \quad u_3 = U\sin\varphi + \frac{v_E}{R}\operatorname{tg}\varphi\right)$$

Уравнения (1.1) описывают движение гиросферы относительно системы координатных осей $\xi\eta\zeta$ (фигура), начало которой расположено в геометрическом центре гиросферы, ось ζ направлена по радиусу земного шара, а оси ξ и η горизонтальны и направлены соответственно на восток и север. Через α, β и γ обозначены углы Эйлера, определяющие положение гиросферы относительно осей $\xi\eta\zeta$, причем α — угол поворота гиросферы вокруг оси ζ, β — угол поворота вокруг отрицательного направления линии узлов x^*, а γ — угол поворота гиросферы вокруг ее оси z.



Угол между осями роторов гироскопов, установленных внутри гиросферы, равен $2(\varepsilon-\delta)$. При этом в положении равновесия, когда роторы гироскопов не вращаются, угол между их осями составляет 2ε, а через δ обозначен угол поворота одного из гироскопов вокруг оси y_1 его кожуха. Так как кожухи обоих гироскопов связаны антипараллелограммом, то угол поворота кожуха второго гироскопа будет равен $-\delta$. Среднее звено антипараллелограмма связано с внутренней поверхностью гиросферы при помощи пружины, жесткость которой обозначена через $\varkappa$.

Через B в уравнениях (1.1) обозначен кинетический момент каждого из обоих установленных в гиросфере одинаковых гироскопов.

В уравнениях (1.1) через u_1, u_2, u_3 обозначены проекции мгновенной угловой скорости координатного трехгранника $\xi\eta\zeta$ на его оси ξ, η и ζ соответственно. Северная и восточная составляющие скорости корабля относительно земного шара обозначены через v_N и v_E. Через U обозначена угловая скорость суточного вращения земного шара, φ — широта местонахождения корабля, R — радиус земного шара. Через M_ζ, M_{x^*}, M_z и M_{y_1} обозначены моменты приложенных к системе внешних сил.

Так как прибор установлен на стабилизированной в горизонте платформе, то угол β наклона оси z и угол γ наклона оси x гиросферы (фигура) к горизонту можно измерить.

Угол между направлением горизонтальной проекции оси z гиросферы и вектором $\mathbf{v}$ скорости корабля (фигура) относительно земного шара равен $\psi + \alpha$, где ψ — курс корабля. Так как угол $\psi + \alpha$ можно измерить, то при наличии прибора, определяющего скорость корабля относительно земного шара, можно определить составляющие скорости корабля $v\cos(\psi+\alpha)$ и $v\sin(\psi+\alpha)$. Полагая также известной широту φ местонахождения корабля, можно приложить к гиросфере корректирующие вращающие моменты, сформированные по закону

$$M_\zeta = -2B\cos\varepsilon\frac{v}{R}\cos(\psi+\alpha)\cos\beta - \mu K\sin\beta, \quad M_z = -K\sin\gamma$$

$$M_{x^*} = -2B\cos\varepsilon\frac{v}{R}\sin(\psi+\alpha)\sin\beta + \tag{1.2}$$

$$+2B\cos\varepsilon\left[U\sin\varphi + \frac{v}{R}\sin(\psi+\alpha)\operatorname{tg}\varphi\right]\cos\beta + K\sin\beta$$

Корректирующий вращающий момент вокруг оси y_1 кожуха гироскопа примем следующим: (1.3)

$$M_{y_1} = -2B\sin\varepsilon\left[U\cos\varphi + \frac{v}{R}\sin(\psi+\alpha)\right]\cos\beta -$$

$$-2B\sin\varepsilon\left[U\sin\varphi + \frac{v}{R}\sin(\psi+\alpha)\operatorname{tg}\varphi\right]\sin\beta + \sigma K\sin\gamma$$

Здесь μ, K и σ — некоторые постоянные коэффициенты. При этом естественно предполагается, что широта местонахождения корабля $\varphi < 90°$.

Учитывая, что (1.4)

$$v\cos(\psi+\alpha) = v_N\cos\alpha - v_E\sin\alpha, \qquad v\sin(\psi+\alpha) = v_E\cos\alpha + v_N\sin\alpha$$

$$(v_N = v\cos\psi,\ v_E = v\sin\psi)$$

и подставляя (1.2) и (1.3), приведем уравнения (1.1) к виду

$$(H^*\sin\beta)' + (H^* - H)\left(-\frac{v_N}{R}\cos\alpha\cos\beta + \frac{v_E}{R}\sin\alpha\cos\beta\right) +$$

$$+ H^*U\cos\varphi\sin\alpha\cos\beta + \mu K\sin\beta = 0$$

$$H^*\alpha'\cos\beta - H^*U\cos\varphi\cos\alpha\sin\beta +$$

$$-(H^* - H)\left(-\frac{v_N}{R}\sin\alpha\sin\beta - \frac{v_E}{R}\cos\alpha\sin\beta + U\sin\varphi\cos\beta\right) + H^*\frac{v_E}{R}\operatorname{tg}\varphi\cos\beta$$

$$-H\frac{v_E}{R}\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha\cos\beta - H\frac{v_N}{R}\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha\cos\beta - K\sin\beta = 0$$

$$H^{*\prime} + K\sin\gamma = 0$$

$$\Xi^* (\alpha' \sin\beta + \gamma') - \varkappa \sin\delta\cos\delta + $$
$$+ (\Xi^* - \Xi)\left(\frac{v_N}{R}\sin\alpha\cos\beta + \frac{v_E}{R}\cos\alpha\cos\beta + U\sin\varphi\sin\beta\right) +$$
$$+ \Xi^* U\cos\varphi\cos\alpha\cos\beta - \Xi U\cos\varphi\cos\beta + \Xi^*\frac{v_E}{R}\operatorname{tg}\varphi\sin\beta -$$
$$- \Xi\frac{v_E}{R}\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha\sin\beta - \Xi\frac{v_N}{R}\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha\sin\beta + \sigma K\sin\gamma = 0 \qquad (1.5)$$

$(H^* = 2B\cos(\varepsilon - \delta), \quad H = 2B\cos\varepsilon, \quad \Xi^* = 2B\sin(\varepsilon - \delta), \quad \Xi = 2B\sin\varepsilon)$

Нетрудно видеть, что система дифференциальных уравнений (1.5) имеет частное решение

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \qquad (1.6)$$

Таким образом, при любом законе движения корабля $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ положением равновесия оси z гиросферы является направление на север, т. е. корректируемый гирогоризонткомпас не имеет скоростной девиации.

Для удовлетворительной работы гирогоризонткомпаса его колебания относительно положения равновесия $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ должны быть затухающими. Уравнения в вариациях, которые можно получить из (1.5), полагая углы α, β, γ и δ малыми, будут иметь вид

$$\alpha' - \frac{v_N}{R}\operatorname{tg}\varphi\,\alpha - \left(\frac{K}{H} + U\cos\varphi\right)\beta + \frac{\Xi}{H}\left(U\sin\varphi + \frac{v_E}{R}\operatorname{tg}\varphi\right)\delta = 0$$
$$\beta' + \frac{\mu K}{H}\beta + U\cos\varphi\,\alpha - \frac{\Xi}{H}\frac{v_N}{R}\delta = 0 \qquad (1.7)$$
$$\gamma' + \frac{\sigma K}{\Xi}\gamma - \frac{1}{\Xi}\left[\varkappa + H\left(U\cos\varphi + \frac{v_E}{R}\right)\right]\delta = 0, \quad \delta' + \frac{K}{\Xi}\gamma = 0$$

2. Так как $v_N = v_N(t)$, $v_E = v_E(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, то уравнения (1.7) представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Достаточные условия асимптотической устойчивости частного решения (1.6), определяющего собой положение равновесия (точнее — стационарного движения) гирогоризонткомпаса, найдем при помощи функции Ляпунова, которую можно построить предложенным в работе [4] методом. Обозначая

$$f_1(t) = \frac{v_N}{R}\operatorname{tg}\varphi, \quad f_2(t) = U\cos\varphi, \quad F_1(t) = \frac{\Xi}{H}\left(U\sin\varphi + \frac{v_E}{R}\operatorname{tg}\varphi\right)$$
$$F_2(t) = \frac{\Xi}{H}\frac{v_N}{R}, \quad F_3(t) = \frac{H}{\Xi}\left(U\cos\varphi + \frac{v_E}{R}\right) \qquad (2.1)$$

приведем уравнения (1.7) к виду

$$\alpha' - \frac{K}{H}\beta = f_1(t)\alpha + f_2(t)\beta - F_1(t)\delta$$
$$\beta' + \frac{\mu K}{H}\beta + s\alpha = [s - f_2(t)]\alpha + F_2(t)\delta$$
$$\gamma' + \frac{\sigma K}{\Xi}\gamma - \frac{\varkappa}{\Xi}\delta = F_3(t)\delta, \quad \delta' + \frac{K}{\Xi}\gamma = 0 \qquad (2.2)$$

При этом коэффициент s во втором уравнении (2.2) выберем так, чтобы у системы дифференциальных уравнений

$$\alpha' - \frac{K}{H}\beta = 0, \qquad \beta' + \frac{\mu K}{H}\beta + s\alpha = 0 \tag{2.3}$$

характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \frac{\mu K}{H}\lambda + \frac{sK}{H} = 0 \tag{2.4}$$

имело пару комплексных корней

$$\lambda_1, \lambda_2 = \varepsilon_1 \pm i\omega_1, \quad \varepsilon_1 = -\frac{\mu K}{2H}, \qquad \omega_1 = \left(\frac{sK}{H} - \varepsilon_1^2\right)^{1/2} \tag{2.5}$$

Таким образом, коэффициент s должен удовлетворять неравенству

$$s > \mu^2 K \,/\, 4H \tag{2.6}$$

Заметим, что коэффициент s не входит в число параметров системы, но его выбор [4] определяет приведенное ниже преобразование к новым переменным, и связанные с этим преобразованием параметры выбираемой ниже функции Ляпунова.

Параметры системы $\varkappa$, σ и K выберем так, чтобы выполнялось условие

$$\varkappa > {}^1/_4\sigma^2 K \tag{2.7}$$

При этом у системы дифференциальных уравнений

$$\gamma' + \frac{\sigma K}{\Xi}\gamma - \frac{\varkappa}{\Xi}\delta = 0, \qquad \delta' + \frac{K}{\Xi}\gamma = 0 \tag{2.8}$$

характеристическое уравнение

$$\Lambda^2 + \frac{\sigma K}{\Xi}\Lambda + \frac{\varkappa K}{\Xi^2} = 0 \tag{2.9}$$

будет иметь пару комплексных корней

$$\Lambda_1, \Lambda_2 = \varepsilon_2 \pm \omega_2 i \quad \left(\varepsilon_2 = -\frac{\sigma K}{2\Xi}, \quad \omega_2 = \left(\frac{\varkappa K}{\Xi^2} - \varepsilon_2^2\right)^{1/2}\right) \tag{2.10}$$

Перейдем к новым переменным $x_1, \ldots, x_4$ при помощи соотношений

$$\alpha = x_1, \quad \beta = \frac{\varepsilon_1 H}{K}x_1 + \frac{\omega_1 H}{K}x_2, \quad \gamma = \omega_2 x_3 + \varepsilon_2 x_4, \quad \delta = -\frac{K}{\Xi}x_4 \tag{2.11}$$

Из соотношений (2.12) следует, что

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = -\frac{\varepsilon_1}{\omega_1}\alpha + \frac{K}{\omega_1 H}\beta, \quad x_3 = \frac{1}{\omega_2}\gamma + \frac{\varepsilon_2\Xi}{\omega_2 K}\delta, \quad x_4 = -\frac{\Xi}{K}\delta \tag{2.12}$$

В соответствии с (2.2), новые переменные $x_1, \ldots, x_4$ будут удовлетворять следующей системе дифференциальных уравнений:

$$x_1' = \left[\varepsilon_1 + f_1(t) + \frac{\varepsilon_1 H}{K} f_2(t)\right]x_1 + \omega_1\left[1 + \frac{H}{K} f_2(t)\right]x_2 + \frac{K}{\Xi}F_1(t)\,x_4$$

$$x_2' = -\left\{\omega_1 - \frac{K}{\omega_1 H}[s - f_2(t)] + \frac{\varepsilon_1}{\omega_1}\left[f_1(t) + \frac{\varepsilon_1 H}{K} f_2(t)\right]\right\}x_1 + {}$$
$$+ \varepsilon_1\left[1 - \frac{H}{K} f_2(t)\right]x_2 - \frac{K}{\Xi}\left[\frac{\varepsilon_1}{\omega_1}F_1(t) + \frac{K}{\omega_1 H}F_2(t)\right]x_4$$

$$x_3' = \varepsilon_2 x_3 - \left[\omega_2 + \frac{K}{\omega_2\Xi}F_3(t)\right]x_4, \qquad x_4' = \omega_2 x_3 + \varepsilon_2 x_4 \tag{2.13}$$

В качестве функции Ляпунова примем определенно-отрицательную функцию

$$V = -{}^1/_2 (x_1^2 + x_2^2 + px_3^2 + px_4^2) \qquad (p > 0) \tag{2.14}$$

Ее производная по времени, в силу дифференциальных уравнений (2.13), будет иметь вид

$$V' = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + \\ + a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2 \tag{2.15}$$

где

$$a_{11} = -\left[\varepsilon_1 + f_1(t) + \frac{\varepsilon_1 H}{K} f_2(t)\right]$$

$$a_{12} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\varepsilon_1}{\omega_1} f_1(t) - \frac{H}{\omega_1 K}(\omega_1^2 - \varepsilon_1^2) f_2(t) - \frac{K}{\omega_1 H}[s - f_2(t)]\right\}$$

$$a_{13} = 0, \quad a_{14} = -\frac{K}{2\Xi} F_1(t), \quad a_{22} = -\varepsilon_1\left[1 - \frac{H}{K} f_2(t)\right]$$

$$a_{23} = 0, \quad a_{24} = \frac{K}{2\Xi}\left[\frac{\varepsilon_1}{\omega_1} F_1(t) + \frac{K}{\omega_1 H} F_2(t)\right]$$

$$a_{33} = pa_{33}^*, \quad a_{34} = pa_{34}^*, \quad a_{44} = pa_{44}^*, \quad a_{33}^* = -\varepsilon_2$$

$$a_{34}^* = \frac{K}{2\omega_2\Xi} F_3(t), \quad a_{44}^* = -\varepsilon_2 \tag{2.16}$$

Согласно теореме Сильвестра, квадратичная форма (2.15) будет определенно-положительной, если для любого момента времени t будут положительными главные диагональные миноры ее дискриминанта

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{2.17}$$

Условия положительности главных диагональных миноров дискриминанта (2.17) можно привести к следующему виду

$$a_{11} > 0, \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad a_{33}^* > 0$$

$$p\Delta^*\Delta + a_{33}^*(2a_{12}a_{14}a_{24} - a_{14}^2 a_{22} - a_{24}^2 a_{11}) > 0 \qquad (\Delta^* = a_{33}^* a_{44}^* - a_{34}^{*2}) \tag{2.18}$$

Нетрудно видеть, что если выполнены условия

$$a_{11} > 0, \quad \Delta > 0, \quad a_{33}^* > 0, \quad \Delta^* > 0 \tag{2.19}$$

то последнему условию (2.18) можно удовлетворить, выбирая достаточно большим коэффициент p, значение которого в выражении (2.15) не фиксировано.

Таким образом, неравенства (2.19) можно принять в качестве условий, обеспечивающих положительность главных диагональных миноров дискриминанта (2.17).

Неравенства (2.19) должны выполняться для любого момента времени t и представляют собой достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия (1.6) гирогоризонткомпаса.

3. Если в исходных уравнениях (1.1) положить $\varepsilon = 0$, $\gamma \equiv 0$, $\delta \equiv 0$, а также принять, что определяемые выражениями (1.2) и (1.3) корректирующие моменты $M_z \equiv 0$, $M_{y_1} \equiv 0$, то придем к уравнениям движения однороторного корректируемого гирокомпаса, изученного в работе [5].

При наличии корректирующих моментов M_ζ и M_{x^*}, определяемых согласно (1.2), положение равновесия однороторного корректируемого гирокомпаса будет следующим [5]:

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0 \tag{3.1}$$

т. е. этот прибор, как и рассмотренный выше гирогоризонткомпас, не будет иметь скоростной девиации.

Уравнения в вариациях относительно положения равновесия (3.1) у однороторного гирокомпаса имеют вид [5]

$$\alpha' - \frac{v_N}{R}\operatorname{tg}\varphi\,\alpha - \left(\frac{K}{H} + U\cos\varphi\right)\beta = 0, \qquad \beta' + \frac{\mu K}{H}\beta + U\cos\varphi\,\alpha = 0 \tag{3.2}$$

и могут быть получены из (1.7), если положить в этих уравнениях $\gamma \equiv 0$, $\delta \equiv 0$.

Достаточные условия устойчивости положения равновесия (3.1) однороторного гирокомпаса [5]

$$a_{11}(t) > 0, \qquad a_{11}(t)\,a_{22}(t) - [a_{12}(t)]^2 > 0 \tag{3.3}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} определены формулами (2.17), непосредственно вытекают из полученных здесь для гирогоризонткомпаса достаточных условий устойчивости (2.19).

4. В качестве примера рассмотрим гирогоризонткомпас, параметры которого имеют следующие значения:

$$\frac{K}{H} = 3.6\ сек^{-1}, \quad \mu = 0.005, \quad \frac{H}{\Xi} = 1, \quad \frac{\varkappa}{\Xi} = 0.0016\ сек^{-1}, \quad \sigma = 0.04$$

Коэффициент s, которым определяется преобразование (2.2) и соответственно параметры (2.6) функции Ляпунова, примем равным $s = 4\cdot 10^{-5}$ $сек^{-1}$.

При указанных значениях параметров достаточные условия устойчивости (2.20) выполняются в любой точке прямоугольного параллелепипеда

$$|\varphi| \leqslant \varphi_m, \quad |v_N| \leqslant v_{N_m}, \quad |v_E| \leqslant v_{E_m}$$

Здесь

$$\varphi_m = 85^\circ, \quad v_{N_m} = 600\ м\ сек^{-1}, \quad v_{E_m} = 600\ м\ сек^{-1} \tag{4.1}$$

так что корректируемый гирогоризонткомпас может быть применен в авиации, как это и отмечено в работе [1].

Заметим, что так как $\varphi' = v_N / R$, то широта местонахождения корабля

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \frac{v_N(\tau)}{R}\,d\tau \tag{4.2}$$

Таким образом, положение равновесия гирогоризонткомпаса сохраняет асимптотическую устойчивость при любом законе изменения скорости корабля $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$, при котором $v_N(t)$, $v_E(t)$ и $\varphi(t)$ не выходят из области (4.1).

Поступила 6 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Gyroscopes: Theory and Design (ed. Savet P. H.). New York, 1961, p. 80.
2. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
3. Ройтенберг Я. Н. К теории гироскопического компаса. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
4. Ройтенберг Я. Н. Об одном методе построения функций Ляпунова для линейных систем с переменными коэффициентами. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
5. Ройтенберг Я. Н. Корректируемый гирокомпас. Докл. АН СССР, 1965, т. 163, № 2.