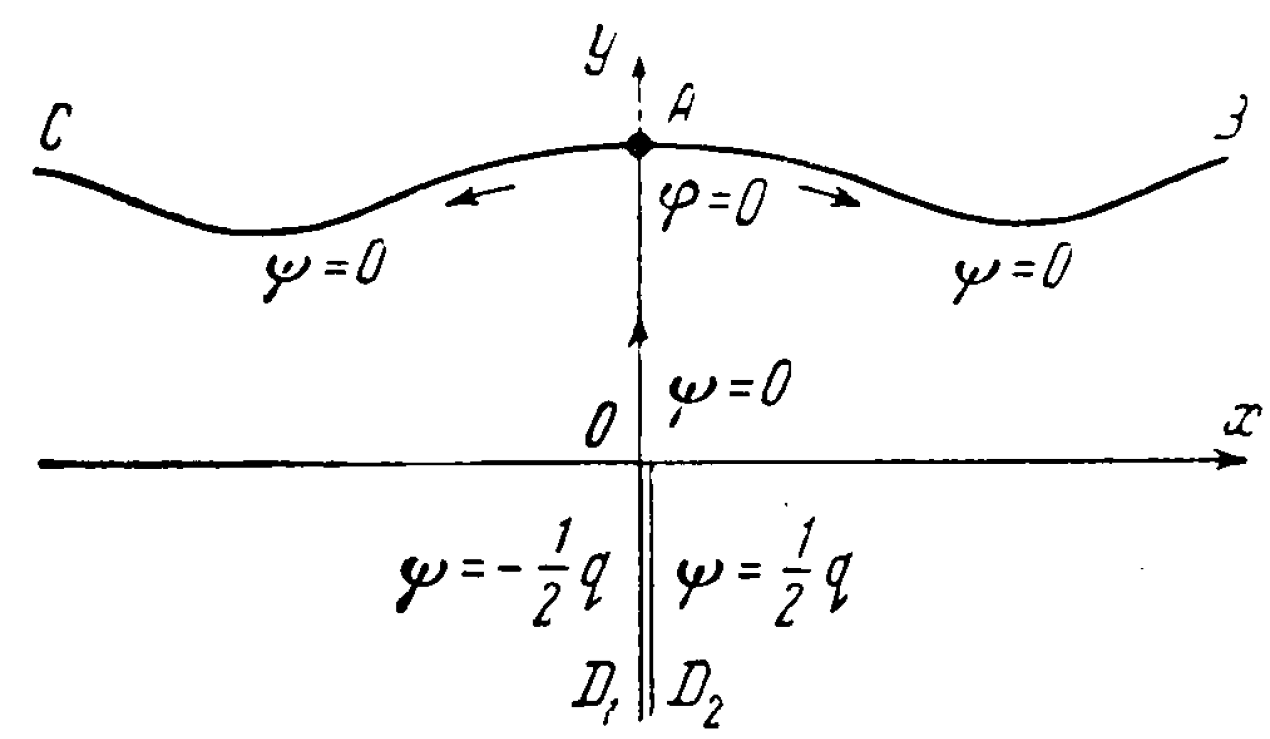
Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

ОБРАЗОВАНИЕ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ ИСТОЧНИКОМ ЖИДКОСТИ

Л. Н. Сретенский
(Москва)

§ 1. Рассмотрим плоскопараллельные потенциальные движения тяжелой жидкости бесконечной глубины, возникающие при действии источника постоянной интенсивности, находящегося под поверхностью жидкости. Поверхность жидкости, будучи горизонтальной при отсутствии действующего источника, покрывается волнами при наличии источника: имеется в виду определить вид этих волн, не считая их бесконечно малыми, но все же предполагая их достаточно малыми.

Допустим, что движение жидкости происходит в вертикальной плоскости x, O, y; начало координат возьмем в источнике жидкости, ось y проведем вертикально вверх; обозначим через A точку поверхности жидкости, находящуюся на оси y, через B и C — точки поверхности жидкости, лежащие на бесконечном расстоянии от A. Разрежем плоскость течения вдоль оси y от точки O до точки $y = -\infty$ и обозначим через D_1 и D_2 точки, находящиеся в бесконечности на двух сторонах разреза (фиг. 1).



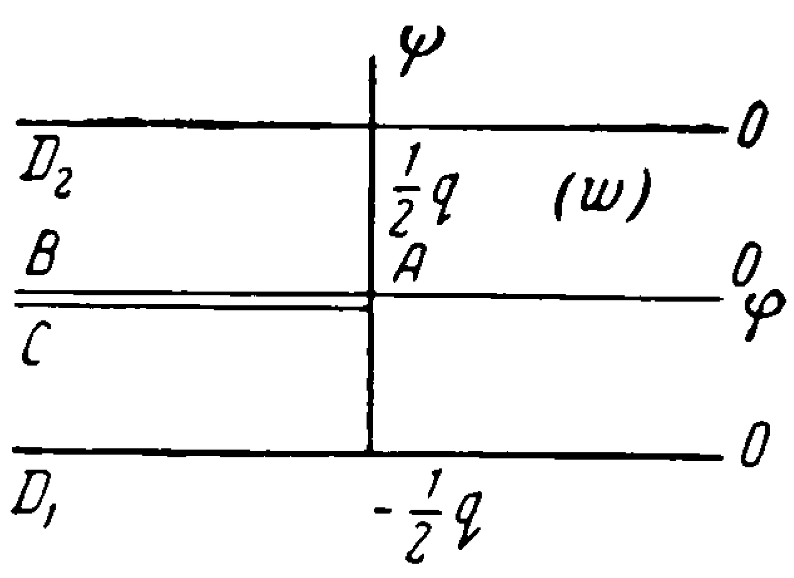
Фиг. 1

Линия тока, выходящая из точки O и идущая вдоль оси y от источника и до точки A, разделяется в этой точке на две симметричные части AB и AC; припишем этой линии тока нулевое значение функции тока ψ и допустим, что в точке A потенциал скоростей φ равен нулю. Линия тока, идущая из точки O вертикально вниз по разрезу, имеет два значения для своей функции тока; вдоль левой стороны разреза OD_1 имеем $\psi = -{}^1/_2 q$ вдоль правой стороны разреза OD_2 имеем $\psi = {}^1/_2 q$; здесь через q обозначен дебит источника.

Отобразим всю область потока $BACD_1OD_2B$, находящуюся на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, на плоскость $w = \varphi + i\psi$. На этой последней плоскости получим полосу ширины q, симметрично расположенную относительно оси φ и снабженную разрезом BAC, идущим вдоль отрицательной части этой оси (фиг. 2). Соответствующие точки плоскостей z и w обозначены одинаковыми буквами.

Функция, устанавливающая соответствие между фиг. 1 и 2, разумеется, неизвестна; в определении ее и будет заключаться задача.

Отобразим плоскость комплексного переменного w на плоскость вспомогательного переменного ζ, полагая



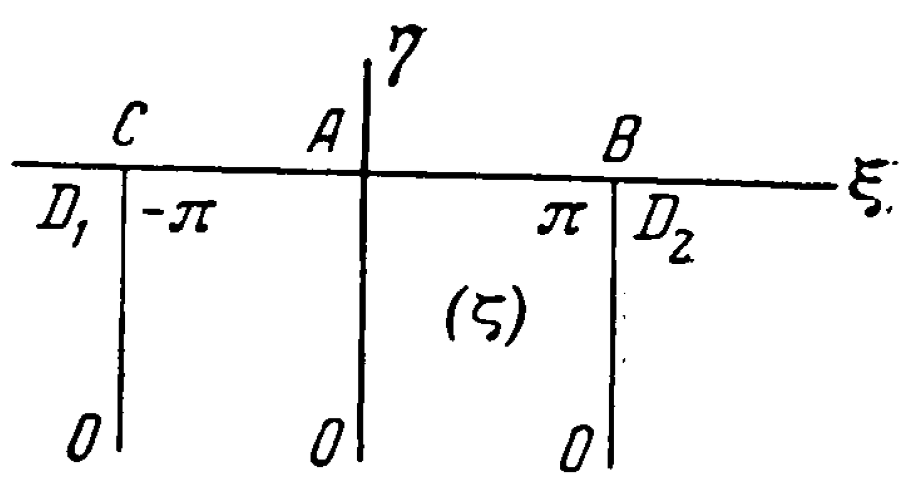
Фиг. 2

$$\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{q}{2\pi}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\zeta \tag{1.1}$$

На плоскости переменного ζ будем иметь вертикальную полуполосу, изображенную на фиг. 3. Отобразим, наконец, эту полуполосу на плоскость основного вспомогательного переменного u, полагая $u = e^{-i\zeta}$.

На плоскости переменного u будем иметь в качестве области, отвечающей всему потоку, идущему по плоскости z, круг с радиусом, равным единице и с разрезом вдоль прямой ($u = -1$, $u = 0$) (фиг. 4). Соответствующие точки плоскостей z, w, u обозначены одинаковыми буквами. При переходе от переменного ζ к переменному u формула (1.1) заменяется следующей

$$\frac{dw}{du} = -\frac{q}{2\pi u}\frac{1-u}{1+u} \tag{1.2}$$



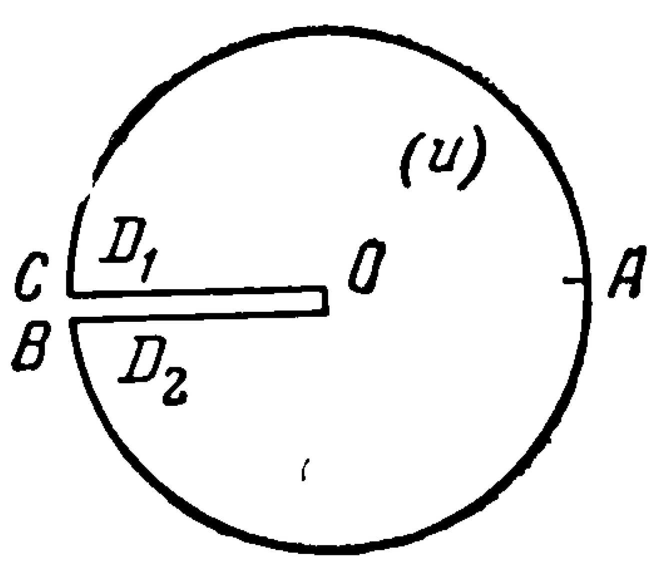
Фиг. 3

Установим теперь связь между комплексными переменными z и u.

Если бы на плоскости z не было источника, то соответствие между плоскостями z и ζ устанавливалось бы формулой

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{l}{8\pi}\frac{1}{\cos^2 {}^1/_2\zeta}$$

так как при отсутствии источника линия BAC была бы горизонтальной прямой; l — некоторая постоянная, связанная с расстоянием OA. При переходе к u последняя формула принимает вид



Фиг. 4

$$\frac{dz}{du} = \frac{il}{2\pi}\frac{1}{(u+1)^2}$$

Предположим, что при наличии источника связь между плоскостями z и u определяется формулой

$$\frac{dz}{du} = \frac{il}{2\pi}\frac{1}{(u+1)^2}\frac{1}{f(u)} \tag{1.3}$$

в которой $f(u)$ — неизвестная функция, голоморфная внутри круга $u \mid = 1$. Пусть разложение этой функции в ряд Маклорена будет

$$f(u) = 1 + b_1 u + b_2 u^2 + \ldots \tag{1.4}$$

В определении этой функции и состоит задача.

§ 2. Чтобы найти функцию $f(u)$, составим уравнение, которое передавало бы условие постоянства давления вдоль свободного уровня жидкости BAC. На основании интеграла Бернулли это условие запишется так:

$$V^2 + 2gy = \text{const} \tag{2.1}$$

Здесь V — скорость частицы жидкости на свободной поверхности жидкости в точке, имеющей ординату y.

Найдем по формулам предыдущего параграфа величины V и y. Имеем

$$\frac{dw}{dz} = \frac{iq}{l}\frac{1-u^2}{u}f(u)$$

Применим эту формулу к точкам поверхности жидкости, для которых $u = e^{i\theta}$, получим

$$\frac{dw}{dz} = \frac{iq}{l}(e^{-i\theta}-e^{i\theta})f(e^{i\theta}), \qquad \overline{\frac{dw}{dz}} = -\frac{iq}{l}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\overline{f(e^{i\theta})}$$

Перемножая почленно эти равенства, находим

$$V^2 = 2q^2l^{-2}(1-\cos 2\theta)f(e^{i\theta})\overline{f(e^{i\theta})} \tag{2.2}$$

Из формулы (1.3) получаем

$$\frac{dz}{d\theta} = -\frac{l}{4\pi}\frac{1}{1+\cos\theta}\frac{1}{f(e^{i\theta})}, \qquad \frac{d\bar z}{d\theta} = -\frac{l}{4\pi}\frac{1}{1+\cos\theta}\frac{1}{\overline{f(e^{i\theta})}} \tag{2.3}$$

Отсюда имеем

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{l}{8\pi}\frac{1}{1+\cos\theta}\left\{\frac{1}{f(e^{i\theta})}+\frac{1}{\overline{f(e^{i\theta})}}\right\}, \quad \frac{dy}{d\theta} = -\frac{l}{8\pi i}\frac{1}{1+\cos\theta}\left\{\frac{1}{f(e^{i\theta})}-\frac{1}{\overline{f(e^{i\theta})}}\right\}$$

Из формул (2.3) легко найти, что свойство симметрии поверхности жидкости относительно оси OY имеет своим следствием следующее свойство функции $f(u)$:

$$\overline{f(e^{i\theta})} = f(e^{-i\theta})$$

Отсюда вытекает, что все коэффициенты в разложении (1.4) суть действительные числа. Теперь можно переписать формулы (2.2) и (2.3) так:

$$V^2 = \frac{2q^2}{l^2}(1-\cos 2\theta)f(e^{i\theta})f(e^{-i\theta}), \quad \frac{dy}{d\theta} = -\frac{l}{8\pi i}\frac{1}{1+\cos\theta}\left\{\frac{1}{f(e^{i\theta})}-\frac{1}{f(e^{-i\theta})}\right\}$$

Продифференцируем основное уравнение (2.1) по переменному θ и запишем результат, используя предыдущие формулы; получим

$$\varepsilon\frac{d}{d\theta}[(1-\cos 2\theta)f(e^{i\theta})f(e^{-i\theta})] - \frac{1}{1+\cos\theta}\frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{f(e^{i\theta})}-\frac{1}{f(e^{-i\theta})}\right\} = 0$$
$$\left(\varepsilon = \frac{4\pi q^2}{gl^3}\right) \tag{2.4}$$

Это и есть основное уравнение рассматриваемой задачи; пользуясь этим уравнением, сможем найти коэффициенты разложения (1.4).

§ 3. Приступая к решению уравнения (2.4), укажем сначала некоторые вспомогательные формулы. Имеем

$$f(e^{i\theta}) = 1 + b_1e^{i\theta} + b_2e^{2i\theta} + b_3e^{3i\theta} + \ldots, \qquad f(e^{-i\theta}) = 1 + b_1e^{-i\theta} + b_2e^{-2i\theta} + b_3e^{-3i\theta} + \ldots$$

Отсюда получаем

$$f(e^{i\theta})f(e^{-i\theta}) = {}^1\!/_2B_0 + B_1\cos\theta + B_2\cos 2\theta + B_3\cos 3\theta + \ldots$$

где $B_0, B_1, B_2, B_3, \ldots$ определяются формулами

$$\begin{aligned} &{}^1\!/_2B_0 = 1 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + \ldots && {}^1\!/_2B_2 = b_2 + b_1b_3 + b_2b_4 + b_3b_5 + \ldots \\ &{}^1\!/_2B_1 = b_1 + b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_4 + \ldots && {}^1\!/_2B_3 = b_3 + b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6 + \ldots \\ &{}^1\!/_2B_4 = b_4 + b_1b_5 + b_2b_6 + b_3b_7 + \ldots && \text{и т. д.} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Далее имеем

$$\frac{d}{d\theta}\left[(1-\cos 2\theta)\, f(e^{i\theta})\, f(e^{-i\theta})\right] = -(B_1 - {}^1/_2\, B_1 - {}^1/_2\, B_3)\sin\theta +$$
$$-2(B_2 - {}^1/_2\, B_0 - {}^1/_2\, B_4)\sin 2\theta - 3(B_3 - {}^1/_2\, B_1 - {}^1/_2\, B_5)\sin 3\theta -$$
$$-4(B_4 - {}^1/_2\, B_2 - {}^1/_2\, B_6)\sin 4\theta - 5(B_5 - {}^1/_2\, B_3 - {}^1/_2\, B_7)\sin 5\theta - \ldots$$

Пользуясь этой формулой, получаем

$$(1+\cos\theta)\frac{d}{d\theta}\left[(1-\cos 2\theta)\, f(e^{i\theta})\, f(e^{-i\theta})\right] =$$
$$= ({}^1/_2\, B_1 + {}^1/_2\, B_0 - B_1 - B_2 + {}^1/_2\, B_3 + {}^1/_2\, B_4)\sin\theta +$$
$$+ ({}^1/_4\, B_1 + B_0 + {}^1/_4\, B_1 - 2B_2 - {}^5/_4\, B_3 + B_4 + {}^3/_4\, B_5)\sin 2\theta +$$
$$+ ({}^1/_2\, B_0 + {}^3/_2\, B_1 - 3B_3 - {}^3/_2\, B_4 + {}^3/_2\, B_5 + B_6)\sin 3\theta +$$
$$+ ({}^3/_4\, B_1 + 2B_2 - {}^1/_4\, B_3 - 4B_4 - {}^7/_4\, B_5 + 2B_6 + {}^5/_4\, B_7)\sin 4\theta +$$
$$+ (B_2 + {}^5/_2\, B_3 - {}^1/_2\, B_4 + 5B_5 - 2B_6 + {}^5/_2\, B_7 + {}^3/_2\, B_8)\sin 5\theta + \ldots \qquad (3.2)$$

Положим затем

$$1 / f(u) = 1 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + \ldots \qquad (3.3)$$

Коэффициенты этого разложения связаны с коэффициентами уравнениями (1.4)

$$b_1 + c_1 = 0, \quad b_3 + c_1 b_2 + c_2 b_1 + c_3 = 0, \quad b_4 + c_1 b_3 + c_2 b_2 + c_3 b_1 + c_4 = 0$$
$$b_2 + c_1 b_1 + c_2 = 0, \quad b_5 + c_1 b_4 + c_2 b_3 + c_3 b_2 + c_4 b_1 + c_5 = 0 \quad \text{и т. д.} \qquad (3.4)$$

Имеем

$$\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{f(e^{i\theta})} - \frac{1}{f(e^{-i\theta})}\right] = c_1\sin\theta + c_2\sin 2\theta + c_3\sin 3\theta + \ldots \qquad (3.5)$$

§ 4. Подставим разложения (3.2) и (3.5) в уравнения (2.4). Сравнивая коэффициенты при синусах различных кратных дуг, получаем

$$\begin{aligned}
c_1 &= \varepsilon\,[{}^1/_2\, B_1 + {}^1/_2\, B_0 - B_1 - B_2 + {}^1/_2\, B_3 + {}^1/_2\, B_4]\\
c_2 &= \varepsilon\,[{}^1/_4\, B_1 + B_0 + {}^1/_4\, B_1 - 2B_2 - {}^5/_4\, B_3 + B_4 + {}^3/_4\, B_5]\\
c_3 &= \varepsilon\,[{}^1/_2\, B_0 + {}^3/_2\, B_1 - 3B_3 - {}^3/_2 B_4 + {}^3/_2 B_5 + B_6]\\
c_4 &= \varepsilon\,[{}^3/_4\, B_1 + 2B_2 - {}^1/_4 B_3 - 4B_4 - {}^7/_4 B_5 + 2B_6 + {}^5/_4 B_7]\\
c_5 &= \varepsilon\,[B_2 + {}^5/_2 B_3 - {}^1/_2 B_4 - 5B_5 - 2B_6 + {}^5/_2 B_7 + {}^3/_2 B_8]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \qquad (4.1)$$

Присоединяя к этой системе уравнения (3.4), можем найти искомые коэффициенты $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots, c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$ Будем искать эти коэффициенты в виде рядов

$$b_1 = \varepsilon(b_{10} + b_{11}\varepsilon + b_{12}\varepsilon^2 + \ldots), \qquad b_2 = \varepsilon(b_{20} + b_{21}\varepsilon + b_{22}\varepsilon^2 + \ldots)$$
$$b_3 = \varepsilon(b_{30} + b_{31}\varepsilon + b_{32}\varepsilon^2 + \ldots), \qquad b_4 = \varepsilon(b_{40} + b_{41}\varepsilon + b_{42}\varepsilon^2 + \ldots) \quad \text{и т. д.}$$
$$c_1 = \varepsilon(c_{10} + c_{11}\varepsilon + c_{12}\varepsilon^2 + \ldots), \qquad c_2 = \varepsilon(c_{20} + c_{21}\varepsilon + c_{22}\varepsilon^2 + \ldots)$$
$$c_3 = \varepsilon(c_{30} + c_{31}\varepsilon + c_{32}\varepsilon^2 + \ldots), \qquad c_4 = \varepsilon(c_{40} + c_{41}\varepsilon + c_{42}\varepsilon^2 + \ldots) \quad \text{и т. д.}$$

Подстановка этих рядов в уравнения (3.4), (4.1) дает возможность найти их неизвестные коэффициенты. Сравнивая коэффициенты при различных степенях ε в обеих сторонах указанных уравнений, получаем следующие результаты:

$c_{10} = 1,$	$c_{11} = 4,$	$c_{50} = 0,$	$c_{71} = 0,$	$c_{12} = 32,$	$c_{52} = -169,$	$c_{92} = 14$
$c_{20} = 2,$	$c_{21} = {}^{19}/_2,$	$c_{60} = 0,$	$c_{81} = 0,$	$c_{22} = 79,$	$c_{62} = 31,$	$c_{102} = 0$
$c_{30} = 1,$	$c_{31} = 3,$	$c_{51} = -9,$	$c_{91} = 0,$	$c_{32} = -4,$	$c_{72} = 129$	$\ldots$
$c_{40} = 0,$	$c_{41} = -9,$	$c_{61} = -{}^5/_2,$		$c_{42} = -182,$	$c_{82} = {}^{147}/_2$	

Таким образом, можем написать разложение функции $1 / f(u)$ в ряд по степеням u с учетом всех членов до третьего порядка малости по параметру ε

$$\begin{aligned}
1 / f(u) = 1 &+ \varepsilon(1 + 4\varepsilon + 32\varepsilon^2 + \ldots)\,u + \varepsilon(2 + {}^{19}/_2\varepsilon + 79\varepsilon^2 + \ldots)\,u^2 +\\
&+ \varepsilon(1 + 3\varepsilon - 4\varepsilon^2 + \ldots)\,u^3 + \varepsilon(-9\varepsilon - 182\varepsilon^2 + \ldots)\,u^4 +\\
&+ \varepsilon(-9\varepsilon - 169\varepsilon^2 + \ldots)\,u^5 + \varepsilon(-{}^5/_2\varepsilon + 31\varepsilon^2 + \ldots)\,u^6 +\\
&+ \varepsilon(129\varepsilon^2 + \ldots)\,u^7 + \varepsilon({}^{147}/_2\varepsilon^2 + \ldots)\,u^8 + \varepsilon(14\varepsilon^2 + \ldots)\,u^9 + \ldots
\end{aligned} \qquad (4.2)$$

§ 5. Подстановка ряда (4.2) в формулу (1.3) дает следующий результат:

$$\frac{2\pi}{il}\frac{dz}{du}=\frac{1-{}^1/_2\varepsilon^2}{(u+1)^2}+\frac{1}{2}\varepsilon^3+[(\varepsilon+4\varepsilon^2+31\varepsilon^3)u+({}^3/_2\varepsilon^2+{}^{33}/_2\varepsilon^3)u^2+$$
$$+(-4\varepsilon^2-68\varepsilon^3)u^3+(-{}^5/_2\varepsilon^2-{}^{125}/_2\varepsilon^3)u^4+24\varepsilon^3u^5+{}^{91}/_2\varepsilon^3u^6+14\varepsilon^3u^7]$$

Отсюда имеем с точностью до третьих степеней ε

$$z=\frac{il}{2\pi}\int\limits_0^u\frac{1}{(u+1)^2}\frac{du}{f(u)}=\frac{il}{2\pi}\Big[-\frac{1-{}^1/_2\varepsilon^2}{1+u}+(1-{}^1/_2\varepsilon^2)+{}^1/_2\varepsilon^3u+$$
$$+{}^1/_2(\varepsilon+4\varepsilon^2+31\varepsilon^3)u^2+{}^1/_2(\varepsilon^2+11\varepsilon^3)u^3-(\varepsilon^2+17\varepsilon^3)u^4-$$
$$-{}^1/_2(\varepsilon^2+25\varepsilon^3)u^5+4\varepsilon^3u^6+{}^{13}/_2\varepsilon^3u^7+{}^7/_4\varepsilon^3u^8+\ldots\Big]$$

Полагая здесь $u=e^{i\theta}$ и отделяя мнимую часть от действительной, находим параметрическое уравнение поверхности жидкости

$$2\pi x/l=-{}^1/_2(1-{}^1/_2\varepsilon^2)\operatorname{tg}{}^1/_2\theta-{}^1/_2\varepsilon^3\sin\theta-{}^1/_2(\varepsilon+4\varepsilon^2+31\varepsilon^3)\sin 2\theta-$$
$$-{}^1/_2(\varepsilon^2+11\varepsilon^3)\sin 3\theta+(\varepsilon^2+17\varepsilon^3)\sin 4\theta+{}^1/_2(\varepsilon^2+25\varepsilon^3)\sin 5\theta-4\varepsilon^3\sin 6\theta-$$
$$-{}^{13}/_2\varepsilon^3\sin 7\theta-{}^7/_4\varepsilon^3\sin 8\theta+\ldots$$
$$2\pi y/l={}^1/_2(1-{}^1/_2\varepsilon^2)+{}^1/_2\varepsilon^3\cos\theta+{}^1/_2(\varepsilon+4\varepsilon^2+31\varepsilon^3)\cos 2\theta+{}^1/_2(\varepsilon^2+11\varepsilon^3)\cos 3\theta-$$
$$-(\varepsilon^2+17\varepsilon^3)\cos 4\theta-{}^1/_2(\varepsilon^2+25\varepsilon^3)\cos 5\theta+4\varepsilon^3\cos 6\theta+{}^{13}/_2\varepsilon^3\cos 7\theta+{}^7/_4\varepsilon^3\cos 8\theta+\ldots$$

Положим во втором из этих уравнений $\theta=\pi$; для этого значения θ ордината y будет равна высоте поверхности жидкости над ее уровнем в бесконечности или же, как можно сказать,— глубине погружения h источника; имеем

$$2\pi h/l={}^1/_2(1+\varepsilon+{}^3/_2\varepsilon^2+{}^{17}/_2\varepsilon^3+\ldots)$$

По этой формуле находим через задаваемую величину погружения h вспомогательный параметр l, входящий в уравнения волновой поверхности.

Полагая $\theta=0$, находим ординату волновой поверхности над источником; подсчеты показывают, что, как и должно быть, эта ордината будет равна h.

§ 6. Вернемся к уравнению (2.4) и преобразуем его, вводя вместо функции $f(u)$ функцию ω, причем

$$\omega=\tau+i\vartheta$$

где ϑ — угол наклона скорости к оси OX, а τ определяется так:

$$\tau=\ln\left[\left(\frac{gq}{2\pi}\right)^{1/3}\left|\frac{dz}{dw}\right|\right]$$

Проводя соответствующие вычисления, получаем связь между τ и ϑ на окружности $|u|=1$

$$\frac{d\tau}{d\theta}-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta\, e^{3\tau}\sin\vartheta=0 \tag{6.1}$$

Это условие напоминает условие Леви — Чивита, но в него не входит какой-либо параметр. По функции ω функция $f(e^{i\theta})$ определяется так:

$$f(e^{i\theta})=-\frac{l}{2q}\left(\frac{gq}{2\pi}\right)^{1/3}\frac{e^{-\omega}}{\sin\theta}$$

Эта функция будет частным видом общей формулы

$$f(u)=\frac{il}{q}\left(\frac{gq}{2\pi}\right)^{1/3}\frac{u}{1-u^2}e^{-\omega} \tag{6.2}$$

Функция $\omega(u)$ может быть найдена при использовании граничного условия (6.1) в виде ряда по степеням введенного выше параметра ε, и затем по формуле (6.2) может быть снова найдено разложение (4.2).

Поступила 5 IV 1965