Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ АДИАБАТИЧЕСКИЕ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИИ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

С. М. Колесников, К. П. Станюкович
(Москва)

§ 1. Основные уравнения. В случае нестационарных движений в собственном поле тяжести необходимо найти совместное решение уравнений поля тяготения Эйнштейна и содержащихся в них уравнений сохранения энергии импульса [1]

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k = \varkappa T_i^k$$

$$T_{i;\,k}^{\;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,T_i^k)}{\partial x^k} - \frac{T^{kl}}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = 0 \tag{1.1}$$

$$T_i^k = (p+\varepsilon)\,u_i u^k + \delta_i^k p = \frac{W}{v}\,u_i u^k + \delta_i^k p$$

$$\varkappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \qquad W = (p+\varepsilon)\,v = E + pv$$

Здесь $R^k{}_i$ — тензор кривизны, $T^k{}_i$ — тензор энергии-импульса, $\varkappa$ — постоянная тяготения Эйнштейна, W — теплосодержание на единицу массы, v — удельный объем, u_k — компоненты четыре-скорости.

Если ограничиться рассмотрением центрально-симметричных движений, то метрику пространства — времени можно выбрать в следующем виде:

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda r^2 - r^2(d\beta^2 + \sin^2\beta\, d\varphi^2)$$

$$g_{00} = -e^\nu, \quad g_{11} = e^\lambda, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2\sin^2\beta \tag{1.2}$$

$$\sqrt{-g} = \exp\left[{}^1/{}_2(\nu+\lambda)\right] r^2 \sin\beta$$

В дальнейшем будем изучать только радиальные течения, когда $d\beta\,/\,dt = 0$, $d\varphi\,/\,dt = 0$. В этом случае хронометрически-инвариантная трехмерная скорость задается выражением

$$a^r = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\frac{dr}{dt} = e^{-{}^1/{}_2\nu}\frac{dr}{dt}, \qquad a^2 = a_r a^r = g_{11}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = e^{\lambda-\nu}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

При этом

$$ds^2 = e^\nu(c\theta\, dt)^2 = (c\theta\, d\tau)^2, \quad \theta = \sqrt{1 - a^2/c^2}, \quad d\tau = e^{{}^1/{}_2\nu}$$

Здесь $d\tau$ — элемент собственного времени, компоненты четыре-скорости примут вид

$$u^0 = \frac{1}{\theta}\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\theta}e^{-{}^1/{}_2\nu}, \qquad u_0 = g_{00}u^0 = \frac{1}{\theta}e^{{}^1/{}_2\nu}$$

$$u^1 = \frac{dr}{d\tau}\frac{1}{c\theta} = \frac{a}{c\theta}e^{-{}^1/{}_2\lambda}, \quad u_1 = g_{11}u^1 = \frac{a}{c\theta}e^{{}^1/{}_2\lambda}, \quad u_0u^0 + u_1u^1 = -1 \tag{1.3}$$

Уравнения сохранения энергии-импульса (1.1) дают нам уравнения движения и уравнение неразрывности. Так как $dW = Td\sigma + vdp$, где T — абсолютная температура, σ — энтропия, то для рассматриваемых адиабатических процессов необходимо еще использовать уравнение сохранения энтропии

$$\frac{d(Wu^i)}{ds} + \frac{\partial W}{\partial x^i} = \frac{W}{2} u^k u^l \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} + T\frac{\partial \sigma}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\sqrt{-g}u^k}{v}\right) = 0, \quad \frac{d\sigma}{ds} = 0 \quad (1.4)$$

Система уравнений (1.4) есть полная система уравнений сохранения, характеризующих адиабатические течения. Подставляя сюда компоненты четыре-скорости (1.3) и учитывая, что

$$d(\ln \sqrt{-g}) = \frac{d\lambda + d\nu}{2} + 2\frac{dr}{r} + \operatorname{tg}\beta\, d\beta$$

получим систему уравнений гидродинамики радиальных течений в собственном поле тяжести (1.5)

$$\frac{1}{(c\theta)^2}\left(A\frac{\partial a}{\partial t} + a\frac{\partial a}{\partial r}\right) - \frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\partial \ln v}{\partial r} + \frac{aA}{c^2}\frac{\partial \ln v}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{Aa}{c^2}\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \nu}{\partial r}\right) = \frac{\theta^2 T}{W}\frac{\partial \sigma}{\partial r}$$

$$-\left(A\frac{\partial \ln v}{\partial t} + a\frac{\partial \ln v}{\partial r}\right) + \frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\partial a}{\partial r} + \frac{aA}{\partial r} + \frac{aA}{c^2}\frac{\partial a}{\partial t}\right) +$$

$$+\frac{2a}{r} + \frac{1}{2}\left(A\frac{\partial \lambda}{\partial t} + a\frac{\partial \nu}{\partial r}\right) = 0$$

$$A\frac{\partial \sigma}{\partial t} + a\frac{\partial \sigma}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\omega^2}{c^2} = -\left(\frac{\partial \ln v}{\partial \ln W}\right)_\sigma, \quad A = \exp\left(\frac{\lambda - \nu}{2}\right)$$

Заметим, что выражение для скорости a^* вдоль характеристик этих уравнений имеет тот же вид, что и в специальной теории относительности

$$a^* = A\left(\frac{dr}{dt}\right)^* = \left(\frac{dr}{d\tau_0}\right)^* = \frac{dl}{d\tau} = \frac{a \pm \omega}{1 \pm a\omega / c^2}, \qquad dl = e^{1/2\lambda}\, dr, \qquad d\tau_0 = \frac{dt}{A} \quad (1.6)$$

Это и вполне естественно, так как наличие гравитационного поля не может изменить локального соотношения между хронометрически-инвариантными компонентами трехмерных скоростей a^*, a, ω, измеряемых в каждой точке r по часам наблюдателя, находящегося в той же точке. Однако, как следует из (1.6), первая характеристика на фронте разлета ($\omega = 0$) оказывается прямолинейной в переменных l, τ, которые имеют физический смысл, в то время как в переменных r, t она криволинейна.

Выпишем уравнения поля

$$\frac{\partial (re^{-\lambda})}{\partial r} = 1 + \varkappa r^2 T_0{}^0 = 1 - \frac{\varkappa r^2}{\theta^2}\left(\varepsilon + p\frac{a^2}{c^2}\right)$$

$$A\frac{\partial (re^{-\lambda})}{\partial t} = -\varkappa c A T_0{}^1 = \frac{\varkappa a r^2}{\theta^2}(\varepsilon + p)$$

$$\left(1 + r\frac{\partial \nu}{\partial r}\right)e^{-\lambda} = 1 + \frac{\varkappa r^2}{\theta^2}\left(p + \varepsilon\frac{a^2}{c^2}\right) = 1 + \varkappa r^2 T_1{}^1 \qquad (1.7)$$

$$\varkappa T_2{}^2 = \varkappa T_3{}^3 = \varkappa p = \frac{e^{-\lambda}}{2}\left[\frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \nu}{\partial r}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial(\nu - \lambda)}{\partial r} - \frac{\partial \nu}{\partial r}\frac{\partial \lambda}{\partial r} - \frac{A}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(A\frac{\partial \lambda}{\partial t}\right)\right]$$

Из этих уравнений только два являются независимыми от уравнений (1.5). Эти два уравнения удобно написать в виде

$$A\frac{\partial\lambda}{\partial t}+a\frac{\partial\lambda}{\partial r}=-a\left(\frac{e^{\lambda}-1}{r}+\varkappa pre^{\lambda}\right),\quad A\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial t}+a\frac{\partial(\lambda+\nu)}{\partial r}=0 \quad (1.8)$$

Уравнения (1.5) и первое уравнение (1.8) при заданном уравнении состояния $p=p\,(\varepsilon)$ определяют решение

$$p=p\,(r,t),\qquad \sigma=\sigma\,(r,t),\qquad a=a\,(r,t),\qquad \lambda=\lambda\,(r,t),\qquad \nu=\nu\,(r,t)$$

1) В статическом случае $a=0$ второе уравнение (1.8) дает $\partial\lambda\,/\,\partial t=0$, а из (1.5) имеем $\partial\ln v\,/\,dt=0$, $d\sigma\,/\,dt=0$, следовательно,

$$\frac{dp}{dr}=-\frac{1}{2}(p+\varepsilon)\frac{d\nu}{dr} \quad (1.9)$$

Далее, из уравнений (1.7) имеем

$$\frac{d}{dr}(re^{-\lambda})=1-\varkappa r^2\varepsilon,\qquad e^{-\lambda}r\frac{d\nu}{dr}=\varkappa r^2p+1-e^{-\lambda}$$

Пользуясь этими соотношениями, исключим из (1.9) $\nu\,(r)$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{r\,(p+\varepsilon)\,(1+\varkappa pr^2)}{\{(p+\varepsilon)-2rdp\,/\,dr\}}\right]=1-\varkappa r^2\varepsilon \quad (1.10)$$

Отметим, что при $p=\text{const}$ из уравнения (1.10) вытекает уравнение состояния замкнутой статической модели Вселенной Эйнштейна $\varepsilon+3p=0$.

Отсюда заключаем, что модель Эйнштейна соответствует модели звезды с постоянным отрицательным давлением. С точки зрения внешнего наблюдателя, замкнутость такой звезды означает невозможность пересечения границы звезды геодезической линией любого сигнала, однако отнюдь не отражает принципиальное отсутствие границы. Поэтому замкнутая статическая модель может рассматриваться как автономное ограниченное неэвклидово образование, погруженное во внешней пространственный фон, и, следовательно, замкнутость еще никоим образом не означает единственности этой модели Вселенной.

Решая уравнение (1.10), определяем $p\,(r)$, затем $\lambda\,(r)$, $\nu\,(r)$, что полностью решает задачу о равновесии.

2) Значительный интерес представляет изучение радиальных движений идеальной жидкости в заданном внешнем гравитационном поле, например, внешнем или внутреннем поле Шварцшильда, когда $\lambda=\lambda\,(r)$, $\nu=\nu\,(r)$ — заданные функции r. Нетрудно видеть, что в этом случае уравнения (1.5) введением независимой переменной $dr_1=Adr$ сводятся к виду, аналогичному уравнениям гидродинамики специальной теории относительности, и отличаются от них только видом свободных членов

$$\frac{1}{(c\theta)^2}\left(\frac{\partial a}{\partial t}+a\frac{\partial a}{\partial r_1}\right)-\frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\partial\ln v}{\partial r_1}+\frac{a}{c^2}\frac{\partial\ln v}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr_1}=\frac{T\theta^2}{W}\frac{\partial\sigma}{\partial r_1}$$

$$-\left(\frac{\partial\ln v}{\partial t}+a\frac{\partial\ln v}{\partial r_1}\right)+\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\partial a}{\partial r_1}+\frac{a}{c^2}\frac{\partial a}{\partial t}\right)+\frac{a}{2}\frac{d\nu}{dr_1}+\frac{2a}{r_1}\frac{r_1}{rA}=0 \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}+a\frac{\partial\sigma}{\partial r_1}=0$$

Для внешнего поля Шварцшильда

$$\nu+\lambda=0, \qquad \frac{d\lambda}{dr}+\frac{e^{\lambda}-1}{r}=0, \qquad e^{-\lambda}=e^{\nu}=1-\frac{r_0}{r}, \quad r_0=\frac{2GM_0}{c^2}$$

Отсюда

$$\frac{d\nu}{dr_1}=\frac{r_0}{r^2(1-r_0/r^2)^2}$$

Здесь M_0 — масса центрального тела, создающего поле.

3) В общем случае адиабатических течений в собственном поле тяжести нахождение решения совокупной системы уравнения (1.5) и первого уравнения (1.8) представляет значительные трудности. В заключение работы получим это решение в асимптотическом случае движений со скоростями, близкими к скорости света и ультрарелятивистского уравнения состояния. Здесь же предлагаем метод последовательного интегрирования (1.5) и первого уравнения (1.8) с использованием (1.7).

Прежде всего исключим из уравнений (1.5) при помощи второго уравнения (1.8) функцию $\nu=\nu(r, t)$; получим

$$\frac{1}{(c\theta)^2}\left(A\frac{\partial a}{\partial t}+a\frac{\partial a}{\partial r}\right)-\frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\partial\ln v}{\partial r}+\frac{aA}{c^2}\frac{\partial\ln v}{\partial t}\right)=\frac{1}{2a}\left(A\frac{\partial\lambda}{\partial t}+a\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)+\frac{\theta^2T}{W}\frac{\partial\sigma}{\partial r}$$

$$-\left(A\frac{\partial\ln v}{\partial t}+a\frac{\partial\ln v}{\partial r}\right)+\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\partial a}{\partial r}+\frac{aA}{c^2}\frac{\partial a}{\partial t}\right)+$$

$$+\frac{2a}{r}=\frac{a}{2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial r}+\frac{aA}{c^2}\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right) \tag{1.12}$$

В уравнениях (1.12) перейдем к независимым переменным r, λ; для этого при помощи первого уравнения (1.7) и первого уравнения (1.8) найдем якобиан преобразования $\partial(t; r)/\partial(\lambda; r)$, а также $\partial t/\partial r$; имеем

$$a\frac{\partial(t;r)}{\partial(\lambda;r)}=a\frac{\partial t}{\partial\lambda}=-\frac{AA_1r}{A_4}, \qquad a\frac{\partial t}{\partial r}=A\left(1-\frac{A_2}{A_4}\right) \tag{1.13}$$

Здесь

$$A_1=e^{-\lambda}, \quad A_2=1+\varkappa pr^2-e^{-\lambda}, \quad A_3=\varkappa r^2\varepsilon+e^{-\lambda}-1, \quad A_4=\varkappa(p+\varepsilon)(r/\theta)^2$$

Соотношения (1.13) приводят уравнения (1.12) к симметричному виду

$$\frac{1}{2(\theta c)^2}\left(A_1\frac{\partial a^2}{\partial\ln r}-A_2\frac{\partial a^2}{\partial\lambda}\right)-\frac{\omega^2}{c^2}\left(A_1\frac{\partial\ln v}{\partial\ln r}+A_3\frac{\partial\ln v}{\partial\lambda}\right)+\frac{1}{2}A_2=\frac{T\theta^2A_4}{W}\frac{\partial\sigma}{\partial\lambda}$$

$$\left(A_1\frac{\partial\ln v}{\partial\ln r}-A_2\frac{\partial\ln v}{\partial\lambda}\right)-\frac{1}{\theta^2}\left(A_1\frac{\partial\ln v}{\partial\ln r}+A_3\frac{\partial\ln a}{\partial\lambda}\right)- \tag{1.14}$$

$$-2A_1+\frac{A_3}{2}=0, \qquad A_2\frac{\partial\sigma}{\partial\lambda}-A_1\frac{\partial\sigma}{\partial\ln r}=0$$

Напомним, что при выбранном уравнении состояния, например при $pv^k=\sigma$, ω, ε и p, функции v, σ и уравнения (1.4) содержат три неизвестные функции

$$v=v(\lambda, r), \qquad a=a(\lambda, r), \qquad \sigma=\sigma(\lambda, r)$$

Интегрирование этих уравнений может быть проведено методом характеристик.

После этого определяем $\nu = \nu(\lambda, r)$ из первого (1.8), которое в переменных λ, r принимает вид

$$A_1 \frac{\partial \nu}{\partial r} + (A_4 - A_2)\frac{\partial \nu}{\partial r} = \frac{a^2}{c^2} A_4 + A_2 \tag{1.15}$$

Наконец, при помощи (1.13) находим $t = t(\lambda, r)$, что дает нам полное решение задачи.

Таким образом, последовательное интегрирование (1.14), (1.13) и (1.15) позволяет строить решения изотропных движений не в сопутствующей системе отсчета, где $a = 0$, а в связанной с выделенным центром симметрии. Трехмерная скорость a, измеряемая в таких системах отсчета, имеет определенный физический смысл при постановке граничных задач как в заданном внешнем гравитационном поле, так и при изучении движения в собственных гравитационных полях.

Кроме того, уравнения (1.5) в предельном случае отсутствия гравитационного поля (галилеева метрика) переходят в уравнения гидродинамики специальной теории относительности, тогда как в сопутствующей системе отсчета такой переход несодержателен, поскольку последняя определяется как раз из условия равенства нулю потока энергии-импульса. В случае изэнтропических движений система (1.14) сводится к двум уравнениям.

§ 2. Общие решения частных случаев уравнения состояния. а) *Пылевидное вещество*[1]. В космологических задачах обычно принимается, что давление исчезающее мало по сравнению со средней плотностью вещества во Вселенной, т. е. $p \ll \varepsilon = \rho c^2$. Если положить $p = 0$, $\sigma = \text{const}$, то $\omega = 0$, $d \ln v = -d \ln \varepsilon$, и уравнения (1.14) сильно упростятся

$$\frac{1}{(\theta c)^2}\left(\alpha \frac{\partial a^2}{\partial \lambda} - A_1 \frac{\partial a^2}{\partial \ln r}\right) = \alpha, \qquad \alpha = 1 - A_1$$

$$A_1 \frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial \ln r} - \alpha \frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial \lambda} + \frac{1}{\theta^2}\left(A_1 \frac{\partial \ln a}{\partial \ln r} + A_3 \frac{\partial \ln a}{\partial \lambda}\right) + 2A_1 - \frac{A_3}{2} = 0 \tag{2.1}$$

Первое уравнение этой системы легко интегрируется

$$\theta^2 = 1 - a^2 / c^2 = A_1 \Phi_1 (\alpha r) \tag{2.2}$$

Далее, из второго уравнения (2.1) находим

$$\varepsilon = (\Phi_2(\alpha r) - B_2^{-1}) B_1, \qquad B_1 = \exp\left(\int B_3 \, d\lambda\right), \qquad B_2 = \int B_4 B_1 \, d\lambda,$$
$$B_3 = \alpha \left(\frac{1}{2\Phi_1} - \frac{3A_1 + 1}{2}\right) \tag{2.3}$$
$$B_4 = -\frac{\varkappa \alpha^3 r^2}{(1 - A_1 \Phi_1)}\left\{\frac{r}{\Phi_1}\frac{d\Phi_1}{d(\alpha r)} + \frac{\Phi_1}{\alpha^2}(1 - A_1\Phi_1) - 1\right\}$$

Используя (2.2) и (2.3), для функции $\nu(r, \lambda)$ из уравнения (1.15) получаем при $p = 0$

$$A_1 \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{\partial \nu}{\partial \lambda}\left(\frac{\varkappa r \varepsilon}{\theta^2} - \frac{\alpha}{r}\right) = \frac{a^2 \varkappa r \varepsilon}{(c\theta)^2} + \frac{\alpha}{r} \tag{2.4}$$

[1] Задача о движении газа при $p = 0$ в сопутствующей системе отсчета была впервые решена в 1934 году Р. Толманом ([1] стр. 344). Однако в этом решении не вычислялись скорости для внутренней задачи Шварцшильда.

Это уравнение также решается в квадратурах. Уравнение характеристик

$$\frac{\partial\lambda}{\partial r}=e^{\lambda}\left(\frac{\varkappa r B_1(\Phi_2-B_2^{-1})}{\Phi_1}-\frac{\alpha}{r}\right)$$

дает $\chi_1(\lambda, r)$. Второй интеграл определяет решение вдоль характеристик

$$\nu(\lambda, r)=\frac{\varkappa}{A_1}\int\frac{rB_1}{\Phi_1}(1-A_1\Phi_1)(\Phi_2-B_2^{-1})\,dr+\alpha\ln r+\chi(\chi_1(\lambda, r)) \quad (2.5)$$

Наконец, первое уравнение (1.13) задает последнюю квадратуру

$$t=-\frac{1}{\varkappa rc}\int\frac{\Phi_1\exp\{-{}^1/_2[\lambda+\nu(\lambda, r)]\}\,d\lambda}{\sqrt{1-A_1\Phi_1(\Phi_2-B_2^{-1})B_1}}+\psi(r) \quad (2.6)$$

Таким образом, получено общее решение задачи о движении пылевидной материи, задаваемое интегралами (2.2) — (2.6) и зависящее от четырех произвольных функций Φ_1, Φ_2, ψ, χ.

При решении конкретных граничных задач необходимо задать начальное распределение скоростей $\theta_0=\theta_0(\lambda, r)$ и определить Φ_1, после чего легко найти Φ_2, ψ, χ.

б) *Ультрарелятивистское приближение.* Рассмотрим случай адиабатических движений со скоростями, близкими к скорости света. Положим $a/c=1-2\Delta$, где $\Delta\ll 1$. Пренебрегая высшими порядками малости Δ, запишем систему (1.5) и (1.8) в виде

$$A\frac{\partial\ln(Wv)}{\partial t'}+\frac{\partial\ln(Wv)}{\partial r}=\frac{2}{r}, \qquad A\frac{\partial\lambda}{\partial t'}+\frac{\partial\lambda}{\partial r}=-\left[\frac{e^{\lambda}-1}{r}+\varkappa pre^{\lambda}\right]$$

$$A\frac{\partial\Pi}{\partial t'}+\frac{\partial\Pi}{\partial t'}=0, \qquad A\frac{\partial\sigma}{\partial t'}+\frac{\partial\sigma}{\partial r}=0,\ t'=ct,\ \Pi=\ln\Delta+\lambda-2\ln W \quad (2.7)$$

Заметим, что

$$d\ln(Wv)=\frac{\partial\ln(Wv)}{\partial p}dp+\frac{\partial\ln(Wv)}{\partial\sigma}d\sigma$$

Первое уравнение этой системы с учетом четвертого дает

$$A\frac{\partial p}{\partial t'}+\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{2}{r}\left(\frac{\partial p}{\partial\ln(Wv)}\right)_{\sigma} \quad (2.8)$$

Аналогично преобразуем третье уравнение (2.7)

$$A\frac{\partial(\ln\Delta+\lambda)}{\partial t'}+\frac{\partial(\ln\Delta+\lambda)}{\partial r}-2\left(\frac{\partial\ln W}{\partial p}\right)_{\sigma}\left(A\frac{\partial p}{\partial t'}+\frac{\partial p}{\partial r}\right)=0 \quad (2.9)$$

Для ультрарелятивистского уравнения состояния

$$p=(k-1)\varepsilon, \qquad Wv=v(\varepsilon v+pv)=\frac{kpv^2}{k-1}$$

Отсюда, учитывая, что $pv^k=\sigma$, находим

$$\left(\frac{\partial\ln W}{\partial p}\right)_{\sigma}=\frac{k-1}{kp}, \qquad \left(\frac{\partial\ln(Wv)}{\partial p}\right)_{\sigma}=\frac{k-2}{kp}$$

Подставляя эти значения в уравнения (2.7) и переходя к независимым переменным p, r, получим систему

$$\frac{\partial\lambda}{\partial r}+\frac{e^\lambda-1}{r}+\varkappa rpe^\lambda-b\frac{\partial\lambda}{\partial p}=0$$

$$\frac{\partial(\ln\Delta+\lambda)}{\partial r}-b\frac{\partial(\ln\Delta+\lambda)}{\partial p}+\frac{4(k-1)}{(2-k)r}=0 \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial r}-b\frac{\partial\sigma}{\partial p}=0,\qquad A-\frac{\partial t'}{\partial r}+b\frac{\partial t'}{\partial p}=0,\qquad b=\frac{2kp}{(2-k)p}$$

Первое уравнение сразу интегрируется

$$1-e^{-\lambda}=\frac{1}{r}F_1(\gamma)-c_1,\qquad \gamma=pr^{2k/2-k},\qquad c_1=\frac{\varkappa pr^2(2-k)}{6-5k} \tag{2.11}$$

После этого легко записать решение второго уравнения (2.10)

$$\Delta=e^{-\lambda}F_2(\gamma)\,p^{2(k-1)/k}=\left(1-\frac{1}{r}F_1+c_1\right)F_2p^{2(k-1)/k} \tag{2.12}$$

Третье уравнение (2.10) дает

$$\sigma=F_3(\gamma) \tag{2.13}$$

Четвертое уравнение (2.10) может быть решено после определения $\nu=\nu(p,r)$, так как в него входит $A=\exp\left[{}^1/_2(\lambda-\nu)\right]$. Для определения ν используем второе уравнение (1.8), записанное в переменных p, r, причем в нашем приближении

$$2A\frac{\partial\lambda}{\partial p}-\frac{\partial t'}{\partial r}\frac{\partial(\lambda+\nu)}{\partial p}+\frac{\partial t'}{\partial p}\frac{\partial(\lambda+\nu)}{\partial r}=0 \tag{2.14}$$

Производную $\partial t'/\partial r$ подставляем из четвертого уравнения (2.10), а $\partial t'/\partial p$ определяем из второго уравнения (1.7)

$$2\frac{\partial\lambda}{\partial p}-\frac{\partial(\lambda+\nu)}{\partial p}=e^\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{4(k-1)\Delta}{\varkappa kp^2}\left[\frac{\partial(\lambda+\nu)}{\partial r}-b\frac{\partial(\lambda+\nu)}{\partial p}\right]$$

Это уравнение задает $\nu=\nu(p,r)$, после чего записываем последнюю квадратуру для

$$ct=F_4(\gamma)+\int\exp\left[{}^1/_2\{\lambda(p,r)-\nu(p,r)\}\right]dr \tag{2.15}$$

Построенное решение зависит от пяти произвольных функций и решает поставленную задачу.

Можно сказать, что основные уравнения (1.5) и (1.7) (которые позволяют включить в рассмотрение и электромагнитные поля) полностью описывают центрально-симметричные радиальные течения в собственном поле тяжести и могут быть использованы в космологии изотропного пространства. Общая теория относительности в этом смысле есть просто газовая динамика в римановом пространстве.

Следует заметить, что поставленную здесь задачу исследования точных уравнений, удобных для описания релятивистского движения среды в собственном поле тяжести, можно решать, используя вариационные методы сплошной среды и уравнения поля [2].

Поступила 15 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Физматгиз, 1962.
2. Станюкович К. П. Лагранжиан сплошной среды в римановом пространстве. Докл. АН СССР, 1964, т. 154 № 2.