

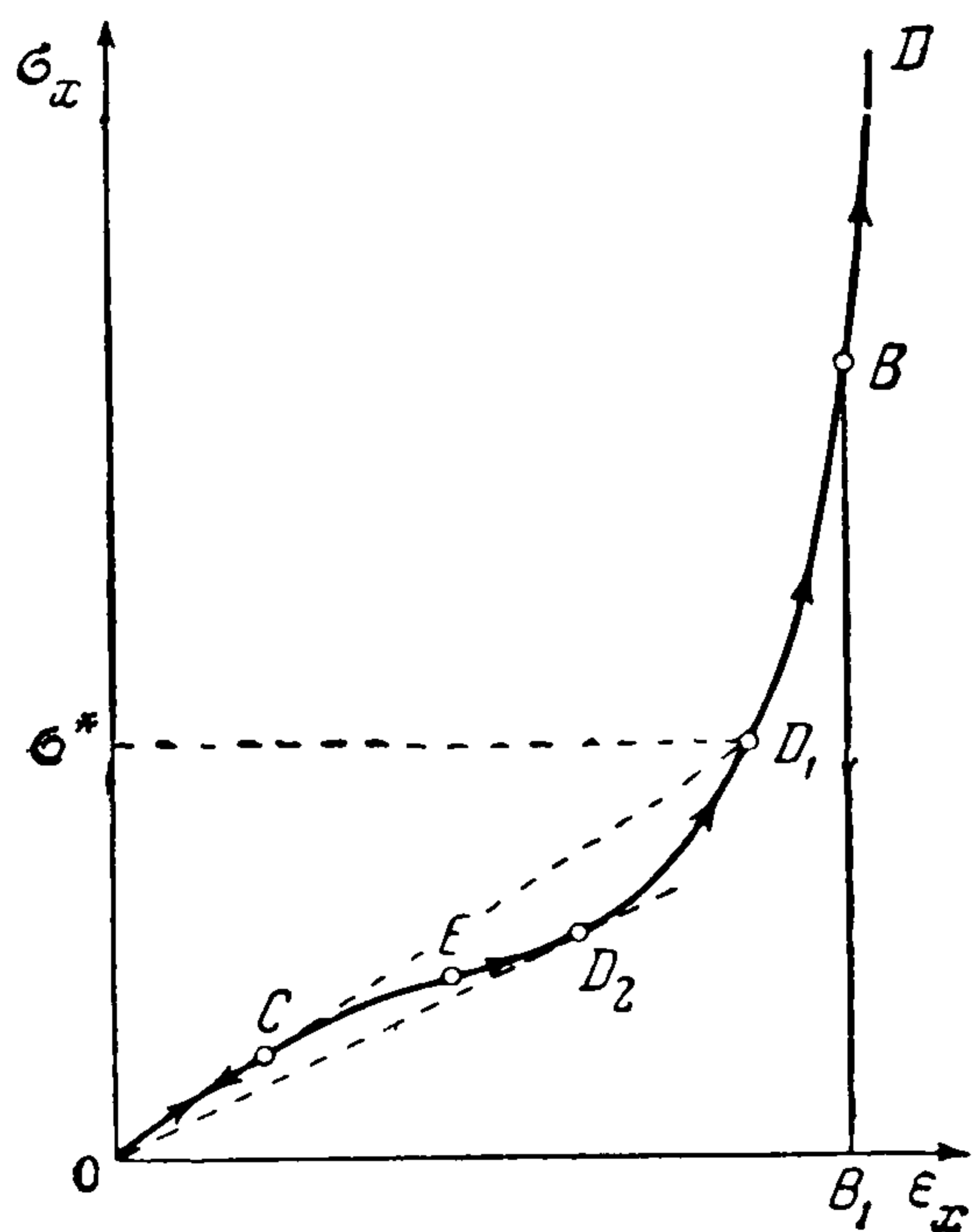
## ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЕЕ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ

Н. В. Зволинский, Г. В. Рыков

(Москва)

Рассматривается плоская пластическая волна, падающая нормально на плоскую границу раздела двух упруго-пластических полупространств. В такой постановке задача является пространственно одномерной и для описания явления достаточно воспользоваться диаграммами одноосного сжатия. В работе делаются лишь предположения общего характера о свойствах диаграмм. Изучаются отраженные и преломленные волны, коэффициент отражения и его связь с диаграммой сжатия.

Реальные среды, в которых приходится рассматривать распространение сильных возмущений (грунты, элементы строительных сооружений и др.), почти всегда являются неоднородными. Неоднородность может либо характеризоваться непрерывным распределением, либо проявляться в виде более или менее резких границ раздела. В последних случаях считается, что различные среды соприкасаются по некоторой граничной поверхности. Падение волны на такую поверхность приводит к явлению преломления и отражения. Для пластических волн изучение подобных явлений находится в самой начальной стадии развития. Естественно, что изучение начинается со случая плоской волны, нормально падающей на плоскую границу раздела двух сред. Частная задача с кусочнолинейной диаграммой сжатия рассмотрена в работе [1].



Фиг. 1

Предполагается, что начальный участок диаграммы сжатия, соответствующий упругому деформированию, — прямолинейный ( $OC$  на фиг. 1), причем на нем нагружение и разгрузка происходят по одному и тому же закону. О дальнейшем ходе диаграммы сжатия при нагружении предполагается: лишь, что ветвь ее  $CEBD$  либо всюду вогнута вверх, либо разделяется точкой  $E$  на два участка:  $CE$  — выпуклый вверх и  $ED$  — вогнутый. Кривая  $OCEBD$  представляет монотонно возрастающую функцию. Относительно закона разгрузки предполагается, что правее точки  $C$ , где деформирование делается неупругим, разгрузка происходит при сохранении плотности (по прямой, параллельной оси ординат). Повторное нагружение описывается движением изображающей точки вверх по  $BB_1$  до точки  $B$  и при продолжающемся нагружении — по ветви  $BD$ . Каждое из контактирующих полупространств описывается подобной диаграммой сжатия; обе диаграммы отличаются одна от другой лишь количественными характеристиками. Как и в работе [2], предполагается, что падающая волна вызвана ударной нагрузкой, монотонно убывающей от начального значения (типичное свойство взрывной волны). Падающая волна обладает ударным фронтом, распространяющимся по невозмущенной среде, причем частицы за ударным фронтом находятся в режиме разгрузки. Такой характер падающей волны возможен в двух случаях

сжатия при нагружении предполагается: лишь, что ветвь ее  $CEBD$  либо всюду вогнута вверх, либо разделяется точкой  $E$  на два участка:  $CE$  — выпуклый вверх и  $ED$  — вогнутый. Кривая  $OCEBD$  представляет монотонно возрастающую функцию. Относительно закона разгрузки предполагается, что правее точки  $C$ , где деформирование делается неупругим, разгрузка происходит при сохранении плотности (по прямой, параллельной оси ординат). Повторное нагружение описывается движением изображающей точки вверх по  $BB_1$  до точки  $B$  и при продолжающемся нагружении — по ветви  $BD$ . Каждое из контактирующих полупространств описывается подобной диаграммой сжатия; обе диаграммы отличаются одна от другой лишь количественными характеристиками. Как и в работе [2], предполагается, что падающая волна вызвана ударной нагрузкой, монотонно убывающей от начального значения (типичное свойство взрывной волны). Падающая волна обладает ударным фронтом, распространяющимся по невозмущенной среде, причем частицы за ударным фронтом находятся в режиме разгрузки. Такой характер падающей волны возможен в двух случаях

1. Падающая волна — упругая, напряжению на ударном фронте отвечает точка на отрезке  $OC$ .

2. Падающая волна — пластическая, напряжению на ударном фронте отвечает точка на ветви  $D_1D$  ( $\sigma_x > \sigma^*$ ), а напряжениям в частицах за фронтом — точки на отрезках, параллельных оси ординат.

Описанный характер падающей волны при определенных условиях влечет за собой аналогичный характер в отраженной и преломленной (проходящей) волнах. При этом возможны такие случаи.

	Падающая волна	Отраженная волна	Преломленная волна
1	Пластическая	Пластическая	Пластическая
2	»	»	Упругая
3	Упругая	»	Пластическая
4	»	»	Упругая
5	»	Упругая	Пластическая
6	»	»	Упругая

Случай 6 хорошо известен в теории упругости. В настоящей работе рассмотрены только случаи 1 и 2. Аналогично могут быть рассмотрены случаи 3, 4, 5. Задача заключается в том, чтобы дать количественное описание падающей, отраженной и преломленной волн (в частности, найти коэффициенты отражения и преломления), а также условия реализации поименованных частных случаев.

§ 1. Напряжение  $\sigma_x$  и деформацию  $\epsilon_x$  будем обозначать в дальнейшем  $\sigma$  и  $\epsilon$  соответственно, считая напряжение сжатия и деформацию сжатия положительными. Пусть диаграмма сжатия в полупространстве, где распространяется падающая волна, задана зависимостью

$$\sigma = \sigma^0 f(\epsilon), \quad \sigma^0 > 0$$

Рассматриваем задачу в лагранжевых координатах  $h, t$ , причем

$$x(h, t) = h + u(h, t)$$

где  $u$  — смещение,  $x$  — эйлерова координата. В плоскости  $h = 0$  задана внешняя нагрузка  $\sigma = \sigma_0(t)$ , причем  $\sigma_0(0) \equiv \sigma_0 \neq 0$ ; функция  $\sigma_0(t)$  — монотонно убывающая. Если  $\sigma_0$  достаточно велико, то частицы за ударным фронтом находятся в режиме пластической разгрузки с постоянной плотностью. В таком случае имеют место уравнения

$$\frac{\partial \sigma}{\partial h} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial h} = \frac{\rho_0}{\rho(h)} \quad (1.1)$$

Здесь  $\rho_0$  — начальная плотность,  $\rho$  — плотность частиц за фронтом падающей волны ( $\rho > \rho_0$ ). Из (1.1) получаем

$$x(h, t) = \int_0^h \frac{\rho_0 d\eta}{\rho(\eta)} + x_0(t), \quad v(h, t) = \frac{\partial x}{\partial t} = x_0'(t) \quad (1.2)$$

$$\sigma(h, t) = -\rho_0 x_0''(t) h + \sigma_0(t) \quad (1.3)$$

На ударном фронте (звездочками отмечены значения, относящиеся к ударному фронту)

$$v_* = \epsilon_* h_*', \quad \sigma_* = \rho_0 \epsilon_* h_*'^2 \quad (1.4)$$

Исключая  $v_*$  и  $\sigma_*$  из (1.3), (1.4) после интегрирования получаем

$$\epsilon_* h_* h_*' = \int_0^t \frac{\sigma_0(\tau) e\tau}{\rho_0} = F(t) \quad (1.5)$$

Сопоставляя второе из уравнений (1.4) с законом сжатия, имеем

$$\rho_0 \varepsilon_* h_*'^2 = \sigma^\circ f(\varepsilon_*), \quad h_*'^2 = \frac{\sigma^\circ}{\rho_0} \frac{f(\varepsilon_*)}{\varepsilon_*} \quad (1.6)$$

Если точка, изображающая напряжение на ударном фронте, лежит на ветви  $D_2D$  (фиг. 1), то

$$j'(\varepsilon_*) \geq \frac{f(\varepsilon_*)}{\varepsilon_*}$$

Это значит, что

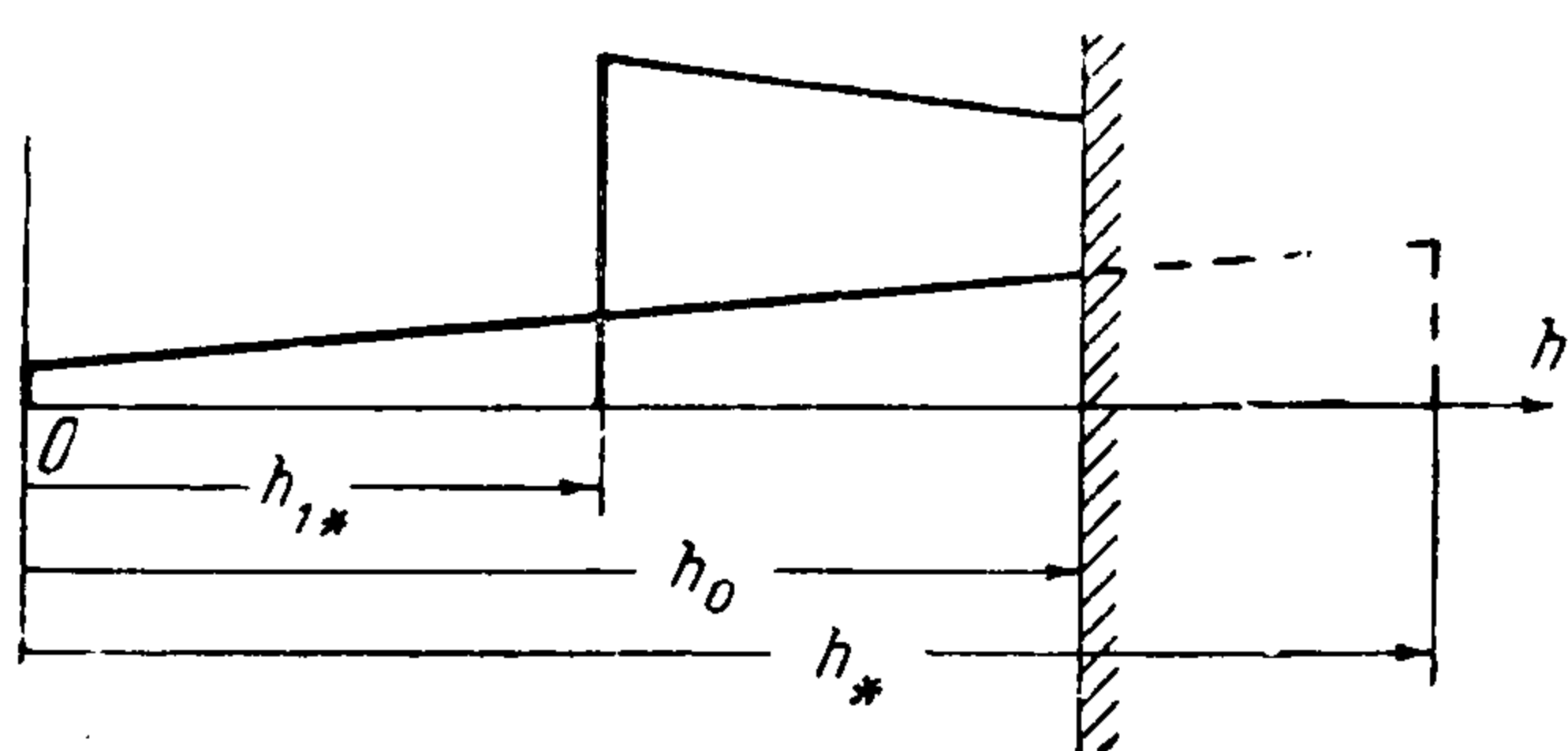
$$\frac{d}{d\varepsilon} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon f'(\varepsilon) - f(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \geq 0$$

т. е. что функция  $f(\varepsilon) / \varepsilon$  монотонно возрастающая. Следовательно, уравнение (1.6) однозначно разрешимо относительно  $\varepsilon_*$ , и существует монотонно возрастающая функция  $\varphi(\varepsilon_*)$

$$\varepsilon_* = \varphi(h_*')$$

которая является решением уравнения (1.6).

В результате получаем дифференциальное уравнение 1-го порядка для



Фиг. 2

определения лагранжевой координаты  $h_*(t)$  фронта

$$h_*' \varphi(h_*') h_* = \int_0^{\sigma_0(\tau)} \frac{d\tau}{\rho_0} \quad (1.7)$$

которое надо интегрировать при начальном условии  $h_*(0) = 0$ .

## § 2. Рассмотрим отраженную волну,

предполагая, что она имеет удар-

ный фронт, напряжение на котором при отражении повышается. Условием этого является требование, чтобы вторая среда была «более жесткой». Точный смысл такого требования выяснится далее. Величины, относящиеся к отраженной волне, отмечаем индексом 1. Отраженная волна строится так же, как в [2], где предполагается частный вид диаграммы сжатия.

Во избежание повторений на подробностях здесь не останавливаемся, отсылая читателя к цитированной работе.

Расположение фронтов в некоторый момент после отражения показано на фиг. 2. Здесь  $h_0$  означает расстояние от начальной плоскости до границы раздела,  $h_*$  — расстояние до фронта падающей волны в том случае, если бы эта волна продолжала распространяться, не встречая границы раздела. Для отраженной волны, как и для падающей, имеем

$$\sigma_1(h, t) = -\rho_0 v_1'(t) (h - h_0) + \sigma_1(h_0, t)$$

$$x_1(h, t) = \int_0^h \frac{\rho_0 d\eta}{\rho(\eta)} + x_{10}(t), \quad v_1(h, t) = \frac{\partial x_1}{\partial t} = x_{10}'(t) \quad (2.1)$$

На ударном отраженном фронте (см. [2])

$$v_{1*} - v = -[\varepsilon_1(h_{1*}) - \varepsilon(h_{1*})] h_{1*}', \quad \sigma_b - \sigma_{1*} = -\rho_0 [v_{1*}(t) - v(t)] h_{1*}'$$

Здесь  $\sigma_b(h)$  — напряжение, которое имело место в частице с координатой  $h$ , когда через эту частицу проходил фронт падающей волны.

Закон сжатия для напряжения на ударном фронте имеет вид

$$\sigma_{1*} = \sigma^{\circ} f [\varepsilon_1(h_{1*})] \quad (2.3)$$

Исключая  $\varepsilon_{1*}$  и  $\sigma_{1*}$  из уравнений (2.2), (2.3), получим соотношение

$$\frac{1}{f[\varepsilon(h_{1*})]} f\{\varepsilon(h_{1*}) [1 - \beta (\varepsilon(h_*) h_*' / \varepsilon(h_{1*}) h_{1*}')]\} = 1 - \beta \frac{f[\varepsilon(h_*)] h_{1*}'}{f[\varepsilon(h_{1*})] h_*'} \quad (2.4)$$

$$\left( \beta = 1 - \frac{v_{1*}(t)}{v(t)} \right)$$

Так как скорость частиц в отраженной волне не зависит от координаты, то она одинакова как на фронте, так и на границе раздела. Обозначая скорость граничных точек через  $V(t)$ , имеем  $v_{1*}(t) = V(t)$ . Уравнение (2.4) содержит неизвестные функции  $h_{1*}$  и  $V(t)$ . Относительно  $h_{1*}(t)$  это уравнение есть нелинейное дифференциальное уравнение 1-го порядка (обобщение уравнения (3.9) работы [2]). Предполагая

$$|\delta| = \left| \beta \frac{h_*'}{h_{1*}'} \varepsilon(h_{1*}) \right| \ll 1$$

что подсказывается физическими соображениями, можно заменить уравнение (2.4) приближенным, разлагая функцию  $f[\varepsilon(h_{1*}) - \delta]$  в степенной ряд и сохраняя два члена этого ряда. Тогда получаем уравнение

$$\frac{dh_*}{(f[\varepsilon(h_*)] / \varepsilon(h_*))^{1/2}} = \frac{-dh_{1*}}{(f'[\varepsilon(h_{1*})])^{1/2}} \quad (2.5)$$

Заметим, что в этом приближении зависимость от  $V(t)$  из уравнения выпала, что можно объяснить сравнительно малым влиянием скорости граничных частиц на распространение ударного фронта отраженной волны. Рассматривается случай

$$\frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} \ll f'(\varepsilon), \quad f'[\varepsilon(h_*)] < f'[\varepsilon(h_{1*})], \quad h_*' < h_{1*}'$$

Это означает, что отраженный фронт распространяется с большей скоростью, чем падающий (фиктивный). В частности, это справедливо и для момента начала отражения ( $h_* = h_{1*} = h_0$ ). Заметим, что здесь отраженной волной называется все движение, появившееся в результате отражения, а не добавочная его часть по отношению к падающей волне, как принято считать в линейной теории упругости и акустике.

§ 3. Для полного решения задачи надо составить второе уравнение, содержащее неизвестную функцию  $V(t)$ . Для этого надо рассмотреть волну, проходящую во вторую среду (преломленную волну). Рассмотрим случай, когда преломленная волна — упругая (случай 2). Тогда имеем

$$u_2(h, t) = F(a_2 t - h + h_0), \quad \sigma_2(h, t) = a_2^2 \rho_2 F'(a_2 t - h + h_0)$$

$$v_2(h, t) = a_2 F'(a_2 t - h + h_0) \quad (3.1)$$

На плоскости контакта должны выполняться условия непрерывности

$$v_1(t) = v_2(h_0, t) = V(t), \quad \sigma_1(h_0, t) = \sigma_2(h_0, t) \quad (3.2)$$

Эти два условия и второе из соотношений (2.2) позволяют исключить функцию  $F$  и напряжение  $\sigma_{1*}$ ; получаем уравнение для  $V(t)$

$$\rho(h_{1*} - h_0) V'(t) - (a_2 \rho_2 - \rho_0 h_{1*}') V(t) = \rho_0 v h_{1*}' - \sigma_b \quad (3.3)$$

Это — линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка. В момент отражения коэффициент  $\rho_0 (h_{1*} - h_0)$  при производной обращается в нуль; это обуславливает неограниченный характер общего решения однородного уравнения. Действительно, если принять, что момент падения волны на границу  $t = 0$ , то для малых  $t > 0$  имеем

$$h_{1*} - h_0 = -a_1 t + \dots$$

$$-\rho_0 a_1 t V'(t) - (a_2 \rho_2 + a_1 \rho_0) V(t) = -\rho_0 v(0) a_1 - \sigma_b + \dots$$

Решение можно искать в виде

$$V(t) = Ct^\alpha + V_0 + \dots \quad (3.4)$$

Здесь  $C$ ,  $V_0$ ,  $\alpha$  — константы, а первое слагаемое правой части есть общее решение однородного уравнения. Для  $\alpha$  и  $V_0$  получаем значения

$$\alpha = -1 - \frac{a_2 \rho_2}{a_1 \rho_0}, \quad V_0 = \frac{\rho_0 v(0) a_1 + \sigma_b}{a_2 \rho_2 + a_1 \rho_0} \quad (3.5)$$

Так как  $\alpha < 0$ , то общее решение неограниченно при  $t \rightarrow 0$ , и в качестве начального условия при интегрировании уравнения (3.4) надо поставить условие ограниченности решения при  $t \rightarrow 0$ . Константа  $V_0$  есть начальное значение скорости точек границы (если волна падает на преграду, то начальное значение скорости преграды равно нулю), выраженное через пока неизвестную начальную скорость  $a_1$  отраженной волны.

§ 4. Рассмотрим подробнее частную задачу, в которой падающая волна имеет вид «ступени». Этот случай интересен еще и потому, что описывает асимптотически явление отражения в его начальной стадии при падении ударной волны общего вида. Если падающая волна имеет вид ступени, то анализ явления значительно упрощается, так как параметры волны за фронтом постоянны. Итак, в падающей волне за фронтом

$$\varepsilon(h) = \varepsilon_0, \quad v(t) = v_0, \quad \sigma_b = \sigma_0(0) = \rho_0 v_0 a, \quad a > 0, \quad h_*'(t) = a$$

Попробуем удовлетворить всем условиям задачи, предположив, что и в отраженной, и в преломленной волнах параметры также постоянны

$$\varepsilon_1(h) = \varepsilon_1, \quad v_1(t) = v_1, \quad h_{1*}'(t) = -a_1, \quad a_1 > 0$$

$$h_{1*} - h_0 = -a_1 t$$

$$\varepsilon_2(h, t) = \varepsilon_2, \quad v_2(h, t) = v_2, \quad h_{2*}'(t) = a_2, \quad a_2 > 0$$

Уравнение (3.4) примет вид

$$f\left[\varepsilon_0 \left(1 + \beta \frac{a}{a_1}\right)\right] = f(\varepsilon_0) \left\{1 + \beta \frac{a_1}{a}\right\}, \quad \beta = 1 - \frac{V}{v} = \text{const} \quad (4.1)$$

Чтобы решить это уравнение приближенно, положим  $\beta a / a_1 = \sigma$ .

Тогда уравнение (4.1) переписется

$$\left(\frac{a_1}{a}\right)^2 = \frac{f(\varepsilon_0 + \varepsilon_0 \sigma) - f(\varepsilon_0)}{\sigma f(\varepsilon_0)}$$

Разложение в ряд правой части по степеням  $\sigma \varepsilon_0$  позволяет представить зависимость  $a_1 / a$  от  $\beta$  в следующей параметрической форме: (4.2)

$$\frac{a_1}{a} = \left\{ \frac{f'(\varepsilon_0) \varepsilon_0}{f(\varepsilon_0)} + \frac{f''(\varepsilon_0) \varepsilon_0^2}{2f(\varepsilon_0)} \sigma + \dots \right\}^{1/2}, \quad \beta = \sigma \left\{ \frac{f'(\varepsilon_0) \varepsilon_0}{f(\varepsilon_0)} + \frac{f''(\varepsilon_0) \varepsilon_0^2}{2f(\varepsilon_0)} \sigma + \dots \right\}^{1/2}$$

В уравнениях (4.2) величина  $\sigma$  играет роль параметра. Сохранение только одного первого члена ряда дает тот же результат, что и уравнение (2.5), а именно

$$\frac{a_1}{a} = \left( \frac{f'(\epsilon_0)}{f(\epsilon_0)/\epsilon_0} \right)^{1/2} \quad (4.3)$$

Обратимся к уравнению (3.4). Для ограниченного решения в виде константы получим

$$V_0 = \frac{\sigma_b + \rho_0 v_0 a_1}{a_2 \rho_2 + a_1 \rho_0} = \frac{r_0 \rho_0 (a + a_1)}{a_2 \rho_2 + \rho_0 a_1} \quad (4.4)$$

Это значение граничной скорости позволяет вычислить граничное напряжение в преломленной волне

$$\sigma_2(h_0, t) = \rho_2 a_2 v_2 = \frac{\rho_0 v_0 a (1 + a_1/a)}{1 + \rho_0 a_1 / \rho_2 a_2} \quad (4.5)$$

По условию (3.3) такое же значение имеет напряжение в отраженной волне.

Целесообразно ввести понятие коэффициента отражения (преломления), понимая под этим отношение напряжения в падающей волне к напряжению в отраженной (преломленной). Для ступенчатой волны это отношение не зависит от времени; для произвольной — оно будет относиться к моменту падения ( $t = 0$ ) и должно вычисляться по той же формуле, что и для ступенчатой волны (предполагая, что падающая волна — ударная). Обозначим коэффициент отражения (преломления) через  $K$ . Тогда ?

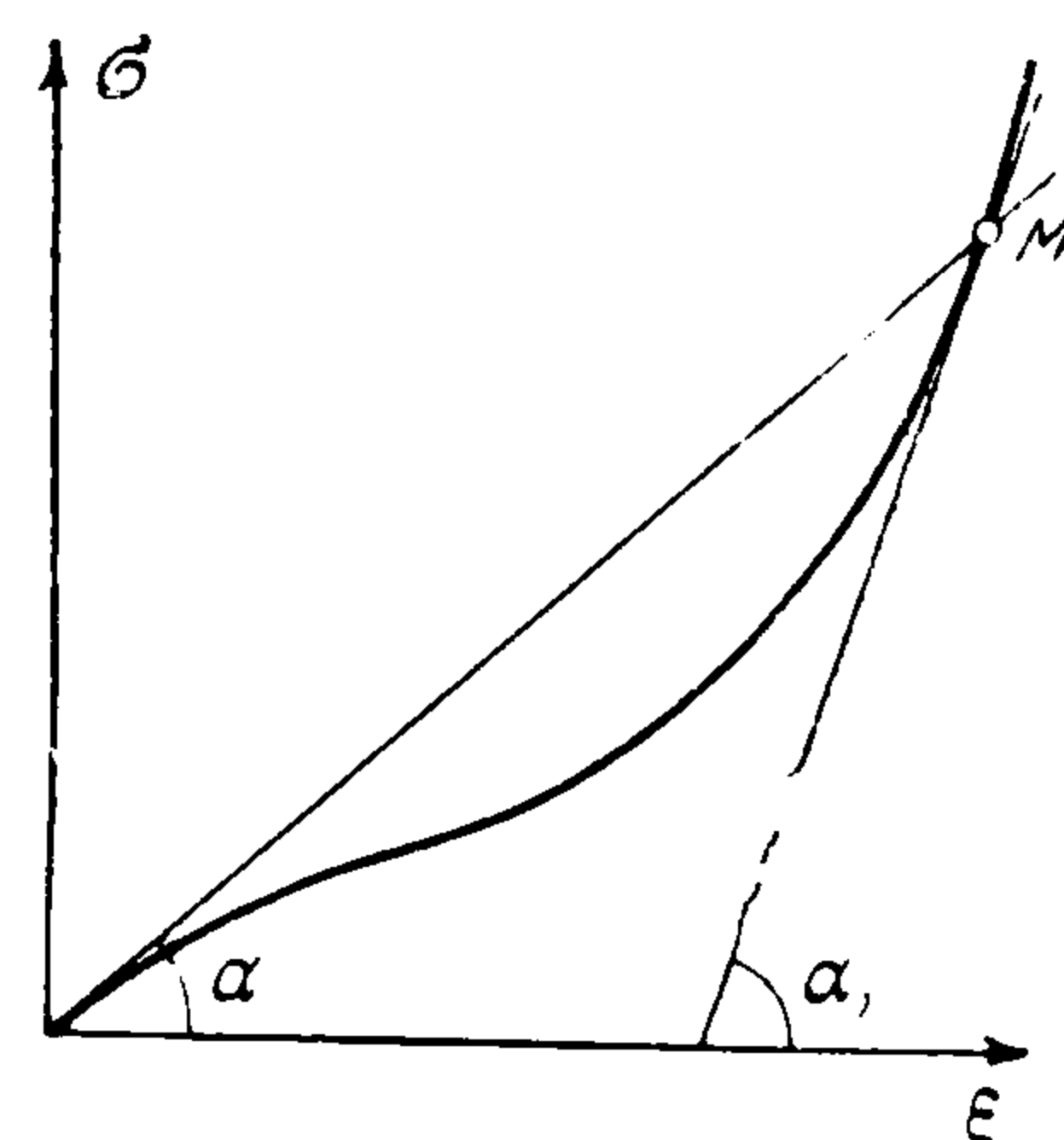
$$K = \frac{\sigma_1(h_0, t)}{\sigma_b} = \frac{1 + a_1/a}{1 + \rho_0 a_1 / \rho_2 a} \quad (4.6)$$

Эта формула показывает, что коэффициент отражения существенно зависит от отношения  $a_1/a$ . Равным образом  $K$  зависит от отношения  $a/a_2$ . В частности, если вторая среда бесконечно жесткая ( $a_2 = \infty$ ), то явление превращается в отражение от неподвижной стенки, и коэффициент отражения в этом случае приобретает значение

$$K = 1 + a_1/a \quad (4.7)$$

Отношение  $a_1/a$ , согласно формуле (4.3), определяется диаграммой сжатия и может быть интерпретировано геометрически. Действительно, это отношение можно представить

$$\frac{a_1}{a} = \frac{f'(\epsilon_0)}{f(\epsilon_0)/\epsilon_0} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha}$$



Фиг. 3

где углы  $\alpha$  и  $\alpha_1$  показаны на фиг. 3.

Зависимость коэффициента отражения от интенсивности падающей волны также определяется диаграммой сжатия. Приведем некоторые примеры.

1. Пусть на рассматриваемом участке диаграмма сжатия аналитически описывается степенным законом  $f(\epsilon) = \epsilon^n$ . Тогда

$$a_1/a = \sqrt[n]{n}, \quad K = 1 + \sqrt[n]{n}$$

В данном случае коэффициент отражения не зависит от интенсивности падающей волны, как было отмечено в работе [2].

2. Другой результат получается в случае, когда при  $A/B < \varepsilon$

$$f(\varepsilon) = B\varepsilon - A, \quad B > 0, \quad A > 0, \quad K = 1 + \left( \frac{B}{B - A/\varepsilon} \right)^{1/2}$$

Как видим, коэффициент отражения убывает с возрастанием интенсивности падающей волны.

3. Наконец, пусть

$$f(\varepsilon) = \frac{m}{(\varepsilon^\circ - \varepsilon)^p}, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon^\circ, \quad m > 0, \quad p > 0$$

Тогда

$$K = 1 + \left( \frac{p}{\varepsilon^\circ/\varepsilon - 1} \right)^{1/2}$$

и коэффициент отражения возрастает с ростом интенсивности падающей волны.

В заключение следует отметить условия реализации рассмотренного случая отражения. Помимо требования, чтобы падающая волна была ударной, надо еще, чтобы преломленная волна находилась в упругой области, т. е. чтобы граничное напряжение во второй среде

$$\rho_0 v_0 a \frac{1 + a_1/a}{1 + \rho_0 a_1 / \rho_2 a_2}$$

было ниже соответствующего предела упругости, а отраженная волна была интенсивнее падающей, т. е.  $K > 1$ . Последнее условие приводит к неравенству  $a_2 \rho_2 > a \rho_0$ , которое означает, что акустическая жесткость упругой среды должна быть больше «эффективной» акустической жесткости первой среды.

§ 5. Перейдем теперь к случаю, когда и преломленная волна пластическая (случай 1, стр. 3). Уравнение (3.4) остается при этом в силе, поскольку в нем свойства второй среды отражаются только на значении скорости  $V(t)$  граничных точек, а эта скорость участвует в уравнении (2.4), как неизвестная величина. По сравнению с предыдущим, изменение претерпит уравнение (3.4).

Для преломленной волны, как и для падающей (§ 1) получим

$$\sigma_2(h, t) = -\rho_2 v_2^* (h - h_0) + \sigma_2(h_0, t) \quad (5.1)$$

Для отраженной волны имеем

$$\sigma_1(h, t) = -\rho_0 v_1^* (h - h_0) + \sigma_1(h_0, t) \quad (5.2)$$

Для значений этих напряжений на ударных волнах преломленной и отраженной соответственно получим

$$\sigma_2(h_{2*}, t) = -\rho_2 v_2^* (h_{2*} - h_0) + \sigma_2(h_0, t) = \rho_2 v_{2*} h_{2*}' \quad (5.3)$$

$$\sigma_1(h_{1*}, t) = -\rho_0 v_1^* (h_{1*} - h_0) + \sigma_1(h_0, t) = \rho_0 v_{1*} h_{1*}' + \sigma_b - \rho_0 v h_{1*}' \quad (5.4)$$

На границе раздела сред ( $h = h_0$ ) имеют место граничные условия

$$v_1(h_0, t) = v_2(h_0, t), \quad \sigma_1(h_0, t) = \sigma_2(h_0, t) \quad (5.5)$$

Так как функции  $v_1$  и  $v_2$  от  $h$  не зависят, то условие (5.5) превращается в соотношение

$$v_1(t) = v_2(t) = V(t) \quad (5.6)$$

где  $V(t)$  — скорость частиц границы раздела.

Учитывая (5.6) и (5.5), вычитая (5.4) из (5.3), получаем следующее уравнение, дифференциальное относительно  $V(t)$ :

$$[\rho_2 (h_{2*} - h_0) - \rho_0 (h_{1*} - h_0)] V'(t) + (\rho_2 h_{2*}' - \rho_0 h_{1*}') V(t) = \sigma_b - \rho_0 v h_{1*}' \quad (5.7)$$

Это уравнение появляется в новой задаче вместо уравнения (3.4).

Для малых положительных значений времени имеем

$$h_{1*} - h_0 = -a_1 t + \dots, \quad h_{2*} - h_0 = a_2 t + \dots$$

и уравнение (5.7) в этих условиях запишется так:

$$(\rho_2 a_2 + \rho_0 a_1) t V'(t) + (\rho_2 a_2 + \rho_0 a_1) V(t) = \sigma_b - \rho_0 v h_{1*}'$$

Соответствующее однородное уравнение имеет общее решение  $V(t) = ct^{-1}$ , откуда следует, что требование ограниченности решения уравнения (5.7) в окрестности  $t=0$  заставляет положить  $c=0$ .

Для решения задачи надо составить еще одно уравнение. На фронте преломленной волны, которая распространяется, согласно предположению, по невозмущенной среде, имеют место условия

$$v_{2*} = \varepsilon_{2*} h_{2*}', \quad \sigma_{2*} = \rho_2 \varepsilon_{2*} h_{2*}'^2$$

Отсюда находим

$$\varepsilon_{2*} = \frac{\sigma_{2*}}{\rho_2 h_{2*}'^2}$$

или, принимая во внимание закон сжатия во второй среде,  $\sigma_2 = \sigma_2^\circ f_2(\varepsilon_2)$ , окончательно получим

$$h_{2*}'^2 = \frac{\sigma_2^\circ}{\rho_2} \frac{f_2(\varepsilon_{2*})}{\varepsilon_{2*}} \quad (5.8)$$

Заменяя  $\varepsilon_{2*}$  по формуле

$$\varepsilon_{2*} = \frac{v_{2*}}{h_{2*}'} = \frac{V(t)}{h_{2*}'}$$

получаем уравнение

$$\frac{f_2(V/h_{2*}')}{V/h_{2*}'} = \frac{\rho_2 h_{2*}'^2}{\sigma_2^\circ} \quad (5.9)$$

Если функцию, обратную для  $\varepsilon^{-1}[f'(\varepsilon)]^2 = \eta$ , обозначить через  $\varepsilon = \varphi(\eta)$ , то (6.10) можно заменить уравнением

$$\frac{V}{h_{2*}'} = \varphi_2 \left( \frac{\rho_2}{\sigma_2^\circ} h_{2*}'^2 \right) \quad (5.10)$$

Задача, поставленная в начале § 5, сводится к решению трех совместных уравнений (2.4), (5.7), (5.9) (или 5.10). Эти уравнения содержат три неизвестные функции времени —  $h_{1*}$ ,  $h_{2*}$ ,  $V$ . При произвольном законе сжатия придется прибегать к численному решению, предваряемому качественным исследованием указанных уравнений. Уравнение (2.4) может быть и здесь, конечно, заменено приближенным уравнением (2.5).

Остановимся подробнее на частном случае, когда падающая волна имеет вид «ступени». При этом отраженная и преломленная волны будут иметь такой же вид. Сохраняя обозначения § 4, для определения трех неизвестных констант  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $V_0$  получим три конечных уравнения

$$f \left[ \varepsilon_0 \left( 1 + \beta \frac{a}{a_1} \right) \right] = f(\varepsilon_0) \left( 1 + \beta \frac{a_1}{a} \right), \quad V_0 = \frac{\rho_0 v_0 (a + a_1)}{a_1 \rho_0 + a_2 \rho_2}, \quad \frac{f_2(V_0/a_2)}{V_0/a_2} = \frac{\rho_2 a_2^2}{\sigma_2^\circ} \quad (5.11)$$

где

$$\beta = 1 - \frac{V_0}{v_0}, \quad a = \left( \frac{\sigma^\circ}{\rho_0} \right)^{1/2} \left( \frac{f(\varepsilon_0)}{\varepsilon_0} \right)^{1/2}, \quad v_0 = \left( \frac{\sigma^\circ}{\rho_0} \right)^{1/2} \sqrt{\varepsilon_0 f(\varepsilon_0)} \quad (5.12)$$

Первое уравнение (5.11) может быть заменено более простым приближенным (4.3).

Для коэффициента отражения получаем прежнюю общую формулу (4.6), в которой теперь константа  $a_2$  не является заранее заданной. Для определения этой константы используем второе уравнение (5.11). Получаем уравнение

$$\frac{\rho_0 v_0 (a + a_1)}{a_2 (\rho_0 a_1 + \rho_2 a_2)} = \Phi_2 \left( \frac{\rho_2}{\sigma_2^0} a_2^2 \right) \quad (5.13)$$

левая часть монотонно убывает относительно  $a_2$ , а правая — монотонно возрастает. Поэтому уравнение (5.13) имеет единственное решение, определяющее скорость фронта преломленной волны.

Выясним, как влияют на отражение пластические свойства среды. Для этого сравним отражение от идеально-упругой среды, в которой скорость продольных волн есть  $(\sigma_2^0 / \rho_2)^{1/2}$ , с отражением от соответствующей пластической среды, когда явление протекает и в условиях, предусмотренных случаем 1 таблицы. При этом напряжение на ударной волне описывается участком диаграммы сжатия, для которого

$$\frac{f_2(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1 + \psi(\varepsilon)$$

где  $\psi(\varepsilon)$  — положительная функция. Поэтому

$$\frac{f_2(V/h_{2*}')}{V/h_{2*}'} = 1 + \psi\left(\frac{V}{h_{2*}'}\right) = \frac{\rho_2}{\sigma_2^0} h_{2*}'^2, \quad h_{2*}' > \left(\frac{\sigma_2^0}{\rho_2}\right)^{1/2}$$

Формула (4.6) показывает, что при переходе от идеально-упругой среды к среде пластической, в которой отражение происходит в условиях случая 1, коэффициент отражения повышается. Наконец, надо показать, что случай 1 может осуществиться. Он наступает, если имеют место три неравенства

$$\sigma_* > \sigma^*, \quad \sigma_{2*} > \sigma_2^*, \quad K > 1$$

где  $\sigma^*$  — напряжение, отвечающее точке  $D_1$  (фиг. 1),  $\sigma_2^*$  — соответствующее напряжение для второй среды. В подробной записи эти неравенства для волн в виде ступени (этого достаточно) имеют вид

$$\rho_0 v_0 a > \sigma^*, \quad \rho_2 V_0 a_2 = \rho_0 v_0 a K > \sigma_2^*, \quad \rho_0 a < \rho_2 a_2$$

Первое неравенство требует, чтобы падающая волна была достаточно интенсивной, что всегда можно предполагать. Второе неравенство при наличии третьего сводится к тому же. Остается показать, что осуществление третьего неравенства возможно для сколь угодно интенсивной падающей волны. Ограничимся при доказательстве этого предположения тем, что график функции  $f_2(\varepsilon)$  имеет вертикальную асимптоту  $\varepsilon = \varepsilon^*$  и что  $\rho_2 > \rho_0$ . Тогда график функции  $\varepsilon = \Phi_2(\eta)$  имеет горизонтальную асимптоту  $\varepsilon = \varepsilon^*$ , причем  $0 < \Phi_2 < \varepsilon^*$ .

Уравнение (5.13) можно переписать так

$$\frac{\rho_0 a + \rho_0 a_1}{\rho_2 a_2 + \rho_0 a_1} \frac{\rho_0 a}{\rho_2 a_2} \frac{\rho_2}{\rho_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \Phi_2 \left( \frac{\rho_2}{\sigma_2^0} a_2^2 \right) \quad (5.14)$$

Допустим, что найдется сколь угодно интенсивная падающая волна, для которой  $\rho_0 a \geq \rho_2 a_2$ . При этом левая часть уравнения окажется больше единицы, в то время как правая часть оценивается числом  $\varepsilon^* / \varepsilon_0$  и может быть сделана меньше единицы.

Все эти рассуждения показывают, что случай 1 заведомо осуществляется для достаточно интенсивной падающей волны.

Поступила 15 XII 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л я х о в Г. М. Основы динамики взрыва в грунтах и жидких средах. Изд. Недра, 1964.
2. З в о л и н с к и й Н. В., Р ы к о в Г. В. Отражение пластической волны от преграды. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.