Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

# О ПОГРЕШНОСТЯХ КЛАССИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК И ВОЗМОЖНОСТЯХ ЕЕ УТОЧНЕНИЯ

А. Л. Гольденвейзер

(Москва)

В работе сопоставляются результаты классической теории оболочек (теории, основанной на использовании гипотез Кирхгофа — Лява) с результатами, получаемыми асимптотическим интегрированием трехмерных уравнений теории упругости, и исследуется влияние тех или иных погрешностей, допущенных в исходных соотношениях классической теории, на окончательный результат.

Вопрос рассматривается для случая, когда исключено влияние условий закрепления краев, т. е., например, для задачи о замкнутой оболочке типа полной сферы. Предполагается только, что кривизны срединной поверхности изменяются достаточно плавно, что приведенная длина оболочки не слишком велика и что искомое напряженное состояние может быть формально построено по безмоментной теории при любой самоуравновешенной нагрузке с компонентами, достаточное число раз дифференцируемыми.

Обычно принимается [1], что погрешности классической теории имеют порядок $h_*$ (безразмерная толщина). В этом утверждении не учитывается влияние показателя изменяемости $t$; при $t = 0$ оно, вообще говоря, правильно, хотя существуют примеры, опровергающие обсуждаемое утверждение и в этом случае. Было показано, что если в исходных соотношениях допустить погрешности, характерные для классической теории, то для достаточно длинных цилиндрических оболочек [2,3] и для достаточно длинных геликоидальных оболочек [4,5] погрешности могут возрасти до величин, соизмеримых с единицей.

В предлагаемой работе для сформулированной выше задачи даются оценки погрешностей, учитывающие влияние показателя изменяемости $t$, показывается, что погрешности могут быть существенно уменьшены до величин порядка $h_*^{2-2t}$, и выводятся соотношения упругости, которыми надо для этого пользоваться.

1. Отнесем трехмерное пространство к триортогональной системе координат $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, в которой $\alpha$, $\beta$ — размерные параметры линий кривизны на срединной поверхности, а $\gamma$ — расстояние от этой поверхности, отсчитываемое по нормали.

Рассматриваемая оболочка в этой системе координат предполагается ограниченной поверхностями $\gamma = \pm h$, где $h$ — полутолщина, считающаяся постоянной. Под $H_\alpha$, $H_\beta$ подразумеваются трехмерные коэффициенты Ламэ, а под $R_\alpha$, $R_\beta$ — главные радиусы кривизны срединной поверхности. Эти величины связаны формулами

$$H_\alpha = A\left(1+\frac{\gamma}{R_\alpha}\right), \qquad H_\beta = B\left(1+\frac{\gamma}{R_\beta}\right)$$

в которых $A$, $B$ — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности.

При проверке последующих выкладок надо учитывать равенство

$$\frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta}=\frac{\partial A}{\partial \beta}\left(1+\frac{\gamma}{R_\beta}\right) \qquad (\alpha\beta)$$

вытекающее из уравнений Кодацци. В нем, как и всюду в дальнейшем, знак $(\alpha\beta)$ обозначает, что есть другое равенство, получаемое из него взаимной заменой $\alpha$ на $\beta$ и $A$ на $B$.

Введем константу $R$, подразумевая под ней некоторый характерный радиус кривизны срединной поверхности, перейдем к безразмерным радиусам кривизны $r_\alpha$, $r_\beta$, к безразмерной полутолщине $h_*$ и к безразмерным параметрам $\xi$, $\eta$, $\zeta$ при помощи формул

$$\frac{h}{R}=h_*, \qquad \frac{R_\alpha}{R}=r_\alpha \quad (\alpha\beta), \qquad R\frac{\partial}{\partial\alpha}=k\frac{\partial}{\partial\xi} \quad (\alpha\beta), \qquad R\frac{\partial}{\partial\gamma}=h_*^{-1}\frac{\partial}{\partial\zeta} \qquad (1.1)$$

(знак $(\alpha\beta)$ будет обозначать и взаимную замену $\xi$ на $\eta$).

В (1.1) под $k$ подразумевается постоянный параметр, определяемый равенством

$$h_*^{-t}=k \qquad (1.2)$$

где $t$ — неотрицательное рациональное число (предположение о том, что $t$ — рационально, не уменьшает общности, так как характерный радиус $R$, входящий в определение $h_*$, можно в известных пределах варьировать). Введем еще один постоянный параметр $\lambda$ при помощи равенств

$$\lambda^p=k, \qquad t=p/q \qquad (p,\ q \text{ — целые числа}) \qquad (1.3)$$

Запишем уравнения трехмерной упругой среды, отнесенной к описанной системе координат. Они после преобразований, вытекающих из формул настоящего раздела, приобретают вид

уравнения равновесия

$$\lambda^{p-q}B\left(1+\lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\beta}\right)\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial\xi}+\lambda^{p-q}A\left(1+\lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\alpha}\right)\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial\eta}+$$
$$+AB\left(1+\lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\alpha}\right)\left(1+\lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\beta}\right)\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}}{\partial\zeta}+\lambda^{-q}R\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(1+\lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\alpha}\right)(\sigma_\alpha-\sigma_\beta)+$$
$$+2\lambda^{-q}R\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(1+\lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\beta}\right)\tau_{\alpha\beta}+\lambda^{-q}AB\left[\left(\frac{2}{r_\alpha}+\frac{1}{r_\beta}\right)+\lambda^{-q}\frac{3\zeta}{r_\alpha r_\beta}\right]\tau_{\alpha\gamma}=0 \quad (\alpha\beta)$$

$$\lambda^{p-q}B\left(1+\lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\beta}\right)\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}}{\partial\xi}+\lambda^{p-q}A\left(1+\lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\alpha}\right)\frac{\partial\tau_{\beta\gamma}}{\partial\eta}+$$
$$+\lambda^{-q}R\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(1+\lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\alpha}\right)\tau_{\alpha\gamma}+\lambda^{-q}R\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(1+\lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\beta}\right)\tau_{\beta\gamma}-$$
$$-AB\lambda^{-q}\left[\left(1+\lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\beta}\right)\frac{\sigma_\alpha}{r_\alpha}+\left(1+\lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\alpha}\right)\frac{\sigma_\beta}{r_\beta}\right]+$$
$$+AB\left(1+\lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\alpha}\right)\left(1+\lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\beta}\right)\frac{\partial\sigma_\gamma}{\partial\zeta}+$$
$$+\lambda^{-q}AB\left[\left(1+\lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\alpha}\right)\frac{1}{r_\beta}+\left(1+\lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\beta}\right)\frac{1}{r_\alpha}\right]\sigma_\gamma=0 \qquad (1.4)$$

соотношения упругости

$$\frac{E}{R}\frac{\partial u_\gamma}{\partial\zeta} = \lambda^{-q}\left[\sigma_\gamma - \nu\left(\sigma_\alpha + \sigma_\beta\right)\right]$$

$$\frac{E}{R}\left(\lambda^p \frac{1}{A}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi} + \frac{R}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}u_\beta + \frac{u_\gamma}{r_\alpha}\right) = \left(1 + \lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\alpha}\right)\left[\sigma_\alpha - \nu\left(\sigma_\gamma + \sigma_\beta\right)\right] \quad (\alpha\beta)$$

$$\begin{aligned}\frac{E}{R}\Big[\lambda^p\left(1 + \lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\alpha}\right)\frac{1}{B}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\eta} + \lambda^p\left(1 + \lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\beta}\right)\frac{1}{A}\frac{\partial u_\beta}{\partial\xi} - {}\\ - \left(1 + \lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\beta}\right)\frac{R}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}u_\alpha - \left(1 + \lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\alpha}\right)\frac{R}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u_\beta\Big] = {}\\ = 2(1+\nu)\left(1 + \lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\alpha}\right)\left(1 + \lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\beta}\right)\tau_{\alpha\beta}\end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned}\frac{E}{R}\left[\left(1 + \lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\alpha}\right)\frac{\partial u_\alpha}{\partial\zeta} + \lambda^{p-q}\frac{1}{A}\frac{\partial u_\gamma}{\partial\xi} - \lambda^{-q}\frac{u_\alpha}{r_\alpha}\right] = {}\\ = 2(1+\nu)\lambda^{-q}\left(1 + \lambda^{-q}\frac{\zeta}{r_\alpha}\right)\tau_{\alpha\gamma} \quad (\alpha\beta)\end{aligned}$$

Выписанную систему уравнений надо интегрировать с учетом условий на поверхностях $\gamma = \pm h$ или, что то же, на $\zeta = \pm 1$. Будем предполагать, что эти поверхности загружены произвольным образом. Тогда

$$\sigma_\gamma = \pm{}^1/_2 Q_\gamma - {}^1/_2 m, \qquad \tau_{\alpha\gamma} = \pm{}^1/_2 Q_\alpha + {}^1/_2 M_\beta \quad (\alpha\beta) \quad \text{при } \zeta = \pm 1 \quad (1.6)$$

Входящие в эти равенства величины связаны с компонентами поверхностной силовой нагрузки $X$, $Y$, $Z$ и поверхностной моментной нагрузки $E$, $F$, применяемыми в классической теории, формулами (знаки выбраны как в [3])

$$X = Q_\alpha + hM_\beta\left(\frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta}\right) + \frac{h^2}{R_\alpha R_\beta}Q_\alpha \quad (\alpha\beta)$$

$$-Z = Q_\gamma - hm\left(\frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta}\right) + \frac{h^2}{R_\alpha R_\beta}Q_\gamma$$

$$F = -hM_\beta, \qquad E = hM_\alpha \quad (1.7)$$

2. Будем искать решение системы (1.4), (1.5), так же как в п. 6 статьи [6], в виде степенных рядов по параметру $\lambda$

$$\sigma_\alpha = \lambda^{q+\rho}\sum_s \lambda^{-s}\sigma_\alpha^{(s)} \quad (\alpha\beta), \qquad \tau_{\alpha\gamma} = \lambda^{p+\rho}\sum_s \lambda^{-s}\tau_{\alpha\gamma}^{(s)} \quad (\alpha\beta), \qquad u_\alpha = \lambda^{q-p+\rho}\sum_s \lambda^{-s}u_\alpha^{(s)} \quad (\alpha\beta)$$

$$\sigma_\gamma = \lambda^{\rho}\sum_s \lambda^{-s}\sigma_\gamma^{(s)}, \qquad \tau_{\alpha\beta} = \lambda^{q+\rho}\sum_s \lambda^{-s}\tau_{\alpha\beta}^{(s)}, \qquad u_\gamma = \lambda^{q+\rho}\sum_s \lambda^{-s}u_\gamma^{(s)} \quad (2.1)$$

($\rho$ — пока произвольное число)

Подставив (2.1) в (1.4), (1.5) и применив обычную процедуру приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $\lambda$, получим такую последовательность систем уравнений для определения коэффициентов разложений (2.1):

$$\begin{aligned}B\frac{\partial\sigma_\alpha^{(s)}}{\partial\xi} + A\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}^{(s)}}{\partial\eta} + AB\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}^{(s)}}{\partial\zeta} + R\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\sigma_\alpha^{(s-p)} - \sigma_\beta^{(s-p)}\right) + 2R\frac{\partial A}{\partial\beta}\tau_{\alpha\beta}^{(s-p)} + \zeta\frac{B}{r_\beta}\frac{\partial\sigma_\alpha^{(s-q)}}{\partial\xi} + {}\\ + \zeta\frac{A}{r_\alpha}\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}^{(s-q)}}{\partial\eta} + \zeta AB\left(\frac{1}{r_\alpha} + \frac{1}{r_\beta}\right)\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}^{(s-q)}}{\partial\zeta} + AB\left(\frac{2}{r_\alpha} + \frac{1}{r_\beta}\right)\tau_{\alpha\gamma}^{(s-q)} + \zeta\frac{R}{r_\alpha}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\sigma_\alpha^{(s-p-q)} - {}\right.\\ \left. - \sigma_\beta^{(s-p-q)}\right) + 2\zeta\frac{R}{r_\beta}\frac{\partial A}{\partial\beta}\tau_{\alpha\beta}^{(s-p-q)} + AB\left(\frac{\zeta^2}{r_\alpha r_\beta}\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}^{(s-2q)}}{\partial\zeta} + \frac{3\zeta}{r_\alpha r_\beta}\tau_{\alpha\gamma}^{(s-2q)}\right) = 0 \quad (\alpha\beta)\end{aligned}$$

$$-AB\left(\frac{\sigma_\alpha^{(s)}}{r_\alpha}+\frac{\sigma_\beta^{(s)}}{r_\beta}\right)+AB\frac{\partial\sigma_\gamma^{(s)}}{\partial\zeta}+\left\{B\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}^{(s-q+2p)}}{\partial\xi}+A\frac{\partial\tau_{\beta\gamma}^{(s-q+2p)}}{\partial\eta}\right\}+ \tag{2.2}$$

$$+R\frac{\partial B}{\partial\alpha}\tau_{\alpha\gamma}^{(s-q+p)}+R\frac{\partial A}{\partial\beta}\tau_{\beta\gamma}^{(s-q+p)}-\zeta\frac{AB}{r_\alpha r_\beta}(\sigma_\alpha^{(s-q)}+\sigma_\beta^{(s-q)})+\zeta AB\left(\frac{1}{r_\alpha}+\frac{1}{r_\beta}\right)\frac{\partial\sigma_\gamma^{(s-q)}}{\partial\zeta}+$$

$$+AB\left(\frac{1}{r_\alpha}+\frac{1}{r_\beta}\right)\sigma_\gamma^{(s-q)}+\zeta\left(\frac{B}{r_\beta}\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}^{(s-2q+2p)}}{\partial\xi}+\frac{A}{r_\alpha}\frac{\partial\tau_{\beta\gamma}^{(s-2q+2p)}}{\partial\eta}\right)+$$

$$+R\zeta\left(\frac{1}{r_\alpha}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\tau_{\alpha\gamma}^{(s-2q+p)}+\frac{1}{r_\beta}\frac{\partial A}{\partial\beta}\tau_{\beta\gamma}^{(s-2q+p)}\right)+\zeta^2\frac{AB}{r_\alpha r_\beta}\frac{\partial\sigma_\gamma^{(s-2q)}}{\partial\zeta}+2\zeta\frac{AB}{r_\alpha r_\beta}\sigma_\gamma^{(s-2q)}=0$$

$$\frac{E}{R}\frac{\partial u_\gamma^{(s)}}{\partial\zeta}=-\nu(\sigma_\alpha^{(s-q)}+\sigma_\beta^{(s-q)})+\sigma_\gamma^{(s-2q)},\quad \frac{E}{R}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u_\alpha^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{R}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}u_\beta^{(s-p)}+\frac{u_\gamma^{(s)}}{r_\alpha}\right)=$$

$$=\sigma_\alpha^{(s)}-\nu\sigma_\beta^{(s)}-\nu\sigma_\gamma^{(s-q)}+\frac{\zeta}{r_\alpha}(\sigma_\alpha^{(s-q)}-\nu\sigma_\beta^{(s-q)}-\nu\sigma_\gamma^{(s-2q)}) \qquad (\alpha\beta)$$

$$\frac{E}{R}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u_\alpha^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{1}{A}\frac{\partial u_\beta^{(s)}}{\partial\xi}-\frac{R}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}u_\alpha^{(s-p)}-\frac{R}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u_\beta^{(s-p)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\zeta}{r_\alpha}\frac{1}{B}\frac{\partial u_\alpha^{(s-q)}}{\partial\eta}+\frac{\zeta}{r_\beta}\frac{1}{A}\frac{\partial u_\beta^{(s-q)}}{\partial\xi}-\frac{\zeta}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{R}{r_\beta}u_\alpha^{(s-p-q)}-\frac{\zeta}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{R}{r_\alpha}u_\beta^{(s-p-q)}\right)=$$

$$=2(1+\nu)\left[\tau_{\alpha\beta}^{(s)}+\zeta\left(\frac{1}{r_\alpha}+\frac{1}{r_\beta}\right)\tau_{\alpha\beta}^{(s-q)}+\frac{\zeta^2}{r_\alpha r_\beta}\tau_{\alpha\beta}^{(s-2q)}\right]$$

$$\frac{E}{R}\left(\frac{\partial u_\alpha^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{1}{A}\frac{\partial u_\gamma^{(s-q+2p)}}{\partial\xi}+\frac{\zeta}{r_\alpha}\frac{\partial u_\alpha^{(s-q)}}{\partial\xi}-\frac{1}{r_\alpha}u_\alpha^{(s-q)}\right)=$$

$$=2(1+\nu)\left(\tau_{\alpha\gamma}^{(s-2q+2p)}+\frac{\zeta}{r_\alpha}\tau_{\alpha\gamma}^{(s-3q+2p)}\right)$$

Здесь и всюду в дальнейшем величины с отрицательным верхним индексом надо полагать равными нулю.

3. Исследование системы (2.2) начнем со случая, когда показатель изменяемости искомого напряженного состояния равен нулю, т. е. когда можно положить

$$p=0,\qquad q=1,\qquad \lambda=h^{-1}{}_{*} \tag{3.1}$$

Равенства (2.2) образуют систему уравнений относительно величин, отмеченных индексом $(s)$, так как величины с индексом, меньшим $(s)$, надо считать известными. В этой системе легко выполняется интегрирование по переменной $\zeta$. Проделав это и учтя (3.1), получим решение вида

$$P_j^{(s)}=\sum_{k=0}^{n}\zeta^k P_{j,k}^{(s)} \qquad (\alpha\beta) \tag{3.2}$$

Здесь $P_j^{(s)}$ — символ любого коэффициента разложений (2.1), а $n=s$ для $\sigma_\alpha^{(s)}$, $\sigma_\beta^{(s)}$, $\tau_{\alpha\beta}^{(s)}$, $u_\alpha^{(s)}$, $u_\beta^{(s)}$, $u_\gamma^{(s)}$ и $n=s+1$, в остальных случаях.

В (3.2) зависимость искомых величин от $\zeta$ выражена явно: величины, отмеченные дополнительным индексом $k$, суть функции только $\xi$, $\eta$.

Подставив (3.2) в (2.2) и потребовав, чтобы в полученных равенствах обращались в нули коэффициенты при всех степенях $\zeta$, будем иметь систему дифференциальных уравнений (с независимыми переменными $\xi$, $\eta$), которым должны удовлетворять величины, отмеченные дополнительным нижним индексом

$$
\begin{gathered}
B\,\frac{\partial\sigma_{\alpha,k}^{(s)}}{\partial\xi}+A\,\frac{\partial\tau_{\alpha\beta,k}^{(s)}}{\partial\eta}+R\,\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\sigma_{\alpha,k}^{(s)}-\sigma_{\beta,k}^{(s)}\right)+2R\,\frac{\partial A}{\partial\beta}\,\tau_{\alpha\beta,k}^{(s)}+AB\,(k+1)\,\tau_{\alpha\gamma,k+1}^{(s)}=\\
=-\frac{1}{r_\alpha}\left[A\,\frac{\partial\tau_{\alpha\beta,k-1}^{(s-1)}}{\partial\eta}+R\,\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\sigma_{\alpha,k-1}^{(s-1)}-\sigma_{\beta,k-1}^{(s-1)}\right)+kAB\tau_{\alpha\gamma,k}^{(s-1)}\right]-\\
-\frac{1}{r_\beta}\left[B\,\frac{\partial\sigma_{\alpha,k-1}^{(s-1)}}{\partial\xi}+2R\,\frac{\partial A}{\partial\beta}\,\tau_{\alpha\beta,k-1}^{(s-1)}+kAB\tau_{\alpha\gamma,k}^{(s-2)}\right]-\\
-AB\left(\frac{2}{r_\alpha}+\frac{1}{r_\beta}\right)\tau_{\alpha\gamma,k}^{(s-1)}-AB\,\frac{k+2}{r_\alpha r_\beta}\,\tau_{\alpha\gamma,k-1}^{(s-r)}\quad(\alpha\beta)
\end{gathered}
$$

$$(3.3)$$

$$
\begin{gathered}
AB\left[\frac{\sigma_{\alpha,k}^{(s)}}{r_\alpha}+\frac{\sigma_{\beta,k}^{(s)}}{r_\beta}-(k+1)\,\sigma_{\gamma,k+1}^{(s)}\right]=B\,\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma,k}^{(s-1)}}{\partial\xi}+A\,\frac{\partial\tau_{\beta\gamma,k}^{(s-1)}}{\partial\eta}+R\,\frac{\partial B}{\partial\alpha}\,\tau_{\alpha\gamma,k}^{(s-1)}+R\,\frac{\partial A}{\partial\beta}\,\tau_{\beta\gamma,k}^{(s-1)}+\\
+AB\left(\frac{1}{r_\alpha}+\frac{1}{r_\beta}\right)\sigma_{\gamma,k}^{(s-1)}-AB\left[\frac{1}{r_\alpha r_\beta}\left(\sigma_{\alpha,k-1}^{(s-1)}+\sigma_{\beta,k-1}^{(s-1)}\right)-k\left(\frac{1}{r_\alpha}+\frac{1}{r_\beta}\right)\sigma_{\gamma,k}^{(s-1)}\right]+\\
+\left(\frac{B}{r_\beta}\,\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma,k-1}^{(s-2)}}{\partial\xi}+\frac{A}{r_\alpha}\,\frac{\partial\tau_{\beta\gamma,k-1}^{(s-2)}}{\partial\eta}\right)+\frac{R}{r_\alpha}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\,\tau_{\alpha\gamma,k-1}^{(s-2)}+\frac{R}{r_\beta}\frac{\partial A}{\partial\beta}\,\tau_{\beta\gamma,k-1}^{(s-2)}+(k+1)\,\frac{AB}{r_\alpha r_\beta}\,\sigma_{\gamma,k-1}^{(s-2)}
\end{gathered}
$$

$$
\frac{E}{R}\,ku_{\gamma,k}^{(s)}=-\nu\left(\sigma_{\alpha,k-1}^{(s-1)}+\sigma_{\beta,k-1}^{(s-1)}\right)+\sigma_{\gamma,k-1}^{(s-2)}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{E}{R}\,ku_{\alpha,k}^{(s)}=-\frac{E}{R}\left(\frac{1}{A}\,\frac{\partial u_{\gamma,k-1}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{u_{\alpha,k-1}^{(s-1)}}{r_\alpha}-\frac{k}{r_\alpha}\,u_{\alpha,k}^{(s-1)}\right)+\\
+2\,(1+\nu)\left(\tau_{\alpha\gamma,k-1}^{(s-2)}+\frac{1}{r_\alpha}\,\tau_{\alpha\gamma,k-2}^{(s-3)}\right)\quad(\alpha\beta)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{E}{R}\left(\frac{1}{A}\,\frac{\partial u_{\alpha,k}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{R}{AB}\,\frac{\partial A}{\partial\beta}\,u_{\beta,k}^{(s)}+\frac{u_{\gamma,k}^{(s)}}{r_\alpha}\right)=\sigma_{\alpha,k}^{(s)}-\nu\sigma_{\beta,k}^{(s)}+\\
+\frac{1}{r_\alpha}\left(\sigma_{\alpha,k-1}^{(s-1)}-\nu\sigma_{\beta,k-1}^{(s-1)}\right)-\nu\sigma_{\gamma,k}^{(s-1)}-\frac{\nu}{r_\alpha}\,\sigma_{\alpha,k-1}^{(s-2)}\quad(\alpha\beta)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{E}{R}\left(\frac{1}{B}\,\frac{\partial u_{\alpha,k}^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{1}{A}\,\frac{\partial u_{\beta,k}^{(s)}}{\partial\xi}-\frac{R}{AB}\,\frac{\partial A}{\partial\beta}\,u_{\alpha,k}^{(s)}-\frac{R}{AB}\,\frac{\partial B}{\partial\alpha}\,u_{\beta,k}^{(s)}\right)+\\
+\frac{E}{R}\left[\frac{1}{r_\alpha}\left(\frac{1}{B}\,\frac{\partial u_{\alpha,k-1}^{(s-1)}}{\partial\eta}-\frac{R}{AB}\,\frac{\partial B}{\partial\alpha}\,u_{\beta,k-1}^{(s-1)}\right)+\frac{1}{r_\beta}\left(\frac{1}{A}\,\frac{\partial u_{\beta,k-1}^{(s-1)}}{\partial\xi}-\frac{R}{AB}\,\frac{\partial A}{\partial\beta}\,u_{\alpha,k-1}^{(s-1)}\right)\right]=\\
=2\,(1+\nu)\left[\tau_{\alpha\beta,k}^{(s)}+\left(\frac{1}{r_\alpha}+\frac{1}{r_\beta}\right)\tau_{\alpha\beta,k-1}^{(s-1)}+\frac{1}{r_\alpha r_\beta}\,\tau_{\alpha\beta,k-2}^{(s-2)}\right]
\end{gathered}
$$

В этих равенствах

$$
\begin{gathered}
\sigma_{\alpha,l}^{(t)}=\sigma_{\beta,l}^{(t)}=\tau_{\alpha\beta,l}^{(t)}=u_{\alpha,l}^{(t)}=u_{\beta,l}^{(t)}=u_{\gamma,l}^{(t)}\equiv0,\ \text{если}\ t<0\ \text{или}\ l<0\ \text{или}\ t>l\\
\tau_{\alpha\gamma,l}^{(t)}=\tau_{\beta\gamma,l}^{(t)}=\sigma_{\gamma,l}^{(t)}\equiv0,\ \text{если}\ t<0\ \text{или}\ l<0\ \text{или}\ t>l+1
\end{gathered}\qquad(3.4)
$$

К уравнениям (3.3) надо присоединить равенства, вытекающие из условий на наружной и внутренней поверхностях (1.6), Примем, что в них $Q_\alpha$, $Q_\beta$, $Q_\gamma$, $M_\alpha$, $M_\beta$, $m$ не зависят от $h_*$, Тогда в разложениях (2.1) можно положить $\rho=0$ и выполнить (2.1), потребовав, чтобы

$$
\begin{gathered}
\sigma_\gamma^{(0)}=\pm\,{}^1\!/_2Q_\gamma-{}^1\!/_2m,\qquad \tau_{\alpha\gamma}^{(0)}=\pm\,{}^1\!/_2Q_\alpha+{}^1\!/_2M_\beta\quad(\alpha,\ \beta)\\
\sigma_\gamma^{(j)}=\tau_{\alpha\gamma}^{(j)}=\tau_{\beta\gamma}^{(j)}=0\qquad j>0\qquad\text{при}\ \zeta=\pm1,
\end{gathered}
$$

Подставив в эти равенства выражение (3.2), получим

$$\tau_{\alpha\gamma,0}^{(0)}=\tfrac{1}{2}M_\beta \quad (\alpha\beta),\qquad \sigma_{\gamma,0}^{(0)}=\tfrac{1}{2}m;\quad \tau_{\alpha\gamma,1}^{(0)}=\tfrac{1}{2}Q_\alpha \quad (\alpha\beta),\qquad \sigma_{\gamma,1}^{(0)}=\tfrac{1}{2}Q_\gamma$$

$$\tau_{\alpha\gamma,1}^{(1)}=0 \quad (\alpha\beta),\qquad \sigma_{\gamma,1}^{(1)}=0 \tag{3.5}$$

$$\tau_{\alpha\gamma,0}^{(1)}+\tau_{\alpha\gamma,2}^{(1)}=0 \quad (\alpha\beta),\qquad \sigma_{\gamma,0}^{(1)}+\sigma_{\gamma,2}^{(1)}=0$$

$$\sum_{i=0}^{r}\tau_{\alpha\gamma,2i}^{(j)}=0 \quad (\alpha\beta),\qquad \sum_{i=0}^{r}\tau_{\alpha\gamma,2i+1}^{(j)}=0 \quad (\alpha\beta),\qquad \sum_{i=0}^{r}\sigma_{\gamma,2i}^{(j)}=0,\qquad \sum_{i=0}^{r}\sigma_{\gamma,2i+1}^{(j)}=0 \quad (j>1)$$

где $r$ — целая часть числа $\tfrac{1}{2}j+\tfrac{1}{2}$.

Как будет видно из дальнейшего, системы (3.3) и (3.5) содержат достаточно уравнений, чтобы можно было последовательно определять входящие в них коэффициенты разложений (2.1) и (3.2).

4. Положим в уравнениях (3.3) $k=0$. Тогда, учтя (3.4), будем иметь

$$B\frac{\partial\sigma_{\alpha,0}^{(s)}}{\partial\xi}+A\frac{\partial\tau_{\alpha\beta,0}^{(s)}}{\partial\eta}+R\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\sigma_{\alpha,0}^{(s)}-\sigma_{\beta,0}^{(s)}\right)+2R\frac{\partial A}{\partial\beta}\tau_{\alpha\beta,0}^{(s)}+ABR_\alpha^{(s)}=0 \quad (\alpha\beta)$$

$$\frac{\sigma_{\alpha0}^{(s)}}{r_\alpha}+\frac{\sigma_{\beta,0}^{(s)}}{r_\beta}-R_\gamma^{(s)}=0$$

$$\frac{E}{R}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u_{\alpha,0}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{R}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}u_{\beta,0}^{(s)}+\frac{u_{\gamma,0}^{(s)}}{r_\alpha}\right)-\sigma_{\alpha,0}^{(s)}+\nu\sigma_{\beta,0}^{(s)}=P^{(s)} \quad (\alpha\beta) \tag{4.1}$$

$$\frac{E}{R}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u_{\alpha,0}^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{1}{A}\frac{\partial u_{\beta,0}^{(s)}}{\partial\xi}-\frac{R}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}u_{\alpha,0}^{(s)}-\frac{R}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u_{\beta,0}^{(s)}\right)-2(1+\nu)\tau_{\alpha\beta}^{(s)}=0$$

где

$$R_\alpha^{(s)}=\tau_{\alpha\gamma,1}^{(s)}+\left(\frac{2}{r_\alpha}+\frac{1}{r_\beta}\right)\tau_{\alpha\gamma,0}^{(s-1)} \quad (\alpha\beta)$$

$$R_\gamma^{(s)}=\sigma_{\gamma,1}^{(s)}+\frac{1}{A}\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma,0}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{1}{B}\frac{\partial\tau_{\beta\gamma,0}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{R}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\tau_{\alpha\gamma,0}^{(s-1)}+$$

$$+\frac{R}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\tau_{\beta\gamma,0}^{(s-1)}+\left(\frac{1}{r_\alpha}+\frac{1}{r_\beta}\right)\sigma_{\gamma,0}^{(s-1)}$$

$$P^{(s)}=-\nu\sigma_{\gamma,0}^{(s-1)} \tag{4.2}$$

(третье и четвертое равенства (3.3) при $k=0$, в силу (3.4), обращаются в тождества).

Если считать известными величины $R_\alpha^{(s)}$, $R_\beta^{(s)}$, $R_\gamma^{(s)}$ и $P^{(s)}$, то равенства (4.1) образуют систему шести дифференциальных (по $\xi$, $\eta$) уравнений относительно шести неизвестных $\sigma_{\alpha,0}^{(s)}$, $\sigma_{\beta,0}^{(s)}$, $\tau_{\alpha\beta,0}^{(s)}$, $u_{\alpha,0}^{(s)}$, $u_{\beta,0}^{(s)}$, $u_{\gamma,0}^{(s)}$, определяющих безмоментную часть искомого напряженного состояния, т. е. ту часть, в которой напряжения $\sigma_\alpha$, $\tau_{\alpha\beta}$, $\sigma_\beta$ остаются постоянными по толщине.

При $s=0$ и $s=1$ величины $R_\alpha^{(s)}$, $R_\beta^{(s)}$, $R_\gamma^{(s)}$ и $P^{(s)}$, в силу (3.4), (3.5) и (4.2), выражаются через компоненты внешней нагрузки. А именно,

$$R_\alpha^{(0)}=\tfrac{1}{2}Q_\alpha \quad (\alpha\beta),\qquad R_\gamma^{(0)}=\tfrac{1}{2}Q_\gamma,\qquad P^{(0)}=0 \tag{4.3}$$

$$R_\alpha^{(1)}=\left(\frac{2}{r_\alpha}+\frac{1}{r_\beta}\right)\frac{M_\beta}{2} \quad (\alpha\beta),\qquad P^{(1)}=\frac{\nu}{2}m$$

$$R_\gamma^{(1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial M_\beta}{\partial\xi}+\frac{1}{B}\frac{\partial M_\alpha}{\partial\eta}+\frac{B}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}M_\beta+\frac{R}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}M_\alpha-\left(\frac{1}{r_\alpha}+\frac{1}{r_\beta}\right)m\right]$$

При $s > 1$ величины $R_\alpha^{(s)}$, $R_\beta^{(s)}$, $R_\gamma^{(s)}$ и $P^{(s)}$ будут также известны (если построены все предыдущие приближения), но в выражения этих величин войдут, помимо компонентов внешней нагрузки, и те коэффициенты разложений (2.1), индекс которых меньше $s$.

Величины $\sigma_{\alpha,1}^{(s)}$, $\tau_{\alpha\beta,1}^{(s)}$, $\sigma_{\beta,1}^{(s)}$, $u_{\alpha,1}^{(s)}$, $u_{\beta,1}^{(s)}$, $u_{\gamma,1}^{(s)}$ в разложениях (2.1), (3.2) определяют чисто моментную часть напряженного состояния, т. е. ту часть, в которой напряжения $\sigma_\alpha$, $\tau_{\alpha\beta}$, $\sigma_\beta$ меняются по толщине по обратно симметричному линейному закону. Для построения этих величин надо в четырех последних равенствах (3.3) положить $k = 1$. Получим

$$\frac{E}{R} u_{\gamma,1}^{(s)} = -\nu\left(\sigma_{\alpha,0}^{(s-1)} + \sigma_{\beta,0}^{(s-1)}\right) + \sigma_{\gamma,0}^{(s-2)}$$

$$\frac{E}{R} u_{\alpha,1}^{(s)} = -\frac{E}{R}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u_{\gamma,0}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{u_{\alpha,0}^{(s-1)}}{r_\alpha} - \frac{u_{\alpha,1}^{(s-1)}}{r_\alpha}\right) + 2(1+\nu)\tau_{\alpha\gamma,0}^{(s-2)}$$

$$\frac{E}{R}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u_{\alpha,1}^{(s)}}{\partial\xi} + \frac{R}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} u_{\beta,1}^{(s)} + \frac{u_{\gamma,1}^{(s)}}{r_\alpha}\right) =$$

$$= \sigma_{\alpha,1}^{(s)} - \nu\sigma_{\beta,1}^{(s)} + \frac{1}{r_\alpha}\left(\sigma_{\alpha,0}^{(s-1)} - \nu\sigma_{\beta,0}^{(s-1)}\right) - \nu\sigma_{\gamma,1}^{(s-1)} - \frac{\nu}{r_\alpha}\sigma_{\alpha,0}^{(s-2)} \quad (\alpha\beta)$$

$$\frac{E}{R}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u_{\alpha,1}^{(s)}}{\partial\eta} + \frac{1}{A}\frac{\partial u_{\beta,1}^{(s)}}{\partial\xi} - \frac{R}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} u_{\alpha,1}^{(s)} - \frac{R}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha} u_{\beta,1}^{(s)}\right) + \tag{4.4}$$

$$+ \frac{E}{R}\left[\frac{1}{r_\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u_{\alpha,0}^{(s-1)}}{\partial\eta} - \frac{R}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha} u_{\beta,0}^{(s-1)}\right) + \frac{1}{r_\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u_{\beta,0}^{(s-1)}}{\partial\xi} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{R}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} u_{\alpha,0}^{(s-1)}\right)\right] = 2(1+\nu)\left[\tau_{\alpha\beta,1}^{(s)} + \left(\frac{1}{r_\alpha} + \frac{1}{r_\beta}\right)\tau_{\alpha\beta,0}^{(s-1)}\right]$$

Отсюда, считая известными все приближения до $(s-1)$-го включительно, можно найти $u_{\gamma,1}^{(s)}$, $u_{\alpha,1}^{(s)}$, $u_{\beta,1}^{(s)}$, $\sigma_{\alpha,1}^{(s)}$, $\sigma_{\beta,1}^{(s)}$, $\tau_{\alpha\beta,1}^{(s)}$ при помощи дифференцирований и алгебраических операций. Первые два равенства (3.3) при $k = 1$ позволяют (также только прямыми действиями) найти $\tau_{\alpha\gamma,2}^{(s)}$, $\tau_{\beta\gamma,2}^{(s)}$, $\sigma_{\gamma,2}^{(s)}$, которые нужны для построения $R_\alpha^{(s)}$, $R_\beta^{(s)}$, $R_\gamma^{(s)}$, $P^{(s)}$.

5. Ограничимся вычислением первых двух слагаемых в разложениях (2.1). Тогда, согласно (3.2), для напряжений и перемещений имеем формулами

$$\sigma_\alpha = h^{-1} R\left(\sigma_{\alpha,0}^{(0)} + \frac{h}{R}\sigma_{\alpha,0}^{(1)} + \frac{h}{R}\zeta\sigma_{\alpha,1}^{(1)}\right) \quad (\alpha\beta)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = h^{-1} R\left(\tau_{\alpha\beta,0}^{(0)} + \frac{h}{R}\tau_{\alpha\beta,0}^{(1)} + \frac{h}{R}\zeta\tau_{\alpha\beta,1}^{(1)}\right)$$

$$\tau_{\alpha\gamma} = \tau_{\alpha\gamma,0}^{(0)} + \frac{h}{R}\tau_{\alpha\gamma,0}^{(1)} + \zeta\left(\tau_{\alpha\gamma,1}^{(0)} + \frac{h}{R}\tau_{\alpha\gamma,1}^{(1)}\right) + \frac{h}{R}\zeta^2\tau_{\alpha\gamma,2}^{(1)} \tag{5.1}$$

$$\sigma_\gamma = \sigma_{\gamma,0}^{(0)} + \frac{h}{R}\sigma_{\gamma,0}^{(1)} + \zeta\left(\sigma_{\gamma,1}^{(0)} + \frac{h}{R}\sigma_{\gamma,1}^{(1)}\right) + \frac{h}{R}\zeta^2\sigma_{\gamma,2}^{(1)}$$

$$u_\alpha = h^{-1} R\left(u_{\alpha,0}^{(0)} + \frac{h}{R}u_{\alpha,0}^{(1)} + \frac{h}{R}\zeta u_{\alpha,1}^{(1)}\right) \ (\alpha\beta), \quad u_\gamma = h^{-1} R\left(u_{\gamma,0}^{(0)} + \frac{h}{R}u_{\gamma,0}^{(1)} + \frac{h}{R}\zeta u_{\gamma,1}^{(1)}\right)$$

Для определения величин, входящих в правые части этих равенств, имеются уравнения и формулы, построенные в п. 4. Таким образом, построен некоторый приближенный метод расчета оболочек. Выразим полученный результат в терминах классической теории оболочек.

Усилия, моменты и компоненты смещения срединной поверхности, отвечающие напряжениям и смещениям (5.1), можно записать так:

$$T_1 = T_1^{(0)} + \frac{h}{R} T_1^{(1)} = \int_{-h}^{+h} \sigma_\alpha \left(1 + \frac{\gamma}{R_\beta}\right) d\gamma \qquad (\alpha\beta)$$

$$S_1 = S_1^{(0)} + \frac{h}{R} S_1^{(1)} = \int_{-h}^{+h} \tau_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{\gamma}{R_\beta}\right) d\gamma$$

$$S_2 = S_2^{(0)} + \frac{h}{R} S_2^{(1)} = -\int_{-h}^{+h} \tau_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{\gamma}{R_\alpha}\right) d\gamma$$

$$G_1 = -\int_{-h}^{+h} \sigma_\alpha \gamma \left(1 + \frac{\gamma}{R_\beta}\right) d\gamma \qquad (\alpha\beta) \qquad (5.2)$$

$$H_1 = \int_{-h}^{+h} \tau_{\alpha\beta}\gamma \left(1 + \frac{\gamma}{R_\beta}\right) d\gamma, \qquad H_2 = -\int_{-h}^{+h} \tau_{\alpha\beta}\gamma \left(1 + \frac{\gamma}{R_\alpha}\right) d\gamma$$

$$u = u^{(0)} + \frac{h}{R} u^{(1)} = Rh^{-1} \left(u_{\alpha,0}^{(0)} + \frac{h}{R} u_{\alpha,0}^{(1)}\right) \qquad (\alpha\beta)$$

$$w = w^{(0)} + \frac{h}{R} w^{(1)} = -Rh^{-1} \left(u_{\gamma,0}^{(0)} + \frac{h}{R} u_{\gamma,0}^{(1)}\right)$$

Здесь приняты обозначения Лява [7]. Подставив (5.1) в (5.2), имеем

$$T_1^{(i)} = 2R\sigma_{\alpha,0}^{(i)} \quad (\alpha\beta), \qquad S_1 = 2R\tau_{\alpha\beta,0}^{(i)}, \qquad S_2 = -2R\tau_{\alpha\beta,0}^{(i)}$$

$$u^{(i)} = Rh^{-1} u_{\alpha,0}^{(i)} \quad (\alpha\beta), \qquad w^{(i)} = -Rh^{-1} u_{\gamma,0}^{(i)} \qquad (i = 0,\ 1) \qquad (5.3)$$

$$G_1 = -\frac{2h^2}{3}\left(\sigma_{\alpha,1}^{(1)} + \frac{\sigma_{\alpha,0}^{(0)}}{r_\beta}\right) \qquad (\alpha\beta)$$

$$H_1 = \frac{2h^2}{3}\left(\tau_{\alpha\beta,1}^{(1)} + \frac{\tau_{\alpha\beta,0}^{(0)}}{r_\beta}\right), \qquad H_2 = -\frac{2h^2}{3}\left(\tau_{\alpha\beta,1}^{(1)} + \frac{\tau_{\alpha\beta,0}^{(0)}}{r_\alpha}\right) \qquad (5.4)$$

Уравнения, которым удовлетворяют нулевое и первое приближения тангенциальных усилий и перемещений (эти величины отмечены соответственно индексами 0,1), можно получить, внеся (5.3) в (4.1). Проделав это, вернувшись по формулам (1.1) от безразмерных величин к размерным, будем иметь (во всех этих формулах $i = 0{,}1$).

$$B\frac{\partial T_1^{(i)}}{\partial \alpha} - A\frac{\partial S_2^{(i)}}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha}(T_1^{(i)} - T_2^{(i)}) + \frac{\partial A}{\partial \beta}(S_1^{(i)} - S_2^{(i)}) + 2ABR_\alpha^{(i)} = 0$$

$$B\frac{\partial S_1^{(i)}}{\partial \alpha} + A\frac{\partial T_2^{(i)}}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha}(S_1^{(i)} - S_2^{(i)}) + \frac{\partial A}{\partial \beta}(T_2^{(i)} - T_1^{(i)}) + 2ABR_\beta^{(i)} = 0$$

$$\frac{T_1^{(i)}}{R_\alpha} + \frac{T_2^{(i)}}{R_\beta} - 2R_\gamma^{(i)} = 0 \qquad (5.5)$$

$$T_1^{(i)} - \nu T_2^{(i)} = 2Eh\varepsilon_1^{(i)} + 2P^{(i)}, \qquad T_2^{(i)} - \nu T_1^{(i)} = 2Eh\varepsilon_2^{(i)} + 2P^{(i)}$$

$$2(1+\nu)S_1^{(i)} = -2(1+\nu)S_2^{(i)} = 2Eh\omega^{(i)} \qquad (5.6)$$

$$\varepsilon_1^{(i)} = \frac{1}{A}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta} v^{(i)} - \frac{w^{(i)}}{R_\alpha}, \qquad \varepsilon_2^{(i)} = \frac{1}{B}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial \beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha} u^{(i)} - \frac{w^{(i)}}{R_\beta}$$

$$\omega^{(i)} = \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{u^{(i)}}{A} + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{v^{(i)}}{B} \qquad (5.7)$$

Для $R_\alpha^{(0)}$, $R_\beta^{(0)}$, $R_\gamma^{(0)}$, $P^{(0)}$ имеем формулы (4.3). Из них вытекает, что при $i=0$ равенства (5.5) совпадают с уравнениями равновесия классической безмоментной теории, если в последних за компоненты внешней поверхностной нагрузки принять соответственно величины

$$Q_\alpha, \quad Q_\beta, \quad -Q_\gamma \tag{5.8}$$

Равенства (5.6), (5.7) при $i=0$, когда $P^{(i)}=0$, совпадают с соотношениями упругости для тангенциальных усилий.

При $i=1$ смысл равенств (5.5) — (5.7) остается прежним, но роль компонентов внешней поверхностной нагрузки, как вытекает из (4.3), будут теперь играть соответственно выражения

$$\left(\frac{2}{r_\alpha}+\frac{1}{r_\beta}\right)M_\beta, \qquad \left(\frac{1}{r_\alpha}+\frac{2}{r_\beta}\right)M_\alpha \tag{5.9}$$
$$\left[\frac{1}{A}\frac{\partial M_\beta}{\partial \xi}+\frac{1}{B}\frac{\partial M_\alpha}{\partial \eta}+\frac{R}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}M_\beta+\frac{R}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}M_\alpha+\left(\frac{1}{r_\alpha}+\frac{1}{r_\beta}\right)m\right]$$

Кроме того, при $i=1$ в первых двух соотношениях упругости (5.6) величина $P^{(i)}$ не обращается в нуль.

Соотношения (4.4), служащие для построения величин, отмеченных в (5.1) дополнительным значком 1, также имеют простую интерпретацию. Положив в (4.4) $s=1$ и приняв во внимание (5.3), получим из первых двух равенств

$$u_{\gamma,1}^{(1)}=-\frac{\nu}{2E}\left(T_1^{(0)}+T_2^{(0)}\right), \qquad u_{\alpha,1}^{(1)}=-R\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \alpha}+\frac{u^{(0)}}{R_\alpha}\right) \quad (\alpha\beta)$$

Оставшиеся два равенства (4.4) можно при помощи (5.4), (5.3), (1.1) преобразовать к виду

$$\begin{gathered} G_1=-\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left\{\varkappa_1+\nu\varkappa_2-\left(\frac{1}{R_\alpha}-\frac{1}{R_\beta}\right)\varepsilon_1^{(0)}-\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{1}{R_\alpha}+\right.\right.\\ \left.\left.+\frac{\nu}{R_\beta}\right)\left(\varepsilon_1^{(0)}+\varepsilon_2^{(0)}\right)\right\} \quad (\alpha\beta) \\ H_1=\frac{2Eh^3}{3(1+\nu)}\left(\tau-\frac{\omega^{(0)}}{2R_\alpha}\right), \qquad H_2=-\frac{2Eh^3}{3(1+\nu)}\left(\tau-\frac{\omega^{(0)}}{2R_\beta}\right)\end{gathered} \tag{5.10}$$

Здесь $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\tau$ — компоненты изгибной деформации, которые, так же как в [3], выражаются формулами:

$$\begin{gathered} \varkappa_1=-\frac{1}{A}\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha}-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\gamma_2 \quad (\alpha\beta)\\ \tau=-\frac{1}{A}\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\gamma_1+\frac{\omega_2}{R_\alpha}\\ \gamma_1=-\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \alpha}+\frac{u^{(0)}}{R_\alpha}\right) \quad (\alpha\beta)\\ \omega_1=\frac{1}{A}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial \alpha}-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}u^{(0)} \quad (\alpha\beta)\end{gathered} \tag{5.11}$$

**6.** Уравнения классической теории оболочек наряду с членами порядка $h_*^0$ содержат члены порядка $h_*^2$, т. е. они формально (только формально) составлены с точностью до членов порядка $h_*^2$. Чтобы привести в соответствие точность классической теории и предлагаемого метода и продвинутся вперед в сопоставлении их результатов, прибегнем к итерационному методу интегрирования уравнений теории оболочек, в котором можно остановиться, достигнув нужной точности.

Отбросим во всех уравнениях равновесия классической теории оболочек члены, содержащие моменты или их производные. Тогда четвертое и пятое уравнения равновесия с учетом двух последних формул (1.7) дадут [1]

$$N_1 = -hM_\beta, \qquad N_2 = -hM_\alpha \tag{6.1}$$

Исключив при помощи этих формул перерезывающие усилия в первых трех уравнениях равновесия, получим уравнения равновесия классической безмоментной теории, в которой истинные компоненты внешней поверхностной нагрузки $X$, $Y$, $Z$ заменены приведенными компонентами

$$X' = X + h\frac{M_\beta}{R_\alpha} \quad (\alpha\beta), \qquad Z' = Z - \frac{h}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(BM_\beta) + \frac{\partial}{\partial\alpha}(AM_\beta)\right] \tag{6.2}$$

Остальные соотношения классической теории совпадают с соотношениями (5.6), (5.7), (5.10), (5.11), если в последних отбросить верхние значки и положить $P^{(i)} = 0$.

Уравнения теории оболочек, упрощенные за счет отбрасывания моментов, можно интегрировать по этапам следующим образом: из первого, второго, третьего и шестого уравнений равновесия определяются тангенциальные усилия ($T_1$, $T_2$, $S_1$, $S_2$); из формул (5.6) определятся компоненты тангенциальной деформации $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\omega$; из уравнений (5.7) определятся компоненты смещения $u$, $v$, $w$; из формул (5.11) определятся компоненты изгибной деформации $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\tau$; из формул (5.10) определятся моменты $G_1$, $G_2$, $H_1$, $H_2$ и из формул (6.1) определятся перерезывающие усилия $N_1$, $N_2$. Изложенный метод представляет некоторое видоизменение (за счет учета поверхностной моментной нагрузки) метода, описанного в главе 5 монографии [3]. Его можно рассматривать как прием построения исходного приближения некоторого итерационного процесса. Второе приближение можно было бы построить, заимствуя в уравнениях равновесия величины $G_1$, $G_2$, $H_1$, $H_2$ из исходного приближения и т. д. Однако, если производить вычисления с той точностью, которая нужна, т. е. с точностью до величин порядка $h_*$ по сравнению с единицей, то достаточно строить только исходное приближение.

*Замечание.* Описанный инерационный метод не универсален. Им нельзя искать, например, краевые эффекты и напряженные состояния, возникающие в некоторых оболочках сколь угодно большой приведенной длины. На исключение из рассмотрения таких случаев и направлены оговорки, сделанные во введении.

Напряженное состояние, построенное описанным здесь способом, будет составляться из безмоментного напряженного состояния, создаваемого тангенциальными силами, и чисто моментного напряженного состояния,

---

[1] Хорошо известные уравнения теории оболочек здесь не выписываются. Нижеследующие результаты можно проверить, воспользовавшись уравнениями равновесия (12.6) части I монографии [3]. Надо только исправить при $F$ в пятом уравнении ошибочный знак минус на плюс.

создаваемого моментами. Первое из них совпадает по смыслу с той частью напряженного состояния п. 5, которая создается напряжениями

$$R\, h^{-1}\sigma_{\alpha,\,0}^{(0)} + \sigma_{\alpha,\,0}^{(1)}, \quad R\, h^{-1}\tau_{\alpha\beta,\,0}^{(0)} + \tau_{\alpha\beta,\,0}^{(1)}, \quad R\, h^{-1}\sigma_{\beta,\,0}^{(0)} + \sigma_{\beta,\,0}^{(1)} \tag{6.3}$$

Компоненты поверхностной нагрузки, вызывающей напряженное состояние (6.3), можно получить, сложив компоненты (5.8) с компонентами (5.9), помноженными на $h_*$. При помощи (1.7) легко убедиться, что при этом получатся компоненты, совпадающие с принятой точностью с (6.2). Это значит, что безмоментные части обсуждаемых напряженных состояний отличаются от напряженного состояния (6.3) только тем, что при построении (6.3) соотношения упругости (5.6) будут неоднородными (в членах порядка $h_*$ по сравнению с единицей). Полное совпадение получится в том случае, если в классической теории соотношения упругости для $T_1$, $T_2$ брать в виде

$$T_1 - \nu T_2 = 2Eh\varepsilon_1 + \nu hm, \qquad T_2 - \nu T_1 = 2Eh\varepsilon_2 + \nu hm \tag{6.4}$$

Эта поправка соответствует учету обжатия оболочки в направлении нормали.

*Замечание.* От неоднородности в соотношениях (6.4) легко избавиться, положив

$$T_1 = T_1^* + \frac{\nu h}{1-\nu}\, m, \qquad T_2 = \overset{*}{T_2} + \frac{\nu h}{1-\nu}\, m$$

Тогда вместо (6.2) получим следующие формулы для компонентов приведенной нагрузки:

$$X'' = X' + \frac{h\nu}{A(1-\nu)}\frac{\partial m}{\partial \alpha} = X + h\,\frac{M_\beta}{R_\alpha} + \frac{h\nu}{A(1-\nu)}\frac{\partial m}{\partial \alpha} \qquad (\alpha\beta)$$

$$Z'' = Z - \frac{h}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(BM_\beta) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AM_\alpha)\right] + \frac{\nu h}{1-\nu}\left(\frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta}\right) m$$

Чисто моментная часть полученного здесь напряженного состояния соответствует в п. 5 напряженному состоянию ($\zeta\sigma_{\alpha,\,1}^{(0)}$, $\zeta\tau_{\alpha\beta,1}^{(0)}$, $\zeta\sigma_{\beta,\,1}^{(0)}$). Совпадение в рамках принятой точности будет полным, если соотношения упругости для моментов брать в виде (5.10).

Из проведенного сравнения вытекает, что для решения задачи, сформулированной во введении, можно предложить уточненную классическую теорию, погрешность которой при $t = 0$ будет порядка $h_*^2$ по сравнению с единицей. Для этого надо: во-первых, подсчитывать компоненты $X$, $Y$, $Z$ внешней поверхностной нагрузки по формулам (1.7), сохраняя в правых частях только первые два слагаемых, т. е. учитывать изменения масштаба площадей при переходе от внешней или внутренней поверхности к срединной поверхности; во-вторых, вместо истинных компонентов поверхностной нагрузки пользоваться приведенными компонентами $X'$, $Y'$, $Z'$, т. е. учитывать моменты, возникающие при переносе внешних тангенциальных сил на срединную поверхность; в-третьих, пользоваться неоднородными соотношениями (6.4), или вместо $X'$, $Y'$, $Z'$ брать приведенные компоненты $X''$, $Y''$, $Z''$, т. е. учитывать обжатие, возникающее при переносе внешних нормальных сил на срединную поверхность; в-четвертых, брать соотношения упругости для моментов в виде (5.10).

7. Перейдем к исследованию влияния изменяемости искомого напряженного состояния на погрешности классической теории.

Примем в (2.2), что $0 < t < {}^1/_2$ (случаи, когда $t \geqslant {}^1/_2$, здесь, как и в других асимптотических рассмотрениях, должны изучаться особо); для конкретности будем считать, что ${}^1/_4 < t < {}^1/_3$; откуда вытекают неравенства

$$0 < p < q - 2p < 2p < q - p < q < q + p < 2q - 2p \qquad (7.1)$$

которые надо учитывать при проверке дальнейших утверждений.

Пусть, наконец, величины в правых частях (1.6) не зависят от $h_*$, а $Q_\gamma$ отлично от тождественного нуля. Тогда в разложениях (2.1) надо положить $\rho = 0$ и для выполнения граничных условий (1.6) требовать, чтобы

$$\sigma_\gamma^{(s)} = \pm {}^1/_2 Q_\gamma^{(s)} - {}^1/_2 m^{(s)}, \qquad \tau_{\alpha\gamma}^{(s)} = \pm {}^1/_2\, Q_\alpha^{(s)} + {}^1/_2 M_\beta^{(s)} \quad (\alpha\beta) \qquad \text{при } \zeta = \pm 1 \qquad (7.2)$$

где

$$Q_\gamma^{(0)} = Q_\gamma, \quad m^{(0)} = m, \quad Q_\alpha^{(p)} = Q_\alpha \quad (\alpha\beta), \quad M_\alpha^{(p)} = M_\alpha \quad (\alpha\beta) \qquad (7.3)$$
$$Q_\gamma^{(s)} = m^{(s)} = 0 \quad \text{при } s \neq 0, \quad Q_\alpha^{(s)} = M_\beta^{(s)} = Q_\beta^{(s)} = M_\alpha^{(s)} = 0 \quad \text{при } s \neq p$$

Напряженное состояние, отвечающее всем перечисленным условиям, назовем напряженным состоянием ($t > 0$, $Q_\gamma \not\equiv 0$).

Если в (2.2) индекс $s$ удовлетворяет неравенству $s < q - 2p$, то, в силу (7.1), в этих уравнениях после отбрасывания членов с отрицательными индексами останутся только члены с индексами ($s$) и ($s - p$), т. е. те и только те члены, которые остаются в (2.2) при $s = 0$, $p = 0$, $q = 1$. Это значит, что при $s < q - 2p$ форма решения уравнений (2.2) будет такой же, как при $s = 0$, $p = 0$, $q = 1$, т. е. она будет определяться равенствами (3.2), в которых надо положить $s = 0$.

Отсюда, в частности, следует, что

$$\tau_{\alpha\gamma}^{(s)} = \tau_{\alpha\gamma,0}^{(s)} + \zeta\tau_{\alpha\gamma,1}^{(s)} \quad (\alpha\beta) \qquad \text{при } s < q - 2p$$

а поэтому, в силу граничных соотношений (7.2), (7.3),

$$\tau_{\alpha\gamma}^{(s)} = \tau_{\beta\gamma}^{(s)} \equiv 0 \qquad \text{при } s \neq p,\ s < q - 2p$$

Если индекс $s$ удовлетворяет неравенствам $q - 2p \leqslant s < 2q - 2p$, то в (2.2) останутся только члены с индексами ($s$), ($s - p$), ($s - q + 2p$), ($s - q + p$), ($s - q$), ($s - p - q$). Это те и только те члены, которые остаются в (2.2) при $s = 1$, $p = 0$, $q = 1$. Таким образом, в этом случае форма решения определится формулами (3.2), в которых надо положить $s = 1$.

При $s \geqslant 2q - 2p$ в (2.2) начнут появляться члены, которые при $p = 0$, $q = 1$ входят в уравнения (2.2) только при $s \geqslant 2$. Соответственно этому в (3.2) при таких $s$ надо считать, что $s > 1$.

Из сказанного вытекает, что если для напряженного состояния ($t > 0$, $Q_\gamma \not\equiv 0$) строить только первые $2q - 2p$ приближений, т. е. считать, что $s = 2q - 2p$, то форму решения можно записать так:

$$\sigma_\alpha = \lambda^q \left[\sum_{s=0}^{q-2p-1} \lambda^{-s}\sigma_{\alpha,0}^{(s)} + \sum_{s=q-2p}^{2q-2p-1} \lambda^{-s}\sigma_{\alpha,0}^{(s)} + \zeta \sum_{s=q-2p}^{2q-2p-1} \lambda^{-s}\sigma_{\alpha,1}^{(s)}\right] \quad (\alpha\beta)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \lambda^q \left[\sum_{s=0}^{q-2p-1} \lambda^{-s}\tau_{\alpha\beta,0}^{(s)} + \sum_{s=q-2p}^{2q-2p-1} \lambda^{-s}\tau_{\alpha\beta,0}^{(s)} + \zeta \sum_{s=q-2p}^{2q-2p-1} \lambda^{-s}\tau_{\alpha\beta,1}^{(s)}\right]$$

$$\tau_{\alpha\gamma} = \lambda^p \left[\sum_{s=0}^{q-2p-1} \lambda^{-s}\tau_{\alpha\gamma,0}^{(s)} + \zeta \sum_{s=0}^{q-2p-1} \lambda^{-s}\tau_{\alpha\gamma,1}^{(s)} + \sum_{s=q-2p}^{2q-2p-1} \lambda^{-s}\tau_{\alpha\gamma,0}^{(s)} + \right. \qquad (7.4)$$
$$\left. + \zeta \sum_{s=q-2p}^{2q-2p-1} \lambda^{-s}\tau_{\alpha\gamma,1}^{(s)} + \zeta^2 \sum_{s=q-2p}^{2q-2p-1} \lambda^{-s}\tau_{\alpha\gamma,2}^{(s)}\right] \quad (\alpha\beta)$$

$$\sigma_\gamma = \sum_{s=0}^{q-2p-1} \lambda^{-s}\sigma_{\gamma,0}^{(s)} + \zeta \sum_{s=0}^{q-2p-1} \lambda^{-s}\sigma_{\gamma,1}^{(s)} + \sum_{s=q-2p}^{2q-2p-1} \lambda^{-s}\sigma_{\gamma,0}^{(s)} + \zeta \sum_{s=q-2p}^{2q-2p-1} \lambda^{-s}\sigma_{\gamma,1}^{(s)} + \zeta^2 \sum_{s=q-2p}^{2q-2p-1} \lambda^{-s}\sigma_{\gamma,2}^{(s)}$$

$$u_\alpha = \lambda^{q-p}\left[\sum_{s=0}^{q-2p-1} \lambda^{-s}u_{\alpha,0}^{(s)} + \sum_{s=q-2p}^{2q-2p-1} \lambda^{-s}u_{\alpha,0}^{(s)} + \zeta \sum_{s=q-2p}^{2q-2p-1} \lambda^{-s}u_{\alpha,1}^{(s)}\right] \quad (\alpha\beta)$$

$$u_\gamma = \lambda^{q}\left[\sum_{s=0}^{q-2p-1} \lambda^{-s}u_{\gamma,0}^{(s)} + \sum_{s=q-2p}^{2q-2p-1} \lambda^{-s}u_{\gamma,0}^{(s)} + \zeta \sum_{s=q-2p}^{2q-2p-1} \lambda^{-s}u_{\gamma,1}^{(s)}\right]$$

Чтобы построить напряженное состояние ($t > 0$, $Q_\gamma \not\equiv 0$) с погрешностью порядка $\lambda^{-2q+2p} = h_*^{2-2t}$ (здесь и в дальнейшем переход от $\lambda$ к $h_*$ совершается по формулам (1.2), (1.3)), надо вычислить в (7.4) все слагаемые. Для этого достаточно в уравнениях (2.2) использовать те и только те члены, которые входят в выкладки при построении нулевого и первого приближений в напряженном состоянии с нулевой изменяемостью. Отсюда вытекает.

*Следствие* 7.1. Классическая теория оболочек с уточнениями, сформулированными в конце п. 6, позволяет строить напряженные состояния ($t > 0$, $Q_\gamma \not\equiv 0$) с погрешностями порядка $h_*^{2-2t}$.

Согласно (5.3), (5.4) имеем два соотношения (первое из них — приближенное: в нем сохранен только главный член):

$$T_1 \approx 2R\sigma_{\alpha,0}^{(0)}, \qquad G_1 = -\frac{2h^2}{3}\left(\sigma_{\alpha,1}^{(1)} + \frac{\sigma_{\alpha,0}^{(0)}}{r_\beta}\right) \tag{7.5}$$

которые основаны на формулах (5.1) и имеют силу для напряженных состояний с нулевой изменяемостью. Для напряженных состояний ($t > 0$, $Q_\gamma \not\equiv 0$) вместо (5.1) надо брать (7.4), что дает

$$T_1 \approx 2R\sigma_{\alpha,0}^{(0)}, \qquad G_1 \approx -\frac{2h^2}{3}\left(h_*^{-2t}\sigma_{\alpha,1}^{(q-2p)} + \frac{\sigma_{\alpha,0}^{(0)}}{r_\beta}\right) \tag{7.6}$$

Аналогично записываются формулы для остальных усилий и моментов.

При $t < {}^1/_2$ главная часть напряжений определяется тангенциальными усилиями. В обоих напряженных состояниях они будут соизмеримы $h_*^{-1}$. От моментов при $t = 0$ и $t > 0$ получаются поправки порядка $h_*^1$ и $h_*^{1-2t}$, соответственно. Роль моментов, как и следовало ожидать, увеличивается с возрастанием $t$. Однако из вторых равенств (7.5) и (7.6) видно, что это происходит за счет первых слагаемых в круглых скобках. Вклад вторых слагаемых не меняет порядка при увеличении $t$, а так как члены, содержащие компоненты тангенциальной деформации, в (5.10) влияют только на вторые слагаемые, то можно сформулировать.

*Следствие* 7.2. Неправильный выбор соотношений упругости для моментов приводит для напряженного состояния ($t > 0$, $Q_\gamma \not\equiv 0$) к погрешностям порядка $h_*^1$ независимо от значения показателя изменяемости $t$.

Поправки, вносимые за счет правильного вычисления приведенных компонентов нагрузки и учета дополнительных членов в (6.4), оказывают влияние, начиная с такого $s$, при котором в (2.2) не исчезают взятые в фигурные скобки члены. Учтя (7.2), (7.3), заключаем, что это произойдет при $s = q - p$. Отсюда вытекает.

*Следствие* 7.3. Погрешности, связанные с неправильным (в членах порядка $h_*$ по сравнению с единицей) учетом внешней нагрузки, приводят при построении напряженного состояния ($t > 0$, $Q_\gamma \not\equiv 0$) к погрешностям порядка $\lambda^{q-p} = h_*^{1-t}$ (здесь погрешности в окончательных результатах превышают погрешности, допущенные в исходных уравнениях).

8. В рассуждениях п. 7 было существенно использовано предположение, что $Q_\gamma \not\equiv 0$. При $Q_\gamma = m \equiv 0$, т. е. в случае, когда оболочка загружена только тангенциальной поверхностной нагрузкой, для выполнения условий (1.6) надо в (2.1) положить $\rho = -p$.

Тогда (7.2) останутся без изменения, а вместо (7.3) получим

$$Q_\gamma{}^{(0)} = 0 \qquad m^{(0)} = 0, \quad Q_\alpha{}^{(0)} = Q_\alpha \quad (\alpha\beta), \quad M_\alpha{}^{(0)} = M_\alpha \quad (\alpha\beta)$$

$$Q_\gamma{}^{(s)} = m^{(s)} = Q_\alpha{}^{(s)} = Q_\beta{}^{(s)} = M_\alpha{}^{(s)} = M_\beta{}^{(s)} = 0 \qquad \text{при } s \neq 0$$

Все рассуждения п. 7 сохраняют силу, но во втором равенстве (2.2) члены, взятые в фигурные скобки, будут теперь отличны от нуля, начиная с $s = q - 2p$. Это значит, что следствия 7.1 и 7.2 предыдущего раздела переносятся и на напряженное состояние ($t = 0$, $Q_\gamma \equiv 0$), а вместо следствия 7.3 будет справедливо.

*Следствие* 8.1. Погрешности, связанные с неправильными (в членах порядка $h$ по сравнению с единицей) учетом внешней нагрузки, при построении напряженного состояния ($t > 0$, $Q_\gamma \equiv 0$) имеют порядок $\lambda^{q-2p} = h_*^{1-2t}$.

Таким образом, в рассмотренных случаях наибольшие погрешности в классической теории возникают в результате неточностей, допускаемых при операциях с поверхностной нагрузкой, т. е. неточностей, устранение которых не сопряжено со сколько-нибудь существенными трудностями.

9. Выведенные здесь соотношения упругости обеспечивают (при выполнении других оговоренных условий) максимальную точность при решении определенного класса задач, сформулированного во введении. Однако эти соотношения не свободны от формальных противоречий. Они не согласуются с шестым уравнением равновесия и не удовлетворяют условиям выполнения теоремы взаимности (монография [3], часть I, § 27). Эти несоответствия объясняются тем, что выкладки велись с точностью до членов порядка $h_*$ по сравнению с единицей. Их можно устранить, не выходя за рамки принятой точности, приписав в соотношениях упругости для тангенциальных усилий некоторые слагаемые, содержащие компоненты изгибной деформации. Тогда получатся следующие формулы:

$$T_1 = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left\{\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 - \left(\frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\beta}\right)\varkappa_1 - \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{1}{R_\alpha} + \frac{\nu}{R_\beta}\right)\left(\varkappa_1 + \varkappa_2\right)\right]\right\} \tag{9.1}$$

$$S_1 = \frac{Eh}{1+\nu}\,\omega - \frac{Eh^3}{3(1+\nu)}\left(\frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\beta}\right)\left(\tau - \frac{\omega}{R_\alpha}\right) \quad H_1 = \frac{2Eh^3}{3(1+\nu)}\left(\tau - \frac{\omega}{2R_\alpha}\right)$$

$$G_1 = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left\{\varkappa_1 + \nu\varkappa_2 - \left(\frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\beta}\right)\varepsilon_1 - \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{1}{R_\alpha} + \frac{\nu}{R_\beta}\right)\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)\right\}$$

(формулы для $T_2$, $S_2$, $H_2$, $G_2$ аналогичны и здесь не приводятся; кроме того, в формуле для $T_1$ опущен член, содержащий обжатие $m$).

Соотношения упругости (9.1) отличны от тех, которые вывел А. И. Лурье [8] (совпадают только формулы для $H_1$, $H_2$, $S_1$, $S_2$). Для задач рассмотренного здесь класса формулы (9.1) дадут заведомо большую точность. По-видимому, для многих других задач (9.1) и формулы А. И. Лурье будут адекватны по точности, однако этот вопрос еще требует изучения.

Соотношения упругости (5.6), (5.7), (5.10), (5.11) соответствуют следующим гипотезам.

1. Напряжения $\sigma_\alpha$, $\tau_{\alpha\beta}$, $\sigma_\beta$ и компоненты смещения $u_\alpha$, $u_\beta$, $u_\gamma$ меняются по толщине оболочки по линейному закону

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_{\alpha,0} + \gamma\sigma_{\alpha,1} \quad (\alpha\beta), \qquad \tau_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta,0} + \gamma\tau_{\alpha\beta,1} \\ u_\alpha &= u - \gamma\gamma_1 \quad (\alpha\beta), \qquad u_\gamma = -w - \gamma\varphi \end{aligned} \tag{9.2}$$

2. Соотношения деформации — напряжения трехмерной теории упругости можно брать в виде

$$\begin{aligned} Ee_{\alpha\alpha} &= \sigma_\alpha - \nu\sigma_\beta \quad (\alpha\beta), \qquad Ee_{\alpha\beta} = 2(1+\nu)\tau_{\alpha\beta} \\ Ee_{\alpha\gamma} &= 0 \quad (\alpha\beta), \qquad Ee_{\gamma\gamma} = -\nu(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \end{aligned} \tag{9.3}$$

При вычислении $e_{\alpha\alpha}$, $e_{\beta\beta}$, $e_{\alpha\beta}$, надо сохранять в выкладках члены с нулевой и первой степенью $\gamma$, а при вычислении $e_{\alpha\gamma}$, $e_{\beta,\gamma}$ и $e_{\gamma\gamma}$ только члены независящие от $\gamma$.

Выразив описанным образом $e_{\alpha\alpha}$, $e_{\alpha\beta}$, . . . через $u$, $v$, $w$, $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\varphi$ и вычислив при помощи (9.2), (9,3) усилия и моменты с точностью до величин порядка $h_*^2$ по формулам (5.2), получим однородные (при $P^{(i)} = 0$) соотношения упругости п. 5. Попутно выясняется, что различие между этими соотношениями и соотношениями А. И. Лурье обусловлено тем, что $e_{\gamma\gamma}$ здесь не считается равным нулю.

Поступила 22 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. и Финкельштейн Р. О. О погрешности гипотезы Кирхгофа в теории оболочек. ПММ, 1943, т. 7, вып. 5.
2. Даревский В. М., Об основных соотношениях теории тонких оболочек, ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.
3. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.
4. Cohen J. W. The inadequacy of the classical stress—strain relations for the right helicoidal shell. Proc. J. U. T. A. M. Symposium of the Theory of thin Elastic Shells, Delft, 1960.
5. Koiter W. T. A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. Proc. J. U. T. A. M. Symposium of the Theory of thin Elastic Shells, Delft, 1960.
6. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
7. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.
8. Лурье А. И. Общая теория упругих тонких оболочек. ПММ, 1940, т. 4, вып.2.