Прикладная математика и механика. Том 29, 1965

РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ СЛАБО ИСКРИВЛЕННУЮ ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Ю. М. Николаев

(Москва)

Исследуется развитие малых возмущений газодинамических параметров за фронтом плоской ударной волны, распространяющейся из сильно разреженного (невесомого) газа в плотный (идеальный) газ. Граница раздела слабо искривлена. Рассматривается по существу упрощенный вариант задачи Рихтмайера [1]; для этого варианта находится аналитическое решение, в то время как проблема Рихтмайера решается численным методом. Изучению устойчивости плоской ударной волны, распространяющейся в однородной среде, посвящен ряд работ, из которых следует отметить Фримана [2], С. П. Дьякова [3], Р. М. Зайделя [4], а также обстоятельную работу С. В. Иорданского [5]. В этих работах показано, что плоская ударная волна устойчива. Метод решения рассматриваемых ниже задач был предложен в работе [4] и приводит к гиперболической системе уравнений с краевыми условиями на подвижных границах.

В данной работе получено аналитическое решение задачи в линейном приближении: найдены аналитические зависимости для амплитуды искривления формы фронта волны, а также движение возмущенной границы со временем. Оказывается, что закон изменения амплитуды фронта слабой ударной волны не зависит от граничных условий: зависимость одинакова для волны, идущей от слабо искривленного поршня, и для волны, проходящей через слабо искривленную границу (3.22).

Зависимость амплитуды искривления формы фронта сильной ударной волны от граничных условий не зависит (3.15) и (3.16).

Асимптотика ударной волны и сильной ударной волны существенно различна, именно, амплитуда искривления формы фронта ударной волны пропорциональна $s^{-1/2}$, а в сильной волне $\sim s^{-3/2}$.

§ 1. Постановка задачи. Пусть в невозмущенной среде, граничащей с невесомым газом, плоская поверхность раздела лежит в плоскости YZ. Под невесомым понимаем газ нулевой плотности и бесконечной скорости звука, так что возмущение давления в нем отсутствует. В момент $t = 0$ в невесомом газе возникает постоянное во времени давление, которое вызывает появление плоской ударной волны, фронт которой в момент $t = 0$ принимает форму границы. По газу пойдет ударная волна с постоянной скоростью D, скорость невозмущенной границы соответственно U. Так как одна среда есть невесомый газ, то отраженная волна отсутствует. В начальном состоянии плотность газа ρ_0, скорость звука c_0, за фронтом волны соответственно ρ и c.

Для простоты вычислений плотный газ считаем идеальным с показателем изэнтропы γ. Скорость волны относительно границы раздела обозначим через V, так что $D = V + U$. Введем параметр $\delta = 1 / M_0^2$, где

$M_0 = D / c_0$ — число Маха, тогда как известно

$$\sigma = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{h}{1+(h-1)\delta}, \quad V = \frac{D}{\sigma}, \quad \beta^2 = \frac{V^2}{c^2} = \frac{1+(h-1)\delta}{(h+1)-\delta}, \quad h = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

Имея решение невозмущенной задачи, рассмотрим в линейном приближении распространение ударной волны при выходе ее на слабо искривленную границу раздела идеального и невесомого газов. Без ограничения общности будем считать, что граница раздела искривлена в одном направлении и имеет форму $\varepsilon(Y)$, явный вид $\varepsilon(Y)$ установим позднее. Пользуемся системой координат, в которой граница раздела неподвижна. В дальнейшем используем обозначения, приведенные в работе [4].

В области $0 < X < Vt$ имеем линеаризованные уравнения для возмущений давления p' и компонент скорости v_x' и v_y' (1.1)

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho c^2 \left(\frac{\partial v_x'}{\partial X} + \frac{\partial v_y'}{\partial Y}\right) = 0, \quad \frac{\partial v_x'}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial v_y'}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial Y} = 0$$

Возмущения плотности ρ' исключены при помощи условия адиабатичности

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho'}{\partial t} \tag{1.2}$$

Условия на фронте ударной волны формулируем так же, как в работе [3]

$$v_y' = -U\frac{\partial \xi}{\partial Y}, \quad v_x' = \frac{1+\delta}{2\rho_0 D}p', \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1-\delta}{2\rho_0 u}p', \quad X = Vt \tag{1.3}$$

Через $\xi(Y, t)$ обозначено смещение фронта ударной волны от плоскости $X = Vt$.

Начальные условия вытекают из того, что фронт ударной волны при $t = 0$ совпадает с поверхностью границы, на которой $v_x' = 0$. Согласно (1.3), при $t = 0$ будет $p' = 0$, т. е. краевое условие для давления имеет вид

$$p' = 0 \tag{1.4}$$

Касательная компонента скорости v_y' в начальный момент отлична от нуля и равна $v_y' = -U\partial\varepsilon / \partial Y$.

Пусть $\varepsilon(Y) = \Delta \exp(ikY)$, где Δ, k — постоянные, причем выполняется условие малости возмущений

$$k\Delta \ll 1 \tag{1.5}$$

Зависимость всех величин от координаты Y определяется множителем $\exp(ikY)$. Введем обозначения

$$p' / \rho c = w, \quad v_x' = u, \quad v_y' = -iv, \quad kX = x, \quad kct = y \tag{1.6}$$

Тогда задача сводится к решению системы

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} - w = 0 \tag{1.7}$$

с краевыми условиями

$$w = w_0 f(y) \quad \text{при } x = 0, \quad u = Aw, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = Bw \quad \text{при } x = \beta y \; (\beta < 1) \tag{1.8}$$

Здесь

$$A = \frac{1+\delta}{2\beta}, \qquad B = \frac{1}{\beta}\left[\frac{1-\delta}{2}\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right] \tag{1.9}$$

и начальными условиями

$$u = 0, \quad w = 0 \quad v = v_0 \quad \text{при } x = y = 0 \quad (v_0 = Uk\Delta) \tag{1.10}$$

§ 2. **Решение краевой задачи.** Вводим новые переменные по формулам

$$y = r \operatorname{ch}\theta, \quad x = r\operatorname{sh}\theta, \quad r = \sqrt{y^2 - x^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = x / y \tag{2.1}$$

Тогда система уравнений (1.7) после некоторых преобразований принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + v\operatorname{ch}\theta = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + v\operatorname{sh}\theta = 0$$
$$\operatorname{ch}\theta\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\operatorname{sh}\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} - w = 0 \tag{2.2}$$

а функция w удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w = 0 \tag{2.3}$$

Краевые и начальные условия преобразуются к виду

$$w = w_0 f(r) \qquad \text{при } \theta = 0 \tag{2.4}$$

$$u = Aw, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = (B\operatorname{sh}\theta_0 + \operatorname{ch}\theta_0)\, w \quad \text{при } \theta = \theta_0 \tag{2.5}$$

$$u = 0, \quad w = 0, \quad v = v_0 \quad \text{при } r = 0 \tag{2.6}$$

Для решения системы уравнений с краевыми и начальными условиями (2.2) — (2.6) воспользуемся преобразованием Лапласа по переменной r на действительной оси. Краевые и начальные условия, выраженные через функции-изображения

$$w_1 = w_0 \int_0^\infty e^{-pr} f(r)\, dr = 0, \qquad \theta = 0 \tag{2.7}$$

$$u_1 = Aw_1, \quad pv_1 - v_0 = (B\operatorname{sh}\theta_0 + \operatorname{ch}\theta_0)\, w_1, \quad \theta = \theta_0 \tag{2.8}$$

Система уравнений (2.2), преобразованная через функции-изображения, имеет такой же вид, как система уравнений (2.7), (2.8) в работе [4]. Сделаем подстановку

$$p = \operatorname{sh} q, \qquad w_1(p, \theta) = \frac{w_2(q, \theta)}{\operatorname{ch} q} \tag{2.9}$$

получим волновое уравнение для $w_2\,(q, \theta)$, общее решение которого имеет вид

$$w_2(q, \theta) = F(q + \theta) + \Phi(q - \theta) \tag{2.10}$$

где F и Φ — произвольные функции. Как видно из (2.7), $\Phi\,(q) = -F\,(q)$ при $\theta = 0$, поэтому

$$w_2\,(q, \theta) = F\,(q + \theta) - F\,(q - \theta) \tag{2.11}$$

Второе уравнение из системы (2.7) работы [4] запишем так:

$$\frac{\partial}{\partial q}\{pu_1 - [F(q + \theta) + F(q - \theta)] + v_1 \operatorname{sh}\theta\} = 0$$

Отсюда

$$pu_1 - [F(q+\theta) + F(q-\theta)] + v_1 \operatorname{sh}\theta = \varphi(\theta) \qquad (2.12)$$

где $\varphi(\theta)$ — произвольная функция. Известно [6], что

$$f(r=0) = f(0) = \lim pf_1(p,\theta) \quad \text{при } p \to \infty$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} w(0) = \lim_{p\to\infty} pw_1(p,\theta) = 0, \qquad \lim_{q\to\infty} [\operatorname{th} qw_2(q,\theta)] = 2F(\infty) = 0 \\ u(0) = \lim_{p\to\infty} pu_1 = 0, \qquad \lim_{q\to\infty} pu_1 = 0 \end{gathered} \qquad (2.13)$$

В равенстве (2.12) перейдем к пределу $\operatorname{Re} q \to \infty$, тогда левая часть обращается в нуль при любом θ, т. е. $\varphi(\theta) = 0$. Положим $\theta = \theta_0$ в (2.12); тогда с учетом $\varphi(\theta_0) = 0$, используя (2.7) и (2.8), найдем, что $F(q)$ удовлетворяет уравнению в конечных разностях

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} 2q\, [F(q+\theta_0) + F(q-\theta_0)] - (a \operatorname{ch} 2q + b)\, [F(q+\theta_0) - \\ - F(q-\theta_0)] = 2v_0 \operatorname{sh}\theta_0 \operatorname{ch} q \end{aligned} \qquad (2.14)$$

Здесь

$$a = A = \frac{1+\delta}{2\beta} > 1, \qquad b = 2\operatorname{sh}\theta_0(B\operatorname{sh}\theta_0 + \operatorname{ch}\theta_0) - A = \frac{1-\delta}{2\beta}$$

Существование и единственность решения подобного уравнения доказана в работе [4], а методы построения решений уравнений в конечных разностях изложены в [7], частное решение уравнения (2.14), исчезающее при $\operatorname{Re} q \to \infty$, ищем в виде ряда

$$F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-(2n+1)q} \qquad (2.15)$$

Подставляя это выражение в (2.14) и приравнивая коэффициенты при одинаковых экспонентах, для коэффициентов $C_n = 2A_n \operatorname{sh}(2n+1)\theta_0$ получим рекуррентные соотношения

$$\begin{gathered} C_0 = \frac{2v_0 \operatorname{sh}\theta_0}{a + \operatorname{cth}\theta_0}, \qquad C_1 = C_0 \frac{\operatorname{cth}\theta_0 + (a-2b)}{a + \operatorname{cth} 3\theta_0} \\ [a + \operatorname{cth}(2n+3)\theta_0] C_{n+1} + 2bC_n + [a - \operatorname{cth}(2n-1)\theta_0]\, C_{n-1} = 0 \end{gathered} \qquad (2.16)$$

Согласно (2.11), имеем

$$w_2(q,\theta) = -\sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{\operatorname{sh}(2n+1)\theta}{\operatorname{sh}(2n+1)\theta_0} e^{-(2n+1)\theta} \qquad (2.17)$$

Доказательство сходимости полученного решения проводится так же, как в работе Р. М. Зайделя [4]. Возвращаясь к переменной $p = \operatorname{sh} q$, после некоторых преобразований, используя известную [6] формулу для изображения функции Бесселя

$$J_n(r) \risingdotseq \frac{(\sqrt{p^2+1} - p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$$

получим

$$w(r,\theta) = -\sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{\operatorname{sh}(2n+1)\theta}{\operatorname{sh}(2n+1)\theta_0} J_{2n+1}(r) \qquad (2.18)$$

Переход к старым переменным X, ct осуществляется по формулам

$$r = kct\sqrt{1-\tau^2}, \qquad \tau = X / ct$$
$$\operatorname{ch}(2n+1)\theta = {}^1/_2\,[(1+\tau)^{2n+1} + (1-\tau)^{2n+1}](1-\tau)^{-(n+{}^1/_2)} \tag{2.19}$$

Давление на фронте ударной волны дается рядом

$$w(r, \theta_0) = -\sum_{n=0}^{\infty} C_n J_{2n+1}(s), \qquad s = kct\sqrt{1-\beta^2} \tag{2.20}$$

Полученное значение (2.20) подставляем во второе граничное условие (2.5) и после интегрирования получаем

$$v(r, \theta_0) = v_0 - (B\operatorname{sh}\theta_0 + \operatorname{ch}\theta_0)\sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_0^s J_{2n+1}(x)\,dx \tag{2.21}$$

Отметим соотношение, которое получается из (2.14) и (2.17) при $q = 0$

$$w_2(0, \theta_0) = Q = -\sum_{n=0}^{\infty} C_n = -\frac{v_0}{B\operatorname{sh}\theta_0 + \operatorname{ch}\theta_0} \tag{2.22}$$

Величины $v(r, \theta_0)$ и $\xi(s)$ пропорциональны, поэтому для формы фронта ударной волны получается выражение

$$\frac{\xi(s)}{\Delta} = -\frac{1}{Q}\sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_s^{\infty} J_{2n+1}(x)\,dx \tag{2.23}$$

Последний результат можно представить в виде, не содержащем интегралов, используя соотношения для функций Бесселя. Обозначим

$$G_0(r) = \int_r^{\infty} J_1(x)\,dx, \qquad G_n(r) = \int_r^{\infty} J_{2n+1}(x)\,dx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.24}$$

Тогда

$$G_0(r) = J_0(r), \qquad G_n(r) = 2J_n(r) + G_{n-1}(r) \tag{2.25}$$

Имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n G_n(r) = C_0 J_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n[2J_{2n}(r) + G_{n-1}(r)] =$$
$$= C_0 J_0(r) + 2\sum_{n=1}^{\infty} C_n J_{2n}(r) + \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} G_n(r) = C_0 J_0(r) + 2\sum_{n=1}^{\infty} C_n J_{2n}(r) +$$
$$+ C_1 J_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{n+1}[2J_{2n}(r) + G_{n-1}(r)] = (C_0 + C_1) J_0(r) +$$
$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty}(C_n + C_{n+1}) J_{2n}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{n+1} G_n(r)$$

Так как $C_n \to 0$ при $n \to \infty$, продолжая этот процесс, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_r^{\infty} J_{2n+1}(x)\,dx = J_0(r)\sum_{n=0}^{\infty} C_n + \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_{2n}(r) \qquad \left(D_n = 2\sum_{m=n}^{\infty} C_m\right) \tag{2.26}$$

Просуммировав рекуррентное уравнение (2.16) по индексу n до ∞, получаем соотношение

$$D_n = \frac{1}{a+b}\{[a + \operatorname{cth}(2n+1)\theta_0]\, C_n - [a - \operatorname{cth}(2n-1)\theta_0]\, C_{n-1}\} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.27}$$

Таким образом, зависимость формы фронта ударной волны от времени определяется в виде ряда

$$\frac{\xi(s)}{\Delta} = J_0(s) - \frac{1}{Q}\sum_{n=1}^{\infty} D_n J_{2n}(s) \tag{2.28}$$

§ 3. Некоторые предельные случаи. Для асимптотического случая $r \gg 1$ воспользуемся выражением функции Бесселя

$$J_{2n+1}(r) \approx (-1)^n \frac{2}{\sqrt{2\pi r}}\left[\sin\left(r-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{4(2n+1)^2-1}{8r}\cos\left(r-\frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{3.1}$$

Заметим, что при $q = {}^1/_2 i\pi$, $a \neq b$ из разностного уравнения (2.14) следует

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_n = 0 \tag{3.2}$$

Используя выражения (3.1) и (2.18), получаем

$$w(r,\theta) = -\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\sin\left(r-\frac{\pi}{r}\right)\sum_{n=0}^{\infty} C_n\frac{\operatorname{sh}(2n+1)\theta}{\operatorname{sh}(2n+1)\theta_0} -$$
$$-\frac{\cos(r-{}^1/_4\pi)}{4\sqrt{2\pi r^3}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_n\frac{\operatorname{sh}(2n+1)\theta}{\operatorname{sh}(2n+1)\theta_0}[4(2n+1)^2-1] \tag{3.3}$$

На фронте ударной волны, в силу выполнимости (3.2), первая сумма выражения (3.3) обращается в нуль

$$w(r,\theta_0) = -N\frac{\cos(s-{}^1/_4\pi)}{\sqrt{2\pi s^3}} \qquad \left(N = 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(n+1)C_n\right) \tag{3.4}$$

а) В случае сильной ударной волны ($c_0 = 0$, либо $U \to \infty$) имеем $\delta = 0$ и $a = b$. В этом режиме следует ожидать, что асимптотическое поведение решения будет существенно другим, именно, рост возмущений происходит по другому закону. Уравнение (2.14) принимает вид (3.5)

$$\operatorname{sh} q\,[F(q+\theta_0)+F(q-\theta_0)] - a\operatorname{ch} q\,[F(q+\theta_0)-F(q-\theta_0)] = 2v_0\operatorname{sh}\theta_0$$

Решение по-прежнему ищем в форме ряда (2.15) и для C_n получаем

$$C_0 = \frac{2v_0\operatorname{sh}\theta_0}{a+\operatorname{cth}\theta_0}, \quad [a+\operatorname{cth}(2n+1)\theta_0]\,C_n + [a-\operatorname{cth}(2n-1)\theta_0]\,C_{n-1} - 0 \tag{3.6}$$

Сходимость ряда с такими коэффициентами C_n очевидна. Зависимость формы фронта сильной волны от времени определяется формулой (2.28), где D_n определены соотношениями (3.7)

$$D_1 = -C_0\frac{a-\operatorname{cth}\theta_0}{a}, \qquad D_n = -D_{n-1}\frac{a-\operatorname{cth}(2n-1)\theta_0}{a+\operatorname{cth}(2n+1)\theta_0} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

Асимптотика определяется аналогично предыдущему, и (3.8)

$$w(r,\theta_0) = M\frac{\sin(s-{}^1/_4\pi)}{\sqrt{2\pi s}} \qquad \left(M = 2iw_2\left(i\frac{\pi}{2},\ \theta_0\right) = -2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_n\right)$$

б) Представляет интерес рассмотреть случай сильной волны для малых, но конечных значений $\delta \ll 1$. Используя интегральное представление функции Бесселя [8], выражение для давления на фронте волны представим так:

$$w(r, \theta_0) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \left[\int_0^{^1/_2 i\pi} w_2(q, \theta_0) \operatorname{sh}(s \operatorname{sh} q)\, dq \right] \tag{3.9}$$

Далее, из (2.14) следует

$$w_2(q, \theta_0) = \frac{2 \operatorname{ch} q}{\operatorname{sh} 2q + a \operatorname{ch} q + b} \{2 \operatorname{sh} q F(q + \theta_0) - v_0 \operatorname{sh} \theta_0\} \tag{3.10}$$

Очевидно, что основной вклад в интеграл (3.9) при $s \gg 1$ дает точка $q = {}^1/_2 i\pi$, а выражение в фигурных скобках в (3.10) можно заменить его значением при $q = {}^1/_2 i\pi$, $\delta = 0$. Отметим, что в формуле (3.4) коэффициент

$$N = i \frac{\partial^2}{\partial q^2} w_2(q_i \theta_0) \qquad \text{при } q = i\,\frac{\pi}{2}$$

после двукратного дифференцирования из равенства (3.10) следует

$$N = -\frac{4M}{(h+1)\delta^2} \qquad (\text{для } \delta \ll 1) \tag{3.11}$$

Таким образом, из соотношений (3.9) и (3.10) с учетом (3.11) после необходимых преобразований для значений $s \gg 1$ и $\delta \ll 1$

$$w(r, \theta_0) \approx \frac{2M}{\pi} \int_0^{^1/_2 \pi} \frac{\sin(s \sin \varphi) \cos \varphi \sin 2\varphi}{(a \cos 2\varphi + b)^2 + (\sin 2\varphi)^2} d\varphi$$

Так как основной вклад в интеграл определяется в окрестности точки $x = \sin \varphi = 1$, то, распространяя нижний предел интегрирования до $-\infty$, получим

$$w(r, \theta_0) \approx \frac{4\sqrt{2}\, M}{\pi} \int_{-\infty}^{1} \frac{\sin(sx)\sqrt{1-x}}{(a-b)^2 + 8(1-x)} dx \tag{3.12}$$

Положив $\alpha = {}^1/_8 (h+1) s\delta^2$, придем к искомой формуле

$$\begin{gathered} w(r, \theta_0) \sim -\frac{M\sqrt{h+1}}{4\pi}\, \delta\, \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Re}\left\{\exp\left[i\left(s - \frac{\pi}{4}\right)\right] \psi(\alpha)\right\} \\ \psi(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} \left[1 - \sqrt{\pi\alpha}\, e^{i\alpha} \left(e^{^1/_4 i\pi} - \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\alpha}} e^{-i\eta^2} d\eta\right)\right] \end{gathered} \tag{3.13}$$

Подставляем полученное асимптотическое выражение $w(r, \theta_0)$ во второе граничное условие (условие на фронте волны (2.5))

$$\frac{\xi(s)}{\Delta} \sim -\frac{M}{8\pi v_0} (h+1)\, \delta \sqrt{h}\, \operatorname{Re}\left\{\exp\left[i\left(s - \frac{\pi}{4}\right)\right] \psi(\alpha)\right\} \tag{3.14}$$

Асимптотическое поведение функции $\Delta^{-1}\xi(s)$ устанавливается путем подстановки выражений (3.4) и (3.9) в формулу (2.5), в результате получаем

$$\frac{\xi(s)}{\Delta} \sim \frac{N}{v_0} \frac{1}{2\beta \operatorname{sh} \theta_0} \frac{\sin(s - {}^1/_4 \pi)}{\sqrt{2\pi s^3}} \qquad (\delta \neq 0) \tag{3.15}$$

Для случая $\delta = 0$ имеем, согласно (3.8),

$$\frac{\xi(s)}{\Delta} \sim \frac{M}{2v_0} \sqrt{h(h+1)} \frac{\cos(s - {}^1/_4\pi)}{\sqrt{2\pi s}} \tag{3.16}$$

Из сравнения последних формул (3.15) и (3.16) с формулами (3.16) работы [4] можно заключить, что асимптотический закон затухания возмущений формы фронта ударной волны со временем с точностью до постоянных коэффициентов одинаков для случая движения ударной волны от слабо искривленного поршня (см. формулу (3.4) работы [3]) и прохождения волны через слабо искривленную свободную границу раздела двух сред.

в) Рассмотрим случай слабой ударной волны ($\delta \to 1$). При этом $\operatorname{th} \theta_0 = \beta \to 1$, так что $\theta_0 \to \infty$. Из коэффициентов A_n в (2.15) остается только A_0. Причем, поскольку $a \to 1$, $b \to 0$, получаем $A_0 = {}^1/_2 v_0$, тогда из (2.18) следует

$$w(r, \theta) = -v_0 J_1(r) \operatorname{sh} \theta$$

Отсюда получаем формулу для возмущения давления p', отнесенного к его невозмущенному значению p

$$\frac{p'}{p} = -\frac{2(h+1)}{h}(M_0 - 1) k\Delta \exp(ikY) \frac{J_1(kct\sqrt{1-\tau^2})}{\sqrt{1-\tau^2}} \sqrt{4\tau^2 - 3} \tag{3.17}$$

Поведение формы фронта слабой ударной волны $\xi(s)$ при $\delta_0 \to 1$ легко определяется, если учесть, что $F(q + \theta_0) \to 0$ при $\theta_0 \to \infty$. Из выражения (2.14) находим

$$w_2(q, \theta_0) \approx -F(q - \theta_0) = -2v_0 \operatorname{sh} \theta_0 e^{-2q} \operatorname{ch} q \tag{3.18}$$

Так как $e^{-q} = \sqrt{p^2+1} - p$, то имеем

$$w_1(p, \theta_0) = -2v_0 \operatorname{sh} \theta_0 (\sqrt{p^2+1} - p)^2 \tag{3.19}$$

и, пользуясь таблицей оригиналов и изображений для преобразований Лапласа, получаем

$$w(r, \theta_0) = -4r^{-1} v_0 \operatorname{sh} \theta_0 J_2(r) \tag{3.20}$$

По известной функции $w(r, \theta_0)$, используя условие на волне (2.5), находим

$$v(r, \theta_0) = v_0 \left[1 - 2\int_0^s \frac{J_2(x)}{x}\, dx\right] \qquad \text{при } \theta_0 \gg 1 \tag{3.21}$$

используя известные соотношения для функций Бесселя, освобождаемся от интеграла и получаем

$$\frac{\xi(s)}{\Delta} = 2\frac{J_1(s)}{s} \tag{3.22}$$

что совпадает с соответствующей формулой Р. М. Зайделя [4]. Итак, для слабых ударных волн закон развития неустойчивости для волны, идущей от кривого поршня, и для волны, проходящей через слабо искривленную границу раздела двух сред, одинаков.

§ 4. Закон роста возмущений на границе. После прохождения ударной волны через границу раздела начинается движение возмущенной границы во времени. На границе $\theta = 0$ и второе уравнение (2.2) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \tag{4.1}$$

Подставляя выражение для $w(r, \theta)$, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{(2n+1)}{\operatorname{sh}(2n+1)\theta_0} J_{2n+1}(r) \tag{4.2}$$

При интегрировании по r используем известные рекуррентные формулы для функций Бесселя [8].

Для скорости движения возмущенной границы получаем

$$u = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{\operatorname{sh}(2n+1)\theta_0}\left[\int_0^r J_0(x)\,dx + J_{2n+1}(r) - 2\sum_{k=0}^{n} J_{2k+1}(r)\right] \tag{4.3}$$

Второе интегрирование для амплитуды искривления границы, дает

$$\chi = \chi_0 + \frac{1}{kc}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{n-1}}{\operatorname{sh}(2n-1)\theta_0}\left[r\int_0^r J_0(x)\,dx - rJ_1(r) - J_0(r) + 2J_{2n}(r) - \right.$$

$$\left. - 2\sum_{k=1}^{n} J_{2k}(r) - 2\sum_{k=1}^{n}\left(1 - J_0(r) + 2J_{2k}(r) - 2\sum_{l=1}^{k} J_{2l}(r)\right)\right] \tag{4.4}$$

Заметим, что для сильной ударной волны в идеальном газе с показателем изэнтропы $\gamma = {}^5/_3$ выражение $a - \operatorname{cth}(2n-1)\theta_0 = 0$ при $n = 2$, поэтому коэффициенты C_n и D_n с номерами $n = 2, 3, 4$ обращаются в нуль. Аналитическое решение принимает вид

$$\frac{\xi(s)}{\Delta} = J_0(s) + \frac{2}{3}J_2(s), \qquad s = kct\sqrt{1-\beta^2} \tag{4.5}$$

$$\frac{\chi}{\chi_0} = -0.1 + 0.9\left[r\int_0^r J_0(x)\,dx - rJ_1(r) + J_0(r)\right]\frac{0.4J_1(r)}{r} \tag{4.6}$$

Асимптотическое поведение искривленной границы при $r \gg 1$ легко устанавливается из формулы (4.4)

$$\chi / \chi_0 \approx r \tag{4.7}$$

В заключение автор приносит искреннюю благодарность Р. М. Зайделю — за помощь в работе и Л. А. Галину — за полезную дискуссию.

Поступила 2 II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Richtmyer R. D. Taulor Instability in Shock Acceleration of Compressible Fluids. Communs Pure and Appl. Math., 1960, vol. 13, p. 297—319.
2. Freeman N. G. A theory of the stability of plane shock waves. Proc. Roy. Soc. A, 1955, vol. 233 p. 1174.
3. Дьяков С. П. Об устойчивости ударных волн. Ж. эксперим. и теор. физ., 1954, т. 27, № 3.
4. Зайдель Р. М. Ударная волна от слабо искривленного поршня, ПММ, 1960, т. 24, вып. 2, стр. 219—227.
5. Иорданский С. В. Об устойчивости плоской стационарной ударной волны. ПММ, 1957, т. 2, вып. 4, стр. 464—472.
6. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Гостехиздат, 1951.
7. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. Гостехиздат, 1952.
8. Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, ч. II. Физматгиз, М., 1963.