Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

ОБ ОБЩИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

И. И. Ворович

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается вопрос о представлении решений уравнений теории многослойных анизотропных оболочек через одну разрешающую функцию, удовлетворяющую уравнению высокого порядка. Выясняется, когда такое представление оказывается невозможным, и отыскиваются заменяющие представления.

1. Рассмотрим систему уравнений в перемещениях, описывающую деформированное состояние многослойных анизотропных оболочек [1]

$$L_{11}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)u + L_{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)v + L_{13}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)w = 0$$
$$L_{21}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)u + L_{22}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)v + L_{23}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)w = 0 \qquad (1.1)$$

$$L_{31}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)u + L_{32}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)v + L_{33}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)w = z \qquad (1.2)$$

Операторы L_{pg} в (1.1,2) определяются соотношениями

$$L_{11}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = C_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{16}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$
$$L_{22}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = C_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2C_{26}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad (1.3)$$
$$L_{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = L_{21}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = C_{16}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66})\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{26}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$
$$L_{13}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = L_{31}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = (k_1C_{11} + k_2C_{12})\frac{\partial}{\partial x} + (k_1C_{16} + k_2C_{26})\frac{\partial}{\partial y}$$
$$L_{23}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = L_{32}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = (k_2C_{22} + k_1C_{12})\frac{\partial}{\partial y} + (k_2C_{26} + k_1C_{16})\frac{\partial}{\partial x}$$

Здесь C_{ij} — упруго-геометрические постоянные, характеризующие свойства многослойной оболочки. Решение системы (1.1,2) в ряде случаев существенно упрощается введением так называемых разрешающих функций [1,2]. Для (1.1) разрешающую функцию можно ввести посредством формул [1]

$$a = K\Phi, \quad w = L\Phi; \qquad L = L_{11}L_{22} - L_{12}^2 \qquad (1.4)$$

Здесь a — двукомпонентный вектор с составляющими u, v, определяемыми соотношениями (1.5)

$$u = d_1\Phi, \quad v = d_2\Phi; \qquad d_1 = L_{12}L_{23} - L_{13}L_{22}, \quad d_2 = L_{13}L_{21} - L_{11}L_{23}$$

Легко устанавливается, что при любой достаточно гладкой функции Φ формулы (1.4,5) доставляют некоторое решение системы (1.1). Более сложным является вопрос о том, в какой мере представление (1.4,5) является общим.

Исследование подобного вопроса в случае однослойных изотропных оболочек [4] показало, что он не является беспредметным.

Будем опираться на некоторые общие свойства уравнений (1.1). Именно, рассмотрим систему

$$L_{11}u + L_{12}v = f_1, \qquad L_{21}u + L_{22}v = f_2 \tag{1.6}$$

относительно которой предположим следующее:

(1) Система (1.6) — эллиптическая, т. е. алгебраическое уравнение

$$L(1, \lambda) = L_{11}(1, \lambda) L_{22}(1, \lambda) - L_{12}{}^2(1, \lambda) = 0 \tag{1.7}$$

имеет корни λ_k, для которых $\operatorname{Im} \lambda_k \neq 0$

(2) Система (1.6) при граничных условиях

$$u \,| = m(s), \qquad v\,|_\Gamma = n(s)$$

однозначно разрешима для любых достаточно гладких функций f_1, f_2, n, n и контура Γ, ограничивающего оболочку.

Все эти факты в сущности могут быть доказаны при физически возможных значениях C_{ij}. Однако они будут здесь постулированы, так как основная цель работы — анализ возможности представлений (1.4,5). Ниже потребуются некоторые свойства системы (1.6), которые следуют из (1), (2).

Лемма 1.1. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \overline{\lambda}_1, \lambda_4 = \overline{\lambda}_2$ — корни уравнения (1.7). В этом случае

$$L_{ij}(\lambda_p) \neq 0 \qquad (i = 1, 2;\ j = 1, 2;\ p = 1, 2, 3, 4)$$

Для доказательства допустим, например, что $L_{11}(1, \lambda_1) = 0$. Из (1.7) сразу вытекает $L_{12}(\lambda_1) = 0$. Но в этом случае либо λ_1 есть кратный корень $L_{11}(1, \lambda)$, либо, кроме того, $L_{22}(1, \lambda_1) = 0$. Но λ_1, будучи комплексным числом, не может быть кратным корнем полинома второй степени L_{11}. Следовательно, $L_{22}(1, \lambda_1) = 0$. Таким образом, λ_1 есть корень всех полиномов L_{ij}. Но тогда, как легко видеть, нарушается однозначная разрешимость (1.6) при заданных Γu, v на контуре. В самом деле, в этом случае любые u, v вида

$$u = u_0 + \varphi(x + \lambda_1 y) + \overline{\varphi}(x + \lambda_1 y), \qquad v = v_0 + \psi(x + \lambda_1 y) + \overline{\psi}(x + \overline{\lambda}_1 y)$$

где φ, ψ — независимые аналитические функции, а u_0, v_0 — частные решения (1.6)) дают возможность удовлетворить (1.6) и граничным условиям на Γ. Но ведь остается произвол, обусловленный наличием второй пары корней λ_2, $\lambda_4 = \overline{\lambda}_2$. Лемма доказана.

Лемма 1.2. Произвольное решение системы (1.6) при $f_1 \equiv f_2 \equiv 0$ дается соотношениями:

если $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\begin{aligned} u &= \varphi(\xi_1) L_{12}(1, \lambda_1) + \overline{\varphi}(\overline{\xi}_1) L_{12}(1, \overline{\lambda}_1) + \psi(\xi_2) L_{12}(1, \lambda_2) + \overline{\psi}(\overline{\xi}_2) L_{22}(1, \overline{\lambda}_2) \\ &= -\varphi(\xi_1) L_{11}(1, \lambda_1) - \overline{\varphi}(\overline{\xi}_1) L_{11}(1, \overline{\lambda}_1) - \psi(\xi_2) L_{11}(1, \lambda_2) - \overline{\psi}(\overline{\xi}_2) L_{11}(1, \overline{\lambda}_2) \\ \xi_i &= x + \lambda_i y \qquad (i = 1, 2) \end{aligned} \tag{1.8}$$

если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$\begin{aligned} u &= \overline{\xi}\varphi(\xi) L_{12}(1, \lambda) + \xi\overline{\varphi}(\overline{\xi}) L_{12}(1, \overline{\lambda}) + \psi(\xi) L_{12}(1, \lambda) + \overline{\psi}(\overline{\xi}) L_{12}(1, \overline{\lambda}) \\ v &= -\overline{\xi}\varphi(\xi) L_{11}(1, \lambda) - \xi\overline{\varphi}(\overline{\xi}) L_{11}(1, \overline{\lambda}) - \psi(\xi) L_{11}(1, \lambda) - \overline{\psi}(\overline{\xi}) L_{11}(1, \overline{\lambda}) \\ \xi &= x + \lambda y \end{aligned}$$

Лемма 1.3. Произвольное решение уравнения

$$L\Phi_0 = 0$$

дается соотношением

$$\Phi_0 = \theta(\xi_1) + \overline{\theta}(\overline{\xi}_1) + \chi(\xi_2) + \overline{\chi}(\overline{\xi}_2) \qquad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$
$$\Phi_0 = \overline{\xi}\theta(\xi) + \xi\overline{\theta}(\overline{\xi}) + \chi(\xi) + \overline{\chi}(\overline{\xi}) \qquad (\lambda_1 = \lambda_2) \tag{1.9}$$

Лемма 1.4. Имеет место пропорция

$$\frac{L_{12}(1, \lambda_i)}{d_1(1, \lambda_i)} = -\frac{L_{11}(1, \lambda_i)}{d_2(1, \lambda_i)} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1.10}$$

где d_k даются формулами (1.5).

Для доказательства умножим (1.7) на $L_{13}(1, \lambda_i)$ и, прибавив и вычтя $L_{11}L_{12}L_{23}$, получим

$$0 = L_{13}(L_{11}L_{22} - L_{12}^2) + L_{11}L_{12}L_{23} - L_{11}L_{12}L_{23} = L_{12}(L_{11}L_{23} - L_{12}L_{13}) +$$
$$+ L_{11}(L_{22}L_{13} - L_{12}L_{23}) = L_{12}d_1 + L_{11}d_2$$

Отсюда и вытекает (1.10).

Из леммы 1.3 следует, что d_1 и d_2 могут обратиться в нуль лишь одновременно.

Лемма 1.5. Пусть в области Ω, занятой планом оболочки, имеет место соотношение

$$m(\xi_1) + \overline{m}(\overline{\xi}_1) + n(\xi_2) + \overline{n}(\overline{\xi}_2) = 0 \tag{1.11}$$

где m, n — аналитические функции своих аргументов. В этом случае

$$m(\xi_1) = ki - c, \qquad n(\xi_2) = bi + c$$

где k, b, c — произвольные действительные постоянные.

Для доказательства продифференцируем (1.11) на линиях $dy / dx = -\lambda_1$; имеем

$$\overline{m}'(\overline{\lambda}_1 - \lambda_1) + n'(\lambda_2 - \lambda_1) + \overline{n}'(\overline{\lambda}_2 - \lambda_1) = 0 \tag{1.12}$$

Продифференцируем теперь (1.12) на линиях $dy / dx = -\overline{\lambda}_1$

$$n''(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \overline{\lambda}_1) + \overline{n}''(\overline{\lambda}_2 - \lambda_1)(\overline{\lambda}_2 - \overline{\lambda}_1) = 0. \tag{1.13}$$

Из (1.13) сразу вытекает, что

$$n'' = \frac{Ci}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \overline{\lambda}_1)}, \qquad n = \frac{Ci\xi_2^2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \overline{\lambda}_1)} + A\xi_2 + B \tag{1.14}$$

Здесь C — действительная постоянная, A, B — комплексные. Аналогично имеем

$$m = \frac{Di\xi_1^2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \overline{\lambda}_2)} + E\xi_1 + F \tag{1.15}$$

Для определения C, D, A, B, E, F подставим (1.14, 15) в (1.12); получим

$$C = D = E = A = 0, \qquad B = bi + c, \qquad F = ki - c$$

Лемма 1.6. Пусть две функции $\Gamma_1(x, y)$, $\Gamma_2(x, y)$ связаны дифференциальным соотношением

$$\Pi_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\Gamma_1 = \Pi_2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\Gamma_2 \tag{1.16}$$

где Π_i — однородные действительные дифференциальные операторы, причем уравнения

$$\Pi_1(1, \lambda) = 0, \qquad \Pi_2(1, \lambda) = 0$$

не имеют общих корней. В этом случае существует функция Γ такая, что

$$\Gamma_1 = \Pi_2\Gamma, \qquad \Gamma_2 = \Pi_1\Gamma \tag{1.17}$$

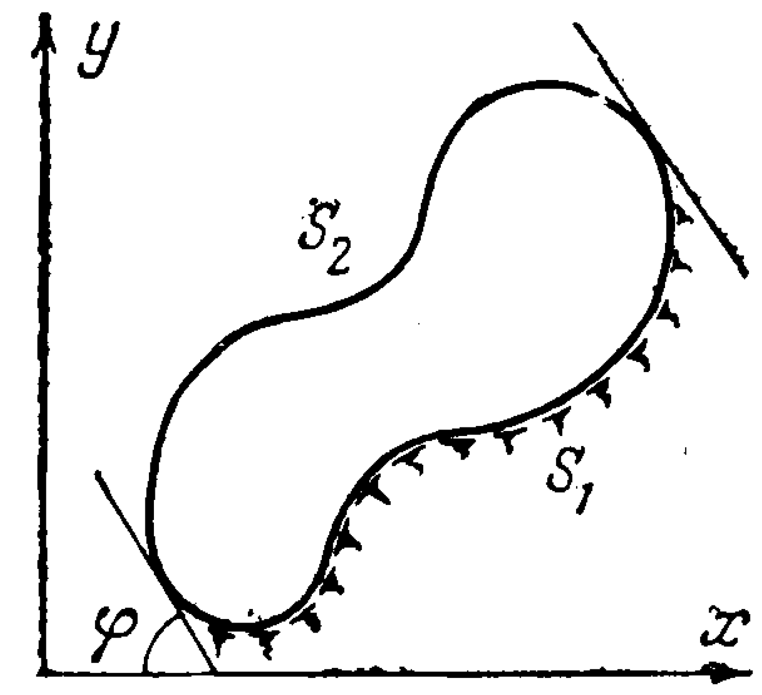
Для доказательства заметим, что уравнения (1.17) можно записать в виде

$$\Gamma_1 = \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_k \frac{\partial}{\partial y}\right)\Gamma; \qquad \Gamma_2 = \prod_{m=1}^{M} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \beta_m \frac{\partial}{\partial y}\right)\Gamma \tag{1.18}$$

причем $\alpha_k \neq \beta_n$. Из (1.17) находим

$$\Gamma = \Pi_2^{-1}\Gamma_1 + f_2$$

Здесь Π_2^{-1} — оператор, обратный Π_2, а f_2 — нуль-функция оператора Π_2. Оператор Π_2^{-1} определим следующим образом. Допустим вначале, что $N = 1$, а α_1 — действительное число. Рассмотрим направление $dy \,/\, dx = -\alpha_1$. Совокупность прямых этого направления делит границу области Ω на части S_1 и S_2 (фигура). Зададим на S_1 граничное значение Γ равным нулю. Тогда, очевидно, решение уравнения



$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)\Gamma = \Gamma_1 \tag{1.19}$$

вполне определено во всей области Ω и, следовательно, построен оператор

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)^{-1}$$

Допустим, что α_1 — комплексное число, а $N = 2$. В этом случае первое уравнение (1.18) имеет вид

$$\Gamma_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \bar{\alpha}_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)\Gamma \tag{1.20}$$

Очевидно, имеем здесь в правой части эллиптический оператор, и, если потребовать, чтобы $\Gamma = 0$ на S, то Γ будет однозначно определяться из (1.20), а следовательно, будет построен и оператор

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \bar{\alpha}_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)\right]^{-1}$$

В случае произвольного N оператор Π_2^{-1} строится как произведение соответствующих обратных операторов. Нуль-функция для оператора Π_2 имеет вид:

$$f_2 = \sum_{k=1}^{N} \{x^{p_k}[\varphi_{p_k}(\alpha_k x + y) + \bar{\varphi}_{p_k}(\bar{\alpha}_k x + y)] + x^{p_k - 1}[\varphi_{p_k-1}(\alpha_k x + y) +$$
$$+ \bar{\varphi}_{p_k-1}(\bar{\alpha}_k x + y)] + \ldots + \varphi_0(\alpha_k x + y) + \bar{\varphi}_0(\bar{\alpha}_k x + y)]\} \tag{1.21}$$

Здесь p_{k+1} — кратность корня α_k. Попытаемся найти f_2 так, чтобы выполнялось второе из соотношений (1.18)

$$\Pi_1\Pi_2^{-1}\Gamma_1 + \Pi_1 f_2 = \Gamma_2$$

Легко видеть, что имеет место соотношение

$$\Pi_2(\Pi_1\Pi_2^{-1}\Gamma_1 - \Gamma_2) \equiv 0$$

Действительно, в силу перестановочности операторов Π_i и в силу (1.16) имеем

$$\Pi_2(\Pi_1\Pi_2^{-1}\Gamma_1 - \Gamma_2) = \Pi_1\Gamma_1 - \Pi_2\Gamma_2 \equiv 0$$

Поэтому $\Pi_1 f_2$ есть нуль-функция для оператора Π_2 и, в силу (1.21):

$$\Pi_1 f_2 = \sum_{k=1}^{N} \{x^{p_k}[\psi_{p_k}(\alpha_k x + y) + \bar{\psi}_{p_k}(\bar{\alpha}_k x + y)] + \tag{1.22}$$
$$+ x^{p_k - 1}[\psi_{p_k-1}(\alpha_k x + y) + \bar{\psi}_{p_k-1}(\bar{\alpha}_k x + y)] + \ldots\}$$

Теперь легко видеть, что если подставить (1.21) в (1.22), то при $\alpha_k \neq \beta_m$ получаем рекуррентную цепочку, определяющую последовательно все φ. Таким образом, функция f_2 может быть подобрана так, чтобы имело место (1.19). Этим, очевидно, и закончено доказательство леммы 1.6.

2. После приведенных предварительных соображений перейдем к непосредственному анализу возможности (1.4,5). Рассмотрим вначале случай, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Пусть заданы вектор $a\,(u,\ v)$ и функция w, связанные (1.1), и требуется найти Φ так, чтобы имело место (1. 4,5). Из (1.4) имеем

$$\Phi = L^{-1}w + \Phi_0 \tag{2.1}$$

Здесь оператор L^{-1} строится, как это сделано при доказательстве леммы 1.6. Для определения Φ_0 используем первое из соотношений (1.4)

$$a = Kd^{-1}w + K\Phi_0 \tag{2.2}$$

В свою очередь, для a из (1.1) можно получить представление

$$a = T^{-1}f + a_0, \qquad f = \{f_1,\ f_2\}, \qquad f_1 = -L_{13}w, \qquad f_2 = -L_{23}w \tag{2.3}$$

Оператор T_1 определяется тем, что дает решение системы (1.6) при однородных граничных условиях $m \equiv 0$, $n \equiv 0$ на контуре.

Из (2.2,3) получаем уравнение для Φ_0

$$K\Phi_0 = T^{-1}f - KL^{-1}w \tag{2.4}$$

Лемма 2.1. Имеет место соотношение

$$T\,(T^{-1}f - KL^{-1}w) \equiv 0 \tag{2.5}$$

Действительно, составляющие вектора $a_1 = TKL^{-1}w$ даются в силу (1.4,5) соотношениями

$$u_1 = [L_{11}\,(L_{12}L_{23} - L_{13}L_{22}) + L_{12}\,(L_{13}L_{21} - L_{11}L_{23})]\,L^{-1}w \tag{2.6}$$

$$v_1 = [L_{21}\,(L_{12}L_{23} - L_{13}L_{22}) + L_{22}\,(L_{13}L_{21} - L_{11}L_{23})]\,L^{-1}w$$

Из (2.6) легко получаем

$$u_1 = -L_{13}w, \qquad v_1 = -L_{23}w \tag{2.7}$$

Далее, в силу (2.3), вектор $a_2 = TT^{-1}f$ будет иметь составляющие

$$u_2 = -L_{13}w, \qquad v_2 = -L_{23}w \tag{2.8}$$

Из (2.7,8) следует лемма 2.1.

Таким образом, правая часть (2.4) есть однородное решение системы (1.6), которое дается леммой 1.2, и, следовательно, уравнение (2.4) может быть представлено в виде

$$d_1\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}\right)\Phi_0 = \varphi(\xi_1)\,L_{12}(1,\ \lambda_1) + \overline{\varphi}(\overline{\xi}_1)\,L_{12}(1,\ \overline{\lambda}_1) + \psi(\xi_2)\,L_{12}(1,\ \lambda_2) + \overline{\psi}(\overline{\xi}_2)\,L_{12}(1,\ \overline{\lambda}_2) \tag{2.9}$$

$$d_2\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}\right)\Phi_0 = -\varphi(\xi_1)\,L_{11}(1,\ \lambda_1) - \overline{\varphi}(\overline{\xi}_1)\,L_{11}(1,\ \overline{\lambda}_1) - \psi(\xi_2)\,L_{11}(1,\ \lambda_2) - \overline{\psi}(\overline{\xi}_2)\,L_{11}(1,\ \overline{\lambda}_2)$$

Учитывая, что в силу леммы 1.3 решение Φ_0 выражается через две аналитические функции θ, χ, из (2.9) получаем (2.10)

$$d_1(1,\ \lambda_1)\,\theta'''(\xi_1) + d_1(1,\ \overline{\lambda}_1)\,\overline{\theta}'''(\overline{\xi}_1) + d_1(1,\ \lambda_2)\,\chi'''(\xi_2) + d_1(1,\ \overline{\lambda}_2)\,\overline{\chi}'''(\overline{\xi}_2) =$$
$$= L_{12}(1,\ \lambda_1)\,\varphi(\xi_1) + L_{12}(1,\ \overline{\lambda}_1)\,\overline{\varphi}(\overline{\xi}_1) + L_{12}(1,\lambda_2)\,\psi(\xi_2) + L_{12}(1,\ \overline{\lambda}_2)\,\overline{\psi}(\overline{\xi}_2)$$
$$d_2(1,\ \lambda_1)\,\theta'''(\xi_1) + d_2(1,\ \overline{\lambda}_1)\,\overline{\theta}'''(\overline{\xi}_1) + d_2(1,\ \lambda_2)\,\chi'''(\xi_2) + d_2(1,\ \overline{\lambda}_2)\,\chi'''(\overline{\xi}_2) =$$
$$= -L_{11}(1,\ \lambda_1)\,\varphi(\xi_1) - L_{11}(1,\ \overline{\lambda}_1)\,\overline{\varphi}(\overline{\xi}_1) - L_{11}(1,\ \lambda_2)\,\psi(\xi_2) - L_{11}(1,\ \overline{\lambda}_1)\,\overline{\psi}(\overline{\xi}_2) \tag{2.11}$$

Пусть выполнены условия

$$
\begin{aligned}
&d_1(1, \lambda_1) \neq 0 \qquad (\text{или} \quad d_2(1, \lambda_1) \neq 0)\\
&d_1(1, \lambda_2) \neq 0 \qquad (\text{или} \quad d_2(1, \lambda_2) \neq 0)
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

В этом случае из (2.10) находятся θ и χ, а вместе с ним — и Φ_0. Таким образом, функция Φ, осуществляющая (1.4), построена. Найдем теперь произвол, который может быть допущен в выборе функции Φ. Пусть Φ_1 и Φ_2 одновременно осуществляют (1.4). Тогда, очевидно, для $\Phi_{12} = \Phi_1 - \Phi_2$ получаем

$$
K\Phi_{12} = 0, \qquad L\Phi_{12} = 0 \tag{2.13}
$$

Из (2.13) вытекает, что для Φ_{12} справедливо (1.9), причем соответствующие θ и χ обозначим через θ_{12} и χ_{12}. Из (2.13) в этом случае имеем

$$
d_1(1, \lambda_1)\theta_{12}''' + d_1(1, \overline{\lambda}_1)\overline{\theta}_{12}''' + d_1(1, \lambda_2)\chi_{12}''' + d_1(1, \overline{\lambda}_2)\overline{\chi}_{12}''' \equiv 0 \tag{2.14}
$$

$$
d_2(1, \lambda_1)\theta_{12}''' + d_2(1, \overline{\lambda}_1)\overline{\theta}_{12}''' + d_2(1, \lambda_2)\chi_{12}''' + d_2(1, \overline{\lambda}_2)\overline{\chi}_{12}''' = 0 \tag{2.15}
$$

В силу леммы 1.5, из (2.14) получаем

$$
d_1(1, \lambda_1)\theta_{12}''' = ki - c, \qquad d_1(1, \lambda_2)\chi_{12}''' = bi + c \tag{2.16}
$$

Подставив (2.16) в (2.15), найдем соотношение, связывающее k, b, c

$$
\begin{aligned}
&\frac{d_2(1, \lambda_1)}{d_1(1, \lambda_1)}(ki - c) + \frac{\overline{d}_2(1, \overline{\lambda}_1)}{\overline{d}_1(1, \overline{\lambda}_1)}(-ki - c) + \frac{d_2(1, \lambda_2)}{d_1(1, \lambda_2)}(bi + c) + \\
&\qquad + \frac{\overline{d}_2(1, \overline{\lambda}_2)}{\overline{d}_1(1, \overline{\lambda}_2)}(-bi + c) = 0
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

Из (2.17) и (1.10) имеем

$$
\begin{aligned}
&ki\left[-\frac{L_{11}(1, \lambda_1)}{L_{12}(1, \lambda_1)} + \frac{L_{11}(1, \overline{\lambda}_1)}{L_{12}(1, \overline{\lambda}_1)}\right] + bi\left[-\frac{L_{11}(1, \lambda_2)}{L_{12}(1, \lambda_2)} + \frac{L_{11}(1, \overline{\lambda}_2)}{L_{12}(1, \overline{\lambda}_2)}\right] + \\
&+ c\left[\frac{L_{11}(1, \lambda_1)}{L_{12}(1, \lambda_1)} + \frac{L_{11}(1, \overline{\lambda}_1)}{L_{12}(1, \overline{\lambda}_1)} - \frac{L_{11}(1, \overline{\lambda}_2)}{L_{12}(1, \overline{\lambda}_2)} - \frac{L_{11}(1, \overline{\lambda}_2)}{L_{12}(1, \overline{\lambda}_2)}\right] = 0
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

Установим, что в (2.18) коэффициенты при k, b, c не могут одновременно обратиться в нуль. Действительно, если это допустить, то легко заметить, что

$$
\operatorname{Im}\frac{L_{11}(1, \lambda_1)}{L_{12}(1, \lambda_1)} = \operatorname{Im}\frac{L_{11}(1, \lambda_2)}{L_{12}(1, \lambda_2)} = 0, \qquad \operatorname{Re}\frac{L_{11}(1, \lambda_1)}{L_{12}(1, \lambda_1)} = \operatorname{Re}\frac{L_{11}(1, \lambda_2)}{L_{12}(1, \lambda_2)} \tag{2.19}
$$

Отсюда следует, что

$$
\frac{L_{11}(\lambda_1)}{L_{12}(\lambda_1)} = \frac{L_{11}(\lambda_2)}{L_{12}(\lambda_2)}
$$

В этом случае из леммы 1.2 вытекает

$$
u = -\frac{L_{11}}{L_{12}}v
$$

Это противоречит условию разрешимости системы (1.6) при любых значениях m, n.

Из (2.16) получаем

$$\theta_{12}=\frac{ki-c}{d_1(1,\lambda_1)}\frac{\xi_1^3}{6}+M_1\xi_1^2+N_1\xi_1+P_1$$
$$\chi_{12}=\frac{bi+c}{d_1(1,\lambda_2)}\frac{\xi_2^3}{6}+M_2\xi_2^2+N_2\xi_2+P_2 \tag{2.20}$$

а из (2.20) вытекает, что Φ_{12} имеет структуру

$$\Phi_{12}=\Pi_3(x,y)+\Pi_2(x,y) \tag{2.21}$$

Здесь $\Pi_3(x,y)$ — однородный полином третьей степени специальной формы, коэффициенты которого зависят от трех постоянных, связанных соотношением (2.18), а Π_2 — произвольный полином второй степени. Таким образом, функция Φ определяется с произволом в восемь постоянных.

3. Перейдем к анализу случая, когда одно из соотношений (2.12) нарушается. Легко видеть, что невозможно одновременное нарушение обеих условий (2.12), т. е. невозможны одновременно равенства:

$$d_1(1,\lambda_1)=0,\quad d_2(1,\lambda_1)=0,\quad d_1(1,\lambda_2)=0,\quad d_2(1,\lambda_2)=0 \tag{3.1}$$

Действительно, это условие означало бы, что $d_i(\lambda)$ имеют по два комплексных корня, что невозможно, так как d_i — полиномы третьей степени. Допустим, что имеет место первое условие (3.1). Установим структуру операторов L_{ij}, d_i в этом случае. В силу их однородности имеем

$$L_{11}L_{22}-L_{12}^2=R_1R_2C \qquad \left(R_i=\left(\frac{\partial}{\partial y}-\alpha_i\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}-\bar\alpha_i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) \tag{3.2}$$
$$d_1=\left(\frac{\partial}{\partial y}-\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}\right)R_1C_1,\qquad d_2=\left(\frac{\partial}{\partial y}-\alpha_2\frac{\partial}{\partial x}\right)R_1C_2$$

Здесь α_i — действительные корни d_i и

$$C=C_{66}C_{22}-C_{26}^2,\qquad C_1=C_{26}(k_2C_{22}+k_1C_{12})-C_{22}(k_1C_{16}+k_2C_{26}) \tag{3.3}$$
$$C_2=C_{26}(k_1C_{16}+k_2C_{26})-C_{66}(k_2C_{22}+k_1C_{12})$$

Если предположить, что (1.4,5) все же имеют место, то в рассматриваемом случае их можно записать в виде (3.4)

$$u=C_1\left(\frac{\partial}{\partial y}-\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}\right)R_1\Phi,\qquad v=C_2\left(\frac{\partial}{\partial y}-\alpha_2\frac{\partial}{\partial x}\right)R_1\Phi,\qquad w=CR_1R_2\Phi$$

Отсюда

$$C_2\left(\frac{\partial}{\partial y}-\alpha_2\frac{\partial}{\partial x}\right)u-C_1\left(\frac{\partial}{\partial y}-\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}\right)v=0 \tag{3.5}$$
$$CR_2u=C_1\left(\frac{\partial}{\partial y}-\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}\right)w,\qquad CR_2v=C_2\left(\frac{\partial}{\partial y}-\alpha_2\frac{\partial}{\partial x}\right)w$$

Таким образом, соотношения (3.5) необходимы для осуществления (1.4,5), если имеет место первое соотношение (3.1). Рассмотрим вопрос об их достаточности. При выполнении первого из соотношений (3.5) в силу леммы 1.6 существует функция θ такая, что

$$u=C_1\left(\frac{\partial}{\partial y}-\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\theta,\qquad v=C_2\left(\frac{\partial}{\partial y}-\alpha_2\frac{\partial}{\partial x}\right)\theta \tag{3.6}$$

Подставив (3.6) в (3.5), легко получим

$$w=CR_2\theta+m \tag{3.7}$$

Таким образом, при выполнении первого соотношения (3.1) условия (3.5) достаточны для осуществления (1.4,5), если постоянная m в (3.7) окажется равной нулю. Из (3.4,5) вытекает, что в этих условиях функция Φ определяется с точностью до функции вида $\Phi_0 + My^2$, где M — произвольная постоянная, а Φ_0 — произвольная нуль-функция оператора R_1.

Найдем теперь общее представление решений (1.1) в случае, если имеет место первое из соотношений (3.1). Исключая последовательно u, v, w из (1.1), будем иметь

$$du - d_1 w = 0, \qquad Lv - d_2 w = 0, \qquad d_1 v - d_2 u = 0 \tag{3.8}$$

Учитывая (3.2), этим соотношениям можно придать вид

$$CR_2 u_1 - C_1\left(\frac{\partial}{\partial y} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) w_1 = 0, \qquad CR_2 v_1 - C_2\left(\frac{\partial}{\partial y} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) w_1 = 0 \tag{3.9}$$

$$C_1\left(\frac{\partial}{\partial y} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) v_1 - C_2\left(\frac{\partial}{\partial y} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) u_1 = 0 \qquad (u_1 = R_1 u, \ v_1 = R_1 v, \ w_1 = R_1 w_1)$$

Из последнего соотношения в силу леммы (1.6) получим (3.10)

$$u_1 = C_1\left(\frac{\partial}{\partial y} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi, \qquad v_1 = C_2\left(\frac{\partial}{\partial y} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi, \qquad w_1 = CR_2\Phi + M$$

Здесь Φ — некоторая функция, а M — постоянная. При выводе (3.10) предполагалось $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Из (3.10) следует

$$u = C_1\left(\frac{\partial}{\partial y} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi + A, \qquad v = C_2\left(\frac{\partial}{\partial y} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi + B$$

$$w = CR_2\psi + M\frac{y^2}{2} + D \tag{3.11}$$

Здесь ψ — произвольная функция, M — произвольная постоянная; A, B, D — некоторые нуль-функции оператора R_1, связанные определенным соотношением. Чтобы его найти, подставим (3.11) в (1.1). Имеем

$$\left[L_{i1}C_1\left(\frac{\partial}{\partial y} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) + L_{i2}C_2\left(\frac{\partial}{\partial y} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) + L_{i3}CR_2\right]\psi +$$

$$+ L_{i1}A + L_{i2}B + L_{i3}D = 0 \tag{3.12}$$

Далее, легко видеть, что

$$R_1\left\{\left[\sum_{j=1}^{2} L_{ij}C_j\left(\frac{\partial}{\partial y} - \alpha_j \frac{\partial}{\partial x}\right) + L_{i3}CR_2\right]\psi + L_{13}y^2\frac{M}{2}\right\} = 0 \tag{3.13}$$

Поэтому из (3.12, 13) вытекает

$$L_{11}A + L_{12}B + L_{13}D = K_1, \qquad L_{12}A + L_{22}B + L_{23}D = K_2 \tag{3.14}$$

Здесь K_i — нуль-функции оператора R_1, однозначно определяемые ψ, M. Заметим, что из соотношений (3.14) одно есть следствие другого.

В самом деле, для A, B, D, K_i имеют место представления

$$A = a(x + \lambda_1 y) + \bar{a}(x + \bar{\lambda}_1 y); \qquad B = b(x + \lambda_1 y) + \bar{b}(x + \bar{\lambda}_1 y)$$

$$D = d(x + \lambda_1 y) + \bar{d}(x + \lambda_1 y), \qquad K_i = k_i(x + \lambda_i y) + \bar{k}_i(x + \bar{\lambda}_i y) \tag{3.15}$$

вследствие которых системе (3.14) можно придать вид

$$L_{11}(1, \lambda_1)a'' + L_{11}(1, \bar{\lambda}_1)\bar{a}'' + L_{12}(1, \lambda_1)b'' + L_{12}(1, \bar{\lambda}_1)\bar{b}'' + L_{13}(1, \lambda_1)d' + \\ + L_{13}(1, \bar{\lambda}_1)\bar{d}' = k_1 + \bar{k}_1 \tag{3.16}$$

$$L_{21}(1, \lambda_1)a'' + L_{21}(1, \bar{\lambda}_1)\bar{a}'' + L_{22}(1, \lambda_1)b'' + L_{22}(1, \bar{\lambda}_1)\bar{b}'' + \\ + L_{23}(1, \lambda_1)d' + L_{23}(1, \bar{\lambda}_1)\bar{d}' = k_2 + \bar{k}_2$$

Из (3.16) вытекает

$$L_{11}(1, \lambda_1)a'' + L_{12}(1, \lambda_1)b'' + L_{13}(1, \lambda_1)d' = k_1$$
$$L_{21}(1, \lambda_1)a'' + L_{22}(1, \lambda_1)b'' + L_{23}(1, \lambda_1)d' = k_2 \tag{3.17}$$

Но в силу (1.7) и первого соотношения (3.1) должно иметь место соотношение

$$k_1/k_2 = L_{11}/L_{21} = L_{12}/L_{22} = L_{13}/L_{23} \tag{3.18}$$

так что можно, например, принимать во внимание лишь первое из уравнений (3.14).

Окончательно имеем следующий вывод: при выполнении первого соотношения (3.1) общее представление решений (1.1) дается формулами (3.11), где A, B, D связаны одним из соотношений (3.14). Рассмотрим теперь степень произвола ψ, A, B, D, M в представлениях (3.11). Допустим, что $u \equiv v \equiv w \equiv 0$ и, следовательно, $R_1 u \equiv R_1 v \equiv R_1 w \equiv 0$. Из (3.11) легко получаем

$$\psi = \psi_0 + Ny^2 \qquad (R_1\psi_0 = 0) \tag{3.19}$$

Здесь N — произвольная постоянная. Из последнего равенства (3.11) вытекает, что $M = 0$, т. е. M определяется однозначно. Из (3.11) имеем

$$A = -2C_1Ny - C_1\left(\frac{\partial}{\partial y} - \alpha_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_0 \tag{3.20}$$

$$B = -2C_2Ny - C_2\left(\frac{\partial}{\partial y} - \alpha_2\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_0, \quad D = -2CN - CR_2\psi_0$$

Таким образом, к функции ψ в представлении (3.11) можно прибавить произвольный агрегат вида (3.19), но при этом соответственно к A, B, D следует прибавить агрегаты (3.20).

4. Обратимся к случаю кратных корней $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Анализ возможности представлений (1.4,5) производится здесь аналогично; приведем его без подробностей. Уравнения (2.9), определяющие в этом случае Φ_0, запишутся в виде:

$$d_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\Phi_0 = \bar{\xi}\varphi(\xi)L_{12}(1, \lambda) + \xi\bar{\varphi}(\bar{\xi})L_{12}(1, \bar{\lambda}) + \psi(\xi)L_{12}(1, \lambda) + \\ + \bar{\psi}(\bar{\xi})L_{12}(1, \bar{\lambda}) \tag{4.1}$$

$$d_2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\Phi_0 = -\bar{\xi}\varphi(\xi)L_{11}(1, \lambda) - \xi\bar{\varphi}(\bar{\xi})L_{11}(1, \bar{\lambda}) - \psi(\xi)L_{11}(1, \lambda) - \\ - \bar{\psi}(\bar{\xi})L_{11}(1, \bar{\lambda})$$

Используя лемму 1.3, легко заключаем, что Φ_0 определяется из (4.1), если выполнено одно из условий

$$d_1(1, \lambda) \neq 0, \qquad d_2(1, \lambda) \neq 0 \tag{4.2}$$

Заметим при этом, что (4.2) обеспечивают, таким образом, и осуществление (1.4). Найдем произвол в определении Φ.

Пусть в (1.4,5) имеем $u \equiv v \equiv w \equiv 0$. В этом случае, в силу леммы 1.3

$$\Phi_0 = \bar{\xi}\theta(\xi) + \xi\bar{\theta}(\bar{\xi}) + \chi(\xi) + \bar{\chi}(\bar{\xi}) \tag{4.3}$$

и должны выполняться соотношения

$$d_i\Phi_0 = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{4.4}$$

которые запишем в виде

$$\begin{gathered}\bar{\xi}\theta''' d_1(1, \lambda) + \theta'' d_1^*(1, \lambda) + \xi\bar{\theta}'''(1, \bar{\lambda}) + \bar{\theta}'' d_1^*(1, \lambda) + \\ + \chi''' d_1(1, \lambda) + \bar{\chi}''' d_1(1, \bar{\lambda}) = 0 \\ \bar{\xi}\theta''' d_2(1, \lambda) + \theta'' d_2^*(1, \lambda) + \xi\bar{\theta}'''(1, \bar{\lambda}) d_2(1, \bar{\lambda}) + \bar{\theta}'' d_2^*(1, \lambda) + \\ + \chi''' d_2(1, \lambda) + \bar{\chi}''' d_2(1, \bar{\lambda}) = 0\end{gathered} \tag{4.5}$$

Здесь d_i^* — некоторые функции λ_i, определение которых опускаем вследствие простоты. Из (4.5) легко находим

$$\begin{gathered}\Phi_0 = \frac{\alpha i}{2}\left(\frac{\xi\bar{\xi}^2}{I} d_2 - \frac{\xi\bar{\xi}^2}{\bar{I}} \bar{d}_2 - \frac{\xi^3}{3I} d_2^* + \frac{\bar{\xi}^3}{3\bar{I}} \bar{d}_2^*\right) + \\ + \frac{\beta i}{2}\left(-\frac{\bar{\xi}\xi^2}{I} d_1 + \frac{\xi\bar{\xi}^2}{\bar{I}} \bar{d}_1 + \frac{\xi^3}{3I} d_1^* - \frac{\bar{\xi}^3}{3\bar{I}} \bar{d}_1^*\right) + P_2(x, y)\end{gathered} \tag{4.6}$$

Здесь α, β — произвольные постоянные, I — фиксированная постоянная, а $P_2(x, y)$ — произвольный полином второй степени. Таким образом, и здесь имеем произвол в восемь постоянных. Допустим теперь, что выполнено одно из условий:

$$d_i(1, \lambda) = 0 \quad (i = 1 \text{ или } 2) \tag{4.7}$$

Для осуществимости представлений (1.4,5) и в этом случае, очевидно, необходимо выполнение условий (3.5), в которых оператор $R_2 = R_1 = R$ (так как $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$). Эти условия будут достаточны, если в (3.7) постоянная m окажется равной нулю.

Общее представление решения (1.1) и здесь имеет вид (3.11), причем A, B, D удовлетворяют (3.14). Сохраняются также и все заключения о характере произвола в представлениях (3.4) и (3.11).

5. Вводя функцию напряжений [3] уравнения, равновесия многослойной ортотропной оболочки можно записать еще и в следующем виде [1]

$$L_2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi - \nabla_r\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)w = 0 \tag{5.1}$$

$$L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)w + \nabla_r\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi = Z \tag{5.2}$$

Операторы

$$\begin{gathered}L_1 = D_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4} \\ L_2 = \frac{1}{T}\left[C_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{C_{66}} - 2\frac{C_{12}}{T}\right)\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + C_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right] \\ T = C_{11}C_{22} - C_{12}^2 \neq 0, \qquad \nabla_r = k_1\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_1\frac{\partial^2}{\partial y^2}\end{gathered} \tag{5.3}$$

[1] Результаты этого параграфа получены Е. М. Королевой.

Здесь D_{ij} — также некоторые упруго-геометрические характеристики. Для (5.1) можно ввести разрешающую функцию, положив

$$w = L_2\Phi, \qquad u = \nabla_r\Phi \tag{5.4}$$

Возможность представления (5.4) существенно зависит от свойств корней разрешающего уравнения

$$1 + \frac{T}{C_{11}}\left(\frac{1}{C_{66}} - \frac{2C_{12}}{T}\right)\lambda^2 + \frac{C_{22}}{C_{11}}\lambda^4 = 0, \qquad \lambda_k = \mu_k + i\nu_k \tag{5.5}$$

Приведем и окончательные результаты исследования возможности (5.4). Функция Φ, осуществляющая (5.4), всегда существует, если

$$k_2\lambda_i^2 + k_1 \neq 0 \quad (i = 1,2) \tag{5.6}$$

При этом функция Φ определяется с точностью до полинома вида

$$\Phi = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \Pi_1, \qquad k_2a + k_1c = 0 \tag{5.7}$$

где Π_1 — произвольный полином первой степени. Если (5.6) нарушается хотя бы для одного корня, например λ_1, то для осуществления (5.4) необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение

$$w = \frac{C_{11}}{Tk_2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\mu_2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + (\mu_2{}^2 + \nu_2{}^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\varphi \tag{5.8}$$

При этом Φ определяется с точностью до произвольного решения уравнения $\nabla_r\Phi = 0$. Если (5.6.8) нарушатся, то (5.4) невозможны. В этом случае их можно заменить соотношениями

$$\frac{C_{11}}{Tk_2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\mu_2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + (\mu_2{}^2 + \nu_2{}^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\varphi + \theta = w \qquad (\lambda_1 \neq \lambda_2) \tag{5.9}$$

$$\frac{C_{11}}{Tk_2{}^2}\nabla_r\varphi + \theta = w \qquad (\lambda_1 = \lambda_2)$$

Здесь θ есть некоторое решение уравнения $\nabla_r\theta = 0$. Функция θ при этом определяется вполне однозначно.

6. В заключение отметим следующее обстоятельство. Основной результат данной заметки заключается в том, что общие представления (1.4,5), (5.4) теряют силу при соответственном осуществлении равенств

$$d_i(1, \lambda_k) = 0, \qquad k_2 + k_1\lambda_k{}^2 = 0 \tag{6.1}$$

Однако нельзя рекомендовать использование этих представлений и в том случае, когда (6.1) вблизи к выполнению, ибо в этом случае столкнемся с большой потерей точности при численных расчетах.

Поступила 6. IV.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, 1961.
2. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. ОГИЗ — Гостехиздат. 1947.
3. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.
4. Ворович И. И. О некоторых представлениях решения уравнений теории пологих оболочек. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.