

К ТЕОРИИ СИЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С НЕВЯЗКИМ ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

Н. С. Матвеева, В. В. Сычев

(Москва)

Рассматриваются высшие приближения в теории сильного взаимодействия пограничного слоя с внешним невязким потоком. Уточняются известные результаты, относящиеся к задачам о неустановившемся движении газа около бесконечной пластины и стационарном обтекании полубесконечной пластины (§ 1—6). В результате находятся асимптотические представления для поперечного смещения пластины или ее формы, соответствующие закону распределения давления первого приближения.

Влияние вязкости и теплопроводности газа на поле течения около тела, движущегося с гиперзвуковой скоростью, как известно, может быть приближенно рассмотрено на основе теории взаимодействия пограничного слоя с внешней невязкой областью течения^[1]. Если при этом тело достаточно тонкое, а числа Маха M_∞ и Рейнольдса R_∞ задачи таковы, что отношение $M_\infty^3 / \sqrt{R_\infty} \gg 1$, то имеет место явление сильного взаимодействия, при котором поле давления в возмущенной области потока в основном определяется вытесняющим эффектом пограничного слоя и в значительно меньшей степени зависит от формы поверхности обтекаемого тела. Примеры плоских течений такого типа рассмотрены в работах ^[2,3].

Построенные в этих работах решения основаны на сращивании точных (авто-модельных) решений уравнений пограничного слоя и уравнений теории малых возмущений гиперзвукового потока, причем процесс сращивания этих решений был произведен лишь в первом приближении. Следствием этого явился особый характер поведения решения в промежуточной области (на внешней границе пограничного слоя), при котором энтальпия газа в этой области стремится к нулю, а плотность неограниченно возрастает. В работах ^[2,3] были приведены также оценки точности теории первого приближения.

Целью настоящей статьи является построение следующих приближений для этих задач, точнее говоря, для задач об асимптотическом поведении поля течения вязкого теплопроводного газа за ударными волнами, распространяющимися по тому же закону ($y \sim t^{3/4}$ и $y^{3/4} \sim x^{3/4}$) в предельном случае числа $M_\infty \rightarrow \infty$.

1. Рассмотрим одномерное нестационарное движение вязкого теплопроводного газа под действием бесконечной пластины, внезапно приведенной в состояние движения со скоростью, имеющей постоянную продольную составляющую U_∞ . Примем линейный закон зависимости коэффициента вязкости газа от удельной энтальпии

$$\mu = CU_\infty^2 h \quad (1.1)$$

Уравнения Навье — Стокса в этом случае могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial u}{\partial y} \right), & \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) &= \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial h}{\partial y} \right) + h \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{4}{3} h \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 & (1.2) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, & p &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho h \end{aligned}$$

Здесь составляющие вектора скорости u , v отнесены к продольной скорости пластины U_∞ ; давление p — к величине $\rho_\infty U_\infty^2$; плотность ρ — к плотности в невозмущенном потоке ρ_∞ ; удельная энтальпия h — к величине U_∞^2 ; безразмерные независимые переменные t , y отнесены соответственно к величинам C / ρ_∞ и $C U_\infty / \rho_\infty$, наконец, σ и γ — соответственно число Прандтля и отношение удельных теплоемкостей газа.

Вводя на основании уравнения неразрывности функцию ψ , определяемую соотношениями

$$\partial\psi / \partial t = -\rho v, \quad \partial\psi / \partial y = \rho \quad (1.3)$$

преобразуем систему (1.2) к независимым переменным t , ψ . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\rho h \frac{\partial u}{\partial \psi} \right), & \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \psi} &= \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\rho h \frac{\partial v}{\partial \psi} \right) \\ \rho \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\sigma} \rho \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\rho h \frac{\partial h}{\partial \psi} \right) + \rho^2 h \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 + \frac{4}{3} \rho^2 h \left(\frac{\partial v}{\partial \psi} \right)^2 \\ \rho \frac{\partial y}{\partial \psi} &= 1, & \frac{\partial y}{\partial t} &= v, & p &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho h \end{aligned} \quad (1.4)$$

Цель работы, как указывалось, — построение асимптотического решения этих уравнений, соответствующего одномерному движению газа за ударной волной, распространяющейся по закону

$$y = ct^{3/4} \quad (1.5)$$

удовлетворяющего условию прилипания $u = 1$ и условию отсутствия потока тепла

$$\partial h / \partial \psi = 0$$

на поверхности пластины $\psi = 0$, которая, таким образом, принимается теплоизолированной.

2. Для внешней части поля течения, примыкающей к поверхности ударной волны, такое решение, как известно, имеет вид

$$\begin{aligned} y &= t^{3/4} Y_0(v), & u &= 0, & v &= t^{-1/4} V_0(v) \\ p &= t^{-1/2} P_0(v), & \rho &= R_0(v), & &= t^{-1/2} H_0(v) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где независимая переменная

$$v = \psi t^{-3/4} \quad (2.2)$$

Подставляя выражения (2.1) в (1.4) и сохраняя главные члены в этих уравнениях, получим систему уравнений известного автомодельного движения невязкого газа

$$\begin{aligned} 3/4 v V_0' + 1/4 V_0 &= P_0', & R_0 (3/2 v H_0' + H_0) &= 3/2 v P_0' + P_0 \\ R_0 Y_0' &= 1, & 3/4 v Y_0' - 3/4 Y_0 + V_0 &= 0, & P_0 &= [(\gamma - 1) / \gamma] R_0 H_0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Заметим, что рассмотрение газа во внешней области течения, как невязкого и нетеплопроводного, справедливо с относительной ошибкой порядка t^{-1} , так как такой порядок малости имеет отношение отбрасываемых в уравнениях (1.4) членов к главным.

Решение системы (2.3) должно удовлетворять системе граничных условий на поверхности ударной волны, закон распространения которой задан уравнением (1.5). В предельном случае течения с числом $M_\infty \rightarrow \infty$

эти граничные условия принимают вид $V_0(c) = c$

$$V_0(c) = \frac{3c}{2(\gamma+1)}, \quad P_0(c) = \frac{9c^2}{8(\gamma+1)}, \quad R_0(c) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad H_0(c) = \frac{9\gamma c^2}{8(\gamma+1)} \quad (2.4)$$

Здесь постоянная c подлежит определению.

Для дальнейшего будет важно иметь представление искомых функций внешнего потока при $\nu \rightarrow 0$. Для получения этих выражений заметим, что второе из уравнений (2.2) при помощи последнего интегрируется и дает

$$P_0 R_0^{-\gamma} = A_0 \nu^{-2/3} \quad (2.5)$$

Постоянная A_0 определяется из граничных условий (2.4)

$$A_0 = \frac{9c^{4/3}}{8(\gamma+1)} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^\gamma \quad (2.6)$$

Используем (2.5) и остальные уравнения системы (2.3); теперь нетрудно получить следующие выражения, справедливые при $\nu \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} Y_0 &= Y_{00} + Y_{01} \nu^{1-2/3\gamma} + O(\nu^{2-2/3\gamma}), & R_0 &= R_{00} \nu^{2/3\gamma} + O(\nu^{1+2/3\gamma}) \\ V_0 &= V_{00} + V_{01} \nu^{1-2/3\gamma} + O(\nu^{2-2/3\gamma}), & H_0 &= H_{00} \nu^{-2/3\gamma} + O(\nu^{1-2/3\gamma}) \\ P_0 &= P_{00} + O(\nu) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Коэффициенты в этих формулах связаны соотношениями

$$\begin{aligned} Y_{01} &= \frac{3\gamma}{3\gamma-2} A^{1/\gamma} P_{00}^{-1/\gamma}, & V_{00} &= \frac{3}{4} Y_{00}, & V_{01} &= \frac{3}{2(3\gamma-2)} A^{1/\gamma} P_{01}^{-1/\gamma} \\ R_{00} &= A_0^{-1/\gamma} P_{00}^{1/\gamma}, & H_{00} &= \frac{\gamma}{\gamma-1} A_0^{1/\gamma} P_{00}^{1-1/\gamma} \end{aligned} \quad (2.8)$$

3. Для исследования внутренней области поля течения введем, как обычно, независимую переменную

$$N = \psi t^{-1/4} \quad (3.1)$$

Для определения вида асимптотических разложений, справедливых в этой области, выразим функции внешнего течения через независимую переменную внутреннего разложения

$$\nu = N t^{-1/2} \quad (3.2)$$

и перейдем к пределу $t \rightarrow \infty$ при фиксированном значении N . Используя выражения (2.7), получим

$$\begin{aligned} y &= t^{3/4} [Y_{00} + Y_{01} N^{1-2/3\gamma} t^{-1/2+1/3\gamma} + O(t^{-1+1/3\gamma})], & u &= O(t^{-1}) \\ v &= t^{-1/4} [V_{00} + V_{01} N^{1-2/3\gamma} t^{-1/2+1/3\gamma} + O(t^{-1+1/3\gamma})], & p &= t^{-1/2} [P_{00} + O(t^{-1/2})] \\ \rho &= R_{00} N^{2/3\gamma} t^{-1/3\gamma} + O(t^{-1/2-1/3\gamma}), & h &= H_{00} N^{-2/3\gamma} t^{-1/2+1/3\gamma} + O(t^{-1+1/3\gamma}) \end{aligned}$$

Эти выражения подсказывают форму, в которой следует искать асимптотическое решение для внутренней области потока, а именно:

$$\begin{aligned} y &= t^{3/4} [y_0(N) + t^{-1/2+1/3\gamma} y_1(N) + \dots], & u &= u_0(N) + t^{-1/2+1/3\gamma} u_1(N) + \dots \\ v &= t^{-1/4} [v_0(N) + t^{-1/2+1/3\gamma} v_1(N) + \dots] \\ p &= t^{-1/2} [p_0(N) + t^{-1/2+1/3\gamma} p_1(N) + \dots] \\ \rho &= t^{-1/2} [\rho_0(N) + t^{-1/2+1/3\gamma} \rho_1(N) + \dots], & h &= h_0(N) + t^{-1/2+1/3\gamma} h_1(N) + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

В самом деле, сращивание внутреннего и внешнего разложений будет теперь обеспечено, если, в соответствии с простейшей формой принципа сращивания [4], будут удовлетворены следующие граничные условия при $N \rightarrow \infty$ для функций внутреннего разложения:

в первом приближении

$$y_0(N) \rightarrow Y_{00}, \quad u_0(N) \rightarrow 0, \quad p_0(N) \rightarrow P_{00}, \quad h_0(N) \rightarrow 0 \quad (3.5)$$

во втором приближении

$$y_1(N) \rightarrow Y_{01} N^{1-2/3\gamma}, \quad u_1(N) \rightarrow 0, \quad p_1(N) \rightarrow 0, \quad h_1(N) \rightarrow H_{00} N^{-2/3\gamma} \quad (3.6)$$

4. Подставляя в исходные уравнения (1.4) разложения (3.4) и сохраняя главные члены, получим систему уравнений первого приближения, которая может быть записана в виде

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho_0 h_0 = \text{const}, & u_0'' + \frac{\gamma-1}{4\gamma\rho_0} N u_0' &= 0 \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\sigma} h_0'' + \frac{1}{4} N h_0' - \frac{\gamma-1}{2\gamma} h_0 &= -\frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 u_0'' \\ y_0' &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{h_0}{p_0}, & v_0 &= \frac{3}{4} y_0 - \frac{\gamma-1}{4\gamma} N \frac{h_0}{p_0} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Граничными условиями для этих уравнений являются (3.5), а также условия на поверхности пластины, которые запишем в виде

$$u_0(0) = 1, \quad y_0(0) = h_0'(0) = 0 \quad (4.2)$$

т. е. потребуем, кроме выполнения граничных условий (1.6), (1.7), чтобы пластина в первом приближении перемещалась в своей плоскости. Сформулированная задача первого приближения полностью совпадает с задачей, рассмотренной в работе [2]. Ее решение является достаточно простым. Прежде всего заметим, что второе из уравнений (4.1) интегрируется в квадратурах. Его частным решением, удовлетворяющим граничным условиям, будет

$$u_0 = 1 - \left(\frac{\gamma-1}{2\pi\gamma\rho_0} \right)^{1/2} \int_0^N \exp \left[-\frac{\gamma-1}{8\gamma\rho_0} N^2 \right] dN \quad (4.3)$$

После этого может быть проинтегрировано третье уравнение. Однако для определения распределения давления по поверхности пластины в этом нет необходимости. Для решения этой задачи достаточно найти выражение для $y_0(N)$ при $N \rightarrow \infty$. На основании четвертого из уравнений (4.1) имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} y_0(N) = \frac{\gamma-1}{\gamma\rho_0} \int_0^\infty h_0 dN \quad (4.4)$$

Интеграл в этом выражении легко вычисляется при помощи третьего уравнения системы (4.1), если принять во внимание граничные условия для $h_0(N)$ и экспоненциальный характер стремления этой функции к нулю при $N \rightarrow \infty$ (см. [2]). В результате получаем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} y_0(N) = \frac{2\gamma}{3\gamma-2} \left(\frac{\gamma-1}{\pi\gamma h_0} \right)^{1/2} \quad (4.5)$$

Используя граничные условия (3.5), перепишем его в виде

$$Y_{00} = \frac{2\gamma}{3\gamma - 2} \left(\frac{\gamma - 1}{\pi\gamma P_{00}} \right)^{1/2} \quad (4.6)$$

Полученное соотношение и будет граничным условием, которого не доставало для системы уравнений внешнего невязкого потока. Это условие единственным образом определяет постоянную c в уравнении ударной волны (1.5) и граничных условиях (2.4) и, таким образом, оно полностью замыкает задачу первого приближения.

5. Перейдем к рассмотрению задачи второго приближения. После подстановки разложений (3.4) в систему (1.4) и приравнивания соответствующих членов разложения получим систему линейных дифференциальных уравнений для функций второго приближения.

Второе и последнее из уравнений (1.4) вместе с граничными условиями (3.6) при этом дают

$$p_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} (\rho_0 h_1 + h_0 \rho_1) = 0 \quad (5.1)$$

После этого на основании первого из уравнений (1.4) и граничного условия (3.6) для u_1 находим, что $u_1 = 0$.

Тогда уравнение для определения функции h_1 после несложных преобразований с учетом (5.1), а также результатов первого приближения принимает вид

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\sigma} h_1'' + \frac{1}{4} N h_1' + \frac{1}{6\gamma} h_1 = 0 \quad (5.2)$$

Его решение должно удовлетворять последнему из граничных условий (3.6), а также условию (1.7) на теплоизолированной поверхности

$$h_1(N) \rightarrow H_{00} N^{-2/3\gamma}, \quad h_1'(0) = 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty \quad (5.3)$$

Наконец, уравнение для функции y_1 имеет вид

$$y_1' = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{h_1}{p_0} \quad (5.4)$$

причем функция $y_1(N)$ должна удовлетворять первому¹ из условий (3.6).

Последовательно интегрируя (5.2) и (5.4), найдем значение функции $y_1(0)$, определяющее поперечное смещение пластины

$$y \approx t^{1/4 + 1/3\gamma} y_1(0) \quad (5.5)$$

Заметим, что при получении уравнений второго приближения в исходных уравнениях были отброшены члены, отношение которых к сохраняемым было порядка $t^{-1/2 + 1/3\gamma}$, а при написании разложения (3.4) на основании (3.3) порядок старшего из отброшенных членов был $t^{-1/2}$. Поэтому решение рассмотренной задачи во втором приближении справедливо с относительной погрешностью порядка $t^{-1 + 1/3\gamma}$ или $t^{-1/2}$, в то время как относительная ошибка первого приближения имеет порядок $t^{-1/2 + 1/3\gamma}$.

¹ Нетрудно проверить, что асимптотический характер поведения функций внутреннего разложения при $N \rightarrow \infty$, предписываемый граничными условиями (3.5), (3.6) полностью соответствует тому, который следует из непосредственного анализа дифференциальных уравнений для этих функций.

6. Численные расчеты были проведены для значений $\gamma = 1.4$, $\sigma = 1.0$.

Система уравнений (2.3) для внешнего поля течения интегрировалась с целью определения постоянных в выражениях (2.7) по методу Рунга — Кутты. Уравнение (5.2) с граничными условиями (5.3), определяющее распределение энтальпии в пограничном слое, решалось методом прогонки. Расчет поля течения во внутренней области (интегрирование (4.1)) не производился.

Постоянные, определяющие закон распространения ударной волны c и изменение давления p_0 на поверхности пластины, получены равными $c = 1.1082$, $p_0 = 0.3432$.

Значение постоянной $y_1(0)$, определяющее искомое поперечное перемещение пластины, найдено равным $y_1(0) = 0.2362$.

7. Уравнения плоского установившегося движения вязкого теплопроводного газа могут быть записаны в следующей безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[h \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[h \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[h \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[h \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (7.1) \\ \rho \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) &= u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \\ &+ 2h \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + h \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \\ &\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho h \end{aligned}$$

Здесь составляющие вектора скорости отнесены к скорости невозмущенного потока U_∞ , давление — к удвоенному скоростному напору $\rho_\infty U_\infty^2$, плотность — к плотности в невозмущенном потоке ρ_∞ , удельная энтальпия — к величине U_∞^2 . Независимые переменные отнесены к характерной длине

$$L = C U_\infty / \rho_\infty \quad (7.2)$$

Здесь C — константа пропорциональности в зависимости коэффициента вязкости от энтальпии, которая вновь принята линейной (1.1).

Вводя в рассмотрение функцию тока ψ , определяемую соотношениями

$$\partial \psi / \partial x = -\rho v, \quad \partial \psi / \partial y = \rho u \quad (7.3)$$

преобразуем уравнения (7.1) к независимым переменным $x_1 \psi$;

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \rho v \frac{\partial p}{\partial \psi} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \rho v \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \left[\frac{4}{3} h \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \rho v \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) - \frac{2}{3} \rho h u \frac{\partial v}{\partial \psi} \right] + \\ &+ \rho u \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\rho h u \frac{\partial u}{\partial \psi} + h \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \rho v \frac{\partial v}{\partial \psi} \right) \right] \\ \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho u \frac{\partial p}{\partial \psi} &= \rho u \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{4}{3} \rho h u \frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{2}{3} h \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \rho v \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) \right] + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial x} - \rho v \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \left[\rho h u \frac{\partial u}{\partial \psi} + h \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \rho v \frac{\partial v}{\partial \psi} \right) \right] \quad (7.4) \\ \rho u \frac{\partial h}{\partial x} - u \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \rho v \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \left[h \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \rho v \frac{\partial h}{\partial \psi} \right) \right] + \frac{1}{\sigma} \rho u \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\rho h u \frac{\partial h}{\partial \psi} \right) + \\ &+ 2h \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \rho v \frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\rho u \frac{\partial v}{\partial \psi} \right)^2 \right] + h \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\partial v}{\partial x} - \rho v \frac{\partial v}{\partial \psi} \right)^2 - \\ &- \frac{2}{3} h \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \rho v \frac{\partial u}{\partial \psi} + \rho u \frac{\partial v}{\partial \psi} \right)^2 \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial \psi} &= 1, \quad u \frac{\partial y}{\partial x} = v, \quad p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho h \end{aligned}$$

Задача будет состоять в построении асимптотического решения этих уравнений, соответствующего стационарному движению газа за ударной волной, имеющей форму

$$y = cx^{3/4} \quad (7.5)$$

и удовлетворяющего граничным условиям на теплоизолированной полубесконечной поверхности $\psi = 0$, форма которой $y = f(x)$ подлежит определению. Эти условия будут иметь вид

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \psi} = \frac{f'(x) \partial h / \partial x}{\rho [1 + f'^2(x)]} \quad (7.6)$$

8. Начнем с рассмотрения асимптотического разложения, справедливого для внешней части потока, и вновь ограничимся приближением, в котором эта область течения может рассматриваться как невязкая. Представим разложения для этой области в виде

$$\begin{aligned} y &= \xi^{3/4} [Y_0(v) + \xi^{-1/2} Y_1(v) + \dots], & u - 1 &= \xi^{1/2} [U_0(v) + \xi^{-1/2} U_1(v) + \dots] \\ v &= \xi^{-1/4} [V_0(v) + \xi^{-1/2} V_1(v) + \dots], & p &= \xi^{-1/2} [P_0(v) + \xi^{-1/2} P_1(v) + \dots] \\ \rho &= R_0(v) + \xi^{-1/2} R_1(v) + \dots, & h &= \xi^{-1/2} [H_0(v) + \xi^{-1/2} H_1(v) + \dots] \end{aligned} \quad (8.1)$$

где независимые переменные ξ, v определены соотношениями

$$x = \xi, \quad \psi = \xi^{3/4} n = \xi^{3/4} [v + \xi^{-1/2} \Psi_1(v) + \dots] \quad (8.2)$$

Здесь применяется разложение одной из независимых переменных для того, чтобы, следуя методу работы [5], получить решение для внешнего невязкого течения, справедливое во всем поле потока, в том числе, и вблизи поверхности пластины. Это необходимо потому, что, в отличие от задачи, рассмотренной в первой части работы, первые члены разложений (8.1) будут представлять не точное решение задачи для внешнего невязкого потока, а лишь приближенное ее решение, имеющее при $v \rightarrow 0$ особенности, не свойственные точному решению.

На основании (8.2) получаем следующие формулы преобразования производных к независимым переменным ξ, v :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{3}{4} \xi^{-1} v \frac{\partial}{\partial v} + \frac{3}{4} \xi^{-3/2} (v \Psi_1' - \frac{1}{3} \Psi_1) \frac{\partial}{\partial v} + \dots \\ \frac{\partial}{\partial \psi} &= \xi^{-3/4} \frac{\partial}{\partial v} - \xi^{-5/4} \Psi_1' \frac{\partial}{\partial v} - \dots \end{aligned} \quad (8.3)$$

Граничными условиями для решения внешней задачи будут условия на ударной волне (7.5), которые в предельном случае $M_\infty \rightarrow \infty$ имеют вид

$$\begin{aligned} n = c, \quad y = c \xi^{3/4}, \quad u - 1 &= - \frac{9c^2}{8(\gamma + 1)} \xi^{-1/2} \left[1 - \frac{9}{16} c^2 \xi^{-1/2} + O(\xi^{-1}) \right] \\ v &= \frac{3c}{2(\gamma + 1)} \xi^{-1/4} \left[1 - \frac{9}{16} c^2 \xi^{-1/2} + O(\xi^{-1}) \right] \\ p &= \frac{9c^2}{8(\gamma + 1)} \xi^{-1/2} \left[1 - \frac{9}{16} c^2 \xi^{-1/2} + O(\xi^{-1}) \right] \\ \rho = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad h &= \frac{9\gamma c^2}{8(\gamma + 1)^2} \xi^{-1/2} \left[1 - \frac{9}{16} c^2 \xi^{-1/2} + O(\xi^{-1}) \right] \end{aligned} \quad (8.4)$$

Подставляя в исходную систему уравнений (7.4) и граничные условия (8.4) разложения (8.1), (8.3) и сохраняя главные члены, получим сис-

темы дифференциальных уравнений и граничные условия первого приближения, полностью эквивалентные задаче об одномерном нестационарном движении невязкого газа (2.1), (2.4), рассмотренной в первой части работы. Поэтому, заменяя обозначение независимой переменной t на ξ , можно без всякого изменения использовать соответствующие формулы § 2.

Для продольной составляющей скорости в первом приближении имеем

$$U_0 + \frac{V_0^2}{3} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{R_0} = 0 \quad (8.5)$$

Отсюда

$$U_0 = U_{00} v^{-2/3\gamma} + O(v^0) \quad \text{при } v \rightarrow 0 \quad \left(U_{00} = -\frac{\gamma}{\gamma-1} A_0^{1/\gamma} P_{00}^{1-1/\gamma} \right) \quad (8.6)$$

9. Уравнения второго приближения, после несложных преобразований с использованием соотношений первого приближения, могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} U_1 + V_0 V_1 + H_1 + \frac{1}{2} U_0^2 &= 0 \\ \frac{3}{4} (v V_1)' - \frac{3}{4} (v \Psi_1' - \frac{1}{3} \Psi_1) V_0' &= P_1' - \Psi_1' P_0' \\ \frac{3}{2} v^2 (P_1/P_0 - \gamma R_1/R_0)' + v (P_1/P_0 - \gamma R_1/R_0) &= -(v \Psi_1' - \frac{1}{3} \Psi_1) \\ Y_1' + \frac{1}{R_0} \left(U_0 + \frac{R_1}{R_0} \right) &= \Psi_1' Y_0' \\ \frac{3}{4} v Y_1' - \frac{1}{4} Y_1 + V_1 - V_0 U_0 &= \frac{3}{4} (v \Psi_1' - \frac{1}{3} \Psi_1) Y_0' \\ P_1 &= \frac{\gamma-1}{\gamma} (R_0 H_1 + H_0 R_1) \end{aligned} \quad (9.1)$$

Чтобы устранить во втором приближении энтропийные особенности (при $v \rightarrow 0$) более высокого порядка, чем в первом, можем, следуя методу работы [5], положить в четвертом из уравнений (9.1)

$$\Psi_1' = U_0 + \frac{R_1}{R_0} \quad (9.2)$$

Тогда оно примет вид

$$Y_1' = 0 \quad (9.3)$$

Теперь эти два уравнения вместе с остальными уравнениями (9.1) образуют замкнутую систему. Граничные условия для этой системы уравнений на основании (8.4) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \Psi_1(c) = 0, \quad Y_1(c) = 0, \quad U_1(c) &= \frac{81c^4}{128(\gamma+1)}, \quad V_1(c) = -\frac{27c^3}{32(\gamma+1)} \\ P_1(c) &= -\frac{81c^4}{128(\gamma+1)}, \quad R_1(c) = 0, \quad H_1(c) = -\frac{81\gamma c^4}{128(\gamma+1)^2} \end{aligned} \quad (9.4)$$

Первым из этих граничных условий устранено смещение линий тока вблизи ударной волны. Уравнение (9.3) вместе с условием (9.4) дает

$$Y_1(v) = 0 \quad (9.5)$$

Второе из уравнений (9.1) может быть теперь проинтегрировано. Его решение, удовлетворяющее граничным условиям (9.4), имеет вид

$$\frac{P_1}{P_0} - \gamma \frac{R_1}{R_0} = -\frac{9}{16} c^{3/3} v^{-2/3} - \frac{2}{3} v^{-1} \Psi_1(v) \quad (9.6)$$

Совместное рассмотрение уравнений (9.1), (9.2), (9.5), (9.6) с учетом результатов первого приближения (2.5), (2.7) позволяет определить пове-

дение функций второго приближения при $\nu \rightarrow 0$. Их приближенные представления в этой области будут иметь вид

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \Psi_{10}\nu^{1/3} + O(\nu^{1-2/3\gamma}), & U_1 &= U_{10}\nu^{-2/3-2/3\gamma} + O(\nu^{-4/3\gamma}) \\ V_1 &= V_{10}\nu^{-2/3\gamma} + O(\nu^{1-4/3\gamma}), & P_1 &= O(\nu^{1/3}) \\ R_1 &= R_{10}\nu^{-2/3+2/3\gamma} + O(\nu^0), & H_1 &= H_{10}\nu^{-2/3-2/3\gamma} + O(\nu^{-4/3\gamma}) \end{aligned} \quad (9.7)$$

причем коэффициенты в этих формулах связаны с коэффициентами функций первого приближения (2.8) соотношениями

$$\begin{aligned} \Psi_{10} &= -\frac{27c^{8/3}}{16(2-\gamma)}, & U_{10} &= -\frac{9\gamma c^{8/3}}{16(\gamma-1)(2-\gamma)} A_0^{1/\gamma} P_{00}^{1-1/\gamma} \\ V_{10} &= -\frac{3\gamma}{4(\gamma-1)} A_0^{1/\gamma} V_{00} P_{00}^{1-1/\gamma}, & R_{10} &= -\frac{9c^{8/3}}{16(2-\gamma)} A_0^{-1/\gamma} P_{00}^{1/\gamma} \\ H_{10} &= \frac{6\gamma c^{8/3}}{16(\gamma-1)(2-\gamma)} A_0^{1/\gamma} P_{00}^{1-1/\gamma} \end{aligned} \quad (9.8)$$

в которых постоянная A_0 определяется формулой (2.6).

10. Во внутренней области течения безразмерной независимой переменной порядка единицы будет

$$N = \psi \xi^{-1/4} \quad (10.1)$$

Для определения вида решения в этой области выразим функции внешнего поля течения через независимую переменную внутреннего разложения

$$n = N \xi^{-1/2} \quad (10.2)$$

и рассмотрим их поведение при $\xi \rightarrow \infty$ и фиксированном значении N . С этой целью прежде всего подставим в (10.2) разложение для независимой переменной n (8.2) и найдем, таким образом, следующую связь независимых переменных внутреннего и внешнего разложений:

$$\nu = N \xi^{-1/2} - \Psi_{10} N^{1/3} \xi^{-2/3} + O(\xi^{-1+1/3\gamma}) \quad (10.3)$$

Используя представления (2.7), (8.6) и (9.7) для функций первого и второго приближений, входящих в разложения (8.1), получим

$$y = \xi^{3/4} \left[Y_{00} + Y_{01} N^{1-2/3\gamma} \xi^{-1/2+1/3\gamma} - \left(1 - \frac{2}{3\gamma}\right) \Psi_{10} Y_{01} N^{1/3-2/3\gamma} \xi^{-2/3+1/3\gamma} + O(\xi^{-1+2/3\gamma}) \right]$$

$$u = 1 + U_{00} N^{-2/3\gamma} \xi^{-1/2+1/3\gamma} + \left(\frac{2}{3\gamma} \Psi_{10} U_{00} + U_{10} \right) N^{-2/3-2/3\gamma} \xi^{-2/3+1/3\gamma} + O(\xi^{-1+2/3\gamma}) \quad (10.4)$$

$$v = \xi^{-1/4} \left[V_{00} + (N V_{01} + V_{10}) N^{-2/3\gamma} \xi^{-1/2+1/3\gamma} + \left\{ \left(-1 + \frac{2}{3\gamma}\right) V_{01} N + \frac{2}{3\gamma} V_{10} \right\} \Psi_{10} N^{-2/3-2/3\gamma} \xi^{-2/3+1/3\gamma} + O(\xi^{-1+2/3\gamma}) \right]$$

$$p = \xi^{-1/2} [P_{00} + O(\xi^{-1/2})]$$

$$\rho = R_{00} N^{2/3\gamma} \xi^{-1/3\gamma} + \left(-\frac{2}{3\gamma} \Psi_{10} R_{00} + R_{10} \right) N^{-2/3+2/3\gamma} \xi^{-1/6-1/3\gamma} + O(\xi^{-1/2})$$

$$h = H_{00} N^{-2/3\gamma} \xi^{-1/2+1/3\gamma} + \left(\frac{2}{3\gamma} \Psi_{10} H_{00} + H_{10} \right) N^{-2/3-2/3\gamma} \xi^{-2/3\gamma+1/3\gamma} + O(\xi^{-1+2/3\gamma})$$

Эти выражения подсказывают, что асимптотические разложения для искомых функций во внутренней области течения следует искать в виде

$$\begin{aligned} y &= \xi^{3/4} [y_0(N) + \xi^{-1/2+1/3\gamma} y_1(N) + \xi^{-2/3+1/3\gamma} y_2(N) + \dots] \\ u &= u_0(N) + \xi^{-1/2+1/3\gamma} u_1(N) + \xi^{-2/3+1/3\gamma} u_2(N) + \dots \\ v &= \xi^{-1/4} [v_0(N) + \xi^{-1/2+1/3\gamma} v_1(N) + \xi^{-2/3+1/3\gamma} v_2(N) + \dots] \\ p &= \xi^{-1/2} [p_0(N) + \xi^{-1/2+1/3\gamma} p_1(N) + \xi^{-2/3+1/3\gamma} p_2(N) + \dots] \\ \rho &= \xi^{-1/2} [\rho_0(N) + \xi^{-1/2+1/3\gamma} \rho_1(N) + \xi^{-2/3+1/3\gamma} \rho_2(N) + \dots] \\ h &= h_0(N) + \xi^{-1/2+1/3\gamma} h_1(N) + \xi^{-2/3+1/3\gamma} h_2(N) + \dots \end{aligned} \quad (10.5)$$

При этом сращивание внутреннего и внешнего разложений будет обеспечено [5], если будут выполнены следующие граничные условия при $N \rightarrow \infty$ для функций внутреннего разложения:

$$\text{в первом приближении} \quad (10.6)$$

$$y_0(N) \rightarrow Y_{00}, \quad u_0(N) \rightarrow 1, \quad p_0(N) \rightarrow P_{00}, \quad h_0(N) \rightarrow 0$$

$$\text{во втором приближении} \quad (10.7)$$

$$y_1(N) \rightarrow Y_{01} N^{1-2/3\gamma}, \quad u_1(N) \rightarrow U_{00} N^{-2/3\gamma}, \quad p_1(N) \rightarrow 0, \quad h_1(N) \rightarrow H_{00} N^{-2/3\gamma}$$

$$\text{в третьем приближении} \quad (10.8)$$

$$y_2(N) \rightarrow -\left(1 - \frac{2}{3\gamma}\right) \Psi_{10} Y_{10} N^{-2/3\gamma+1/3}, \quad p_2(N) \rightarrow 0$$

$$u_2(N) \rightarrow \left(\frac{2}{3\gamma} \Psi_{10} U_{00} + U_{10}\right) N^{-2/3-2/3\gamma}, \quad h_2(N) \rightarrow \left(\frac{2}{3\gamma} \Psi_{10} H_{00} + H_{10}\right) N^{-2/3-2/3\gamma}$$

11. Подставляя разложение (10.5) в исходную систему уравнений (7.4) и приравнявая главные члены, получим систему уравнений первого приближения, которая может быть записана в виде

$$p_0 = \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho_0 h_0 = \text{const} \quad (11.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 u_0 (u_0 u_0')' + \frac{1}{4} N u_0 u_0' + \frac{\gamma-1}{2\gamma} h_0 &= 0 \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 \left[u_0 \left(\frac{h_0}{\sigma} + \frac{u_0^2}{2} \right)' \right]' + \frac{1}{4} N \left(h_0 + \frac{u_0^2}{2} \right)' &= 0 \\ \rho_0 u_0 y_0' = 1, \quad v_0 = u_0 ({}^{3/4}y_0 - {}^{1/4}N y_0') & \end{aligned}$$

Граничными условиями для этих уравнений являются (10.6) а также условия на твердой поверхности, которые на основании (7.6), (7.7) запишем в виде

$$y_0(0) = u_0(0) = h_0'(0) = 0 \quad (11.2)$$

т. е. примем, что в первом приближении обтекаемое тело является плоской полубесконечной пластиной. Если число Прандтля $\sigma = 1$, то интегралом уравнения притока тепла, удовлетворяющим граничным условиям (10.6) и (11.2), будет

$$h_0 + {}^{1/2}u_0^2 = {}^{1/2} \quad (11.3)$$

В дальнейшем рассматривается только этот случай. Уравнение количества движения тогда сводится к виду

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 u_0 (u_0 u_0')' + \frac{1}{4} N u_0 u_0' + \frac{1}{4} \frac{\gamma-1}{\gamma} (1-u_0^2) = 0 \quad (11.4)$$

где, в соответствии с третьим из граничных условий (10.6), $p_0 = P_{00}$.

Граничными условиями (11.4) будет второе из условий (10.6) и (11.2)¹. После определения $u_0(N)$ функция $y_0(N)$ находится интегрированием четвертого из уравнений (11.1), которое с учетом (11.3) и (11.2) дает

$$y_0 = \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1}{p_0} \int_0^N \frac{1-u_0^2}{u_0} dN \quad (11.5)$$

Наконец, первое из граничных условий (10.6) приводит к соотношению

$$Y_{00} = \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1}{P_{00}} \int_0^\infty \frac{1-u_0^2}{u_0} dN \quad (11.6)$$

в котором подынтегральная функция параметрически зависит от P_{00} . Поэтому (11.6) будет необходимым граничным условием для внешней задачи первого приближения, связывающим величины Y_{00} и P_{00} . Оно, тем самым, единственным образом определяет постоянную c , т. е. форму поверхности ударной волны, и полностью замыкает систему соотношений первого приближения. Задача обтекания полубесконечной пластины в такой постановке была решена в работе [3].

12. Перейдем теперь к рассмотрению второго и третьего приближений. Прежде всего на основании второго из уравнений (7.4) и граничного условия (107) получаем

$$p_1 = \frac{\gamma-1}{\gamma} (\rho_0 h_1 + h_0 \rho_1) = 0 \quad (12.1)$$

Третье из уравнений (7.4), после некоторых преобразований с учетом соотношений первого приближения, приводит к интегралу

$$h_1 + u_0 u_1 = 0 \quad (12.2)$$

Это решение удовлетворяет граничным условиям (10.7), так как $H_{00} + U_{00} = 0$ согласно (2.8) и (8.7). Оно удовлетворяет также, с необходимой степенью приближения, граничным условиям на стенке, в чем можно легко убедиться подстановкой в (7.6) разложений (10.5).

¹) Заметим, что введением переменных

$$\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma p_0} \right)^{1/2} \int_0^N \frac{dN}{u_0}, \quad f_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma p_0} \right)^{1/2} N$$

уравнение (11.4) может быть приведено к известной форме

$$\frac{d^3 f_0}{d\eta^3} + f_0 \frac{d^2 f_0}{d\eta^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \left[1 - \left(\frac{df_0}{d\eta} \right)^2 \right] = 0$$

с граничными условиями

$$f_0 = \frac{df_0}{d\eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad \frac{df_0}{d\eta} \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty$$

Теперь первое из уравнений количества движения (7.4) после некоторых преобразований приводит к следующему уравнению для функции u_1 :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 (u_0 u_1)'' + \frac{1}{4} N u_1' - \left[\frac{\gamma-1}{4\gamma} \frac{1+u_0^2}{u_0^2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3\gamma} \right) \right] u_1 = 0 \quad (12.3)$$

Граничными условиями для него будет второе из условий (10.7), а также условие прилипания (7.6), т. е.

$$u_1(0) = 0, \quad [u_1(N)]' \rightarrow U_{00} N^{-2/3\gamma} \quad \text{при } N \rightarrow \infty \quad (12.4)$$

Наконец, функция $y_1(N)$ удовлетворяет уравнению вида

$$y_1' + \frac{\gamma-1}{2\gamma p_0} \frac{1+u_0^2}{u_0^2} u_1 = 0$$

При этом граничным условием будет первое из условий (10.7)¹.

В результате интегрирования (12.4) находится значение функции $y_1(0)$ на стенке, определяющее ее форму во втором приближении. Аналогично находится система соотношений для третьего приближения:

интегралы

$$p_2 = \frac{\gamma-1}{\gamma} (\rho_0 h_2 + h_0 \rho_2) = 0, \quad h_2 + u_0 u_2 = 0 \quad (12.5)$$

дифференциальное уравнение для функции $u_2(N)$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 (u_0 u_2)'' + \frac{1}{4} N u_2' - \left[\frac{\gamma-1}{4\gamma} \frac{1+u_0^2}{u_0^2} + \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3\gamma} \right) \right] u_2 = 0 \quad (12.6)$$

граничные условия

$$u_2(0) = 0, \quad u_2(N) \rightarrow \left(\frac{2}{3\gamma} \Psi_{10} U_{00} + U_{10} \right) N^{-2/3-2/3\gamma} \quad \text{при } N \rightarrow \infty \quad (12.7)$$

уравнение для функции

$$y_2' + \frac{\gamma-1}{2\gamma p_0} \frac{1+u_0^2}{u_0^2} u_2 = 0 \quad (12.8)$$

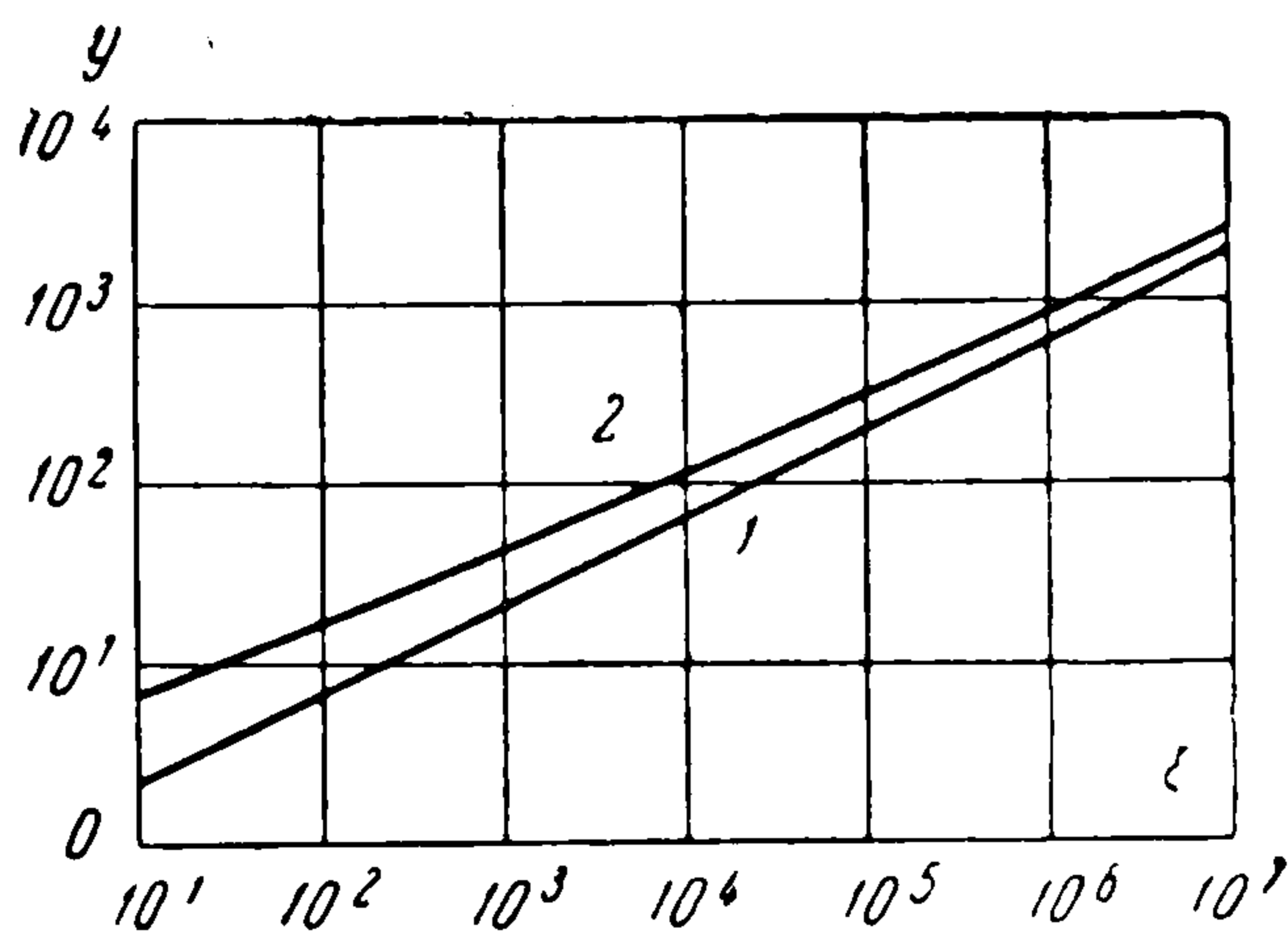
Решение которого должно удовлетворять первому из условий (10.8). В результате может быть получено значение функции $y_2(0)$.

Таким образом, искомая форма стенки, на которой реализуется распределение давления, приписываемое в теории первого приближения плоской полубесконечной пластине, будет

$$y \approx y_1(0) \xi^{1/4+1/3\gamma} + y_2(0) \xi^{1/12+1/3\gamma} \quad (12.9)$$

Заметим, что этот результат, в соответствии с проведенными выше оценками отброшенных членов, имеет относительную погрешность порядка $\xi^{-1+2/3\gamma}$ или $\xi^{-1/2}$, в то время как теория первого приближения содержит относительную ошибку порядка $\xi^{-1/2+1/3\gamma}$.

¹ Заметим, что характер асимптотического поведения всех функций внутреннего разложения, предписываемый граничными условиями (10.6) — (10.8), полностью соответствует характеру поведения, следующему из рассмотрения дифференциальных уравнений для этих функций.



Фиг. 1

13. В качестве примера было рассчитано поле вязкого течения для случая $\gamma = 1.4$, $\sigma = 1.0$. Значения параметров, определяющих форму ударной волны, а также закон распределения давления, были взяты из решения, полученного в работе [3], $c = 1.4938$, $p_0' = 0.6268$.

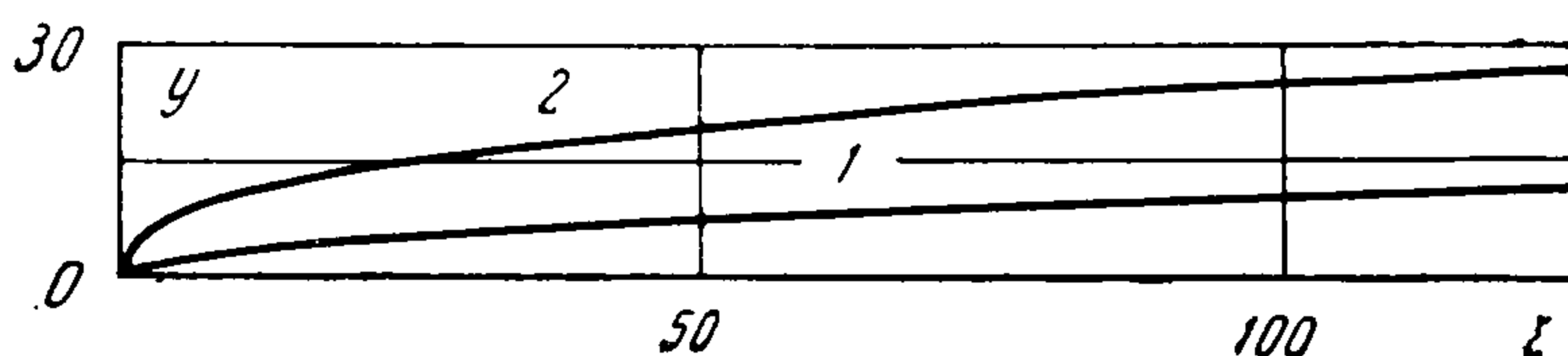
Интегрирование уравнения (11.4) проводилось методом итераций. Для этого оно записывалось в виде

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 u_0''(k) + \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 \frac{u_0'(k-1)}{u_0(k-1)} + \frac{1}{4} N \frac{1}{u_0(k-1)} \right] u_0'(k) - \frac{1}{4} \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1+u_0(k-1)}{u_0^2(k-1)} u_0(k) + \frac{1}{4} \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1+u_0(k-1)}{u_0^2(k-1)} = 0 \quad (13.1)$$

и в качестве первого приближения для $u_0(k)$ принималась линейная функция.

Сходимость итераций определялась оценкой

$$\sum_{i=1}^n |u_0^{i(k-1)} - u_0^i(k)| < \varepsilon, \quad \varepsilon = 0.0001 \quad (13.2)$$

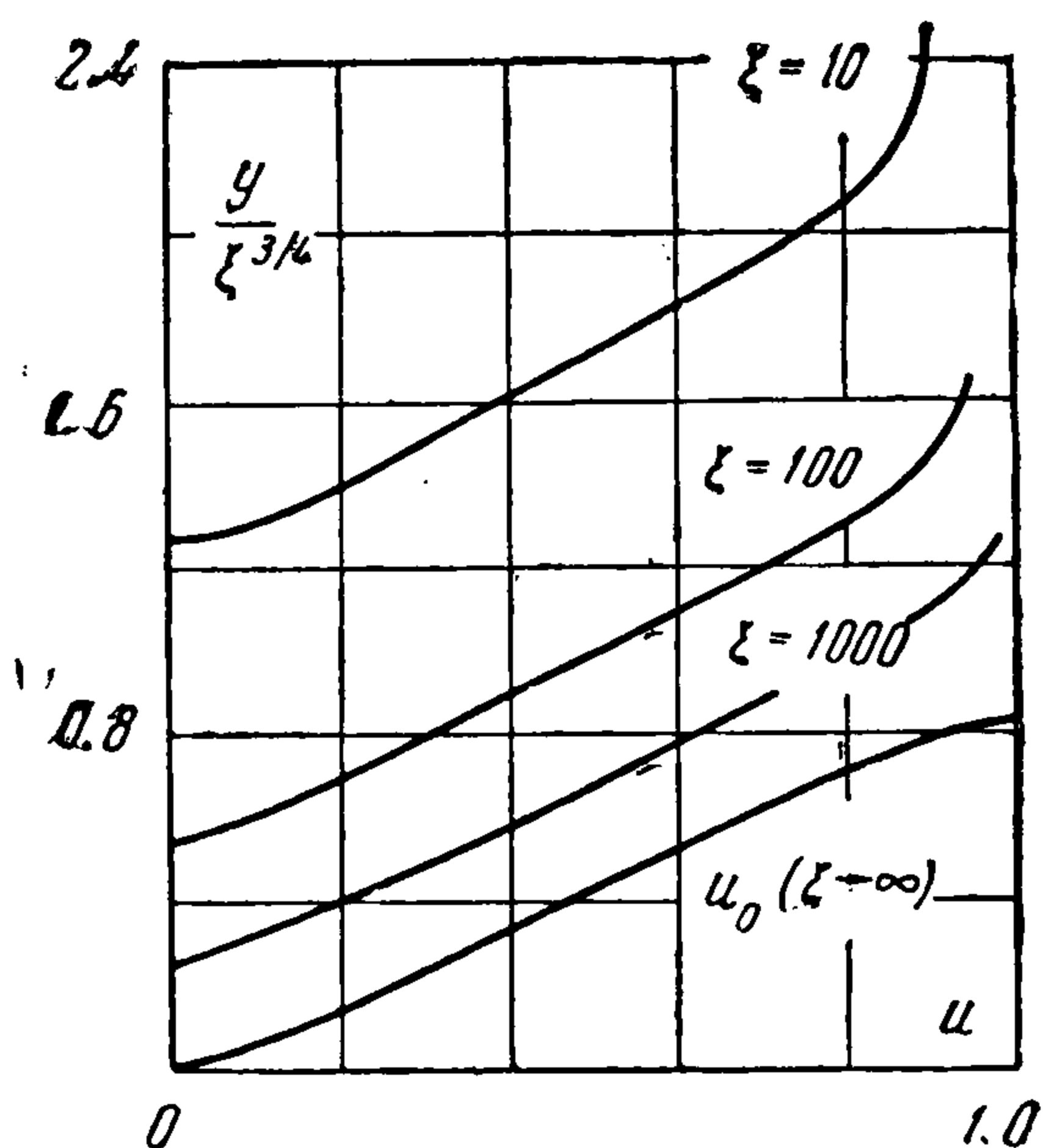


Фиг. 2

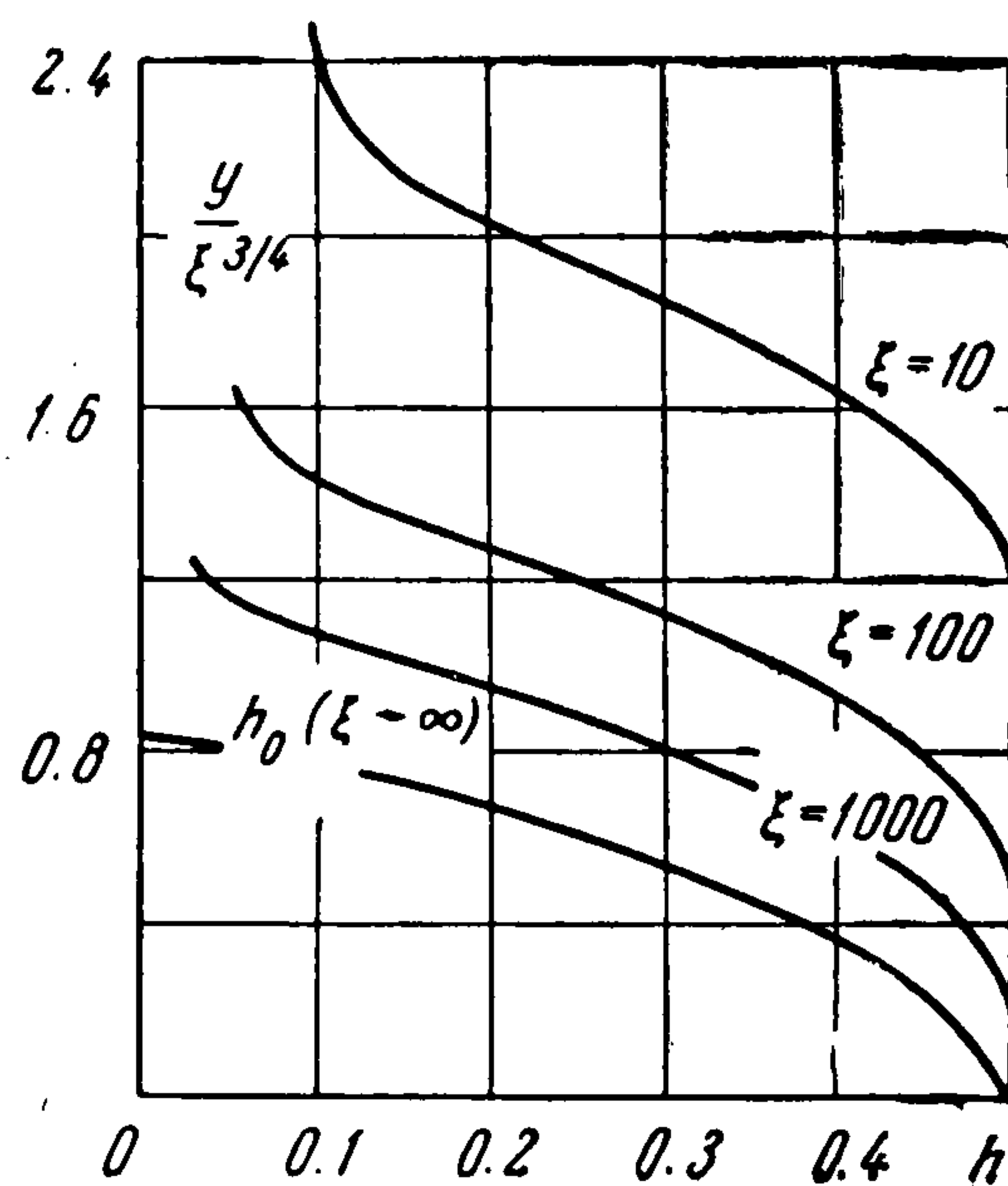
При интегрировании уравнения (13.1) в каждом из приближений, а также при интегрировании уравнений (12.3) и (12.6) использовался метод прогонки.

Результаты расчетов течения во внутренней (вязкой) области показаны на фиг. 1—5. Форма тела в первом приближении — кривая 1, во втором — кривая 2.

Как видно из фиг. 1, на достаточно больших расстояниях от передней кромки вклад члена, учитывающего энтропийный эффект в ядре внешнего потока, становится несущественным.



Фиг. 3



Фиг. 4

Форма передней части контура тела показана на фиг. 2.

Профили скорости энтальпии и плотности приведены соответственно на фиг. 3—5 в виде зависимостей от $y/x^{3/4}$ для значений $\xi = 10^1, 10^2, 10^3$. Там же приводятся результаты первого приближения [3], соответствующие предельному автомодельному решению ($\xi \rightarrow \infty$).

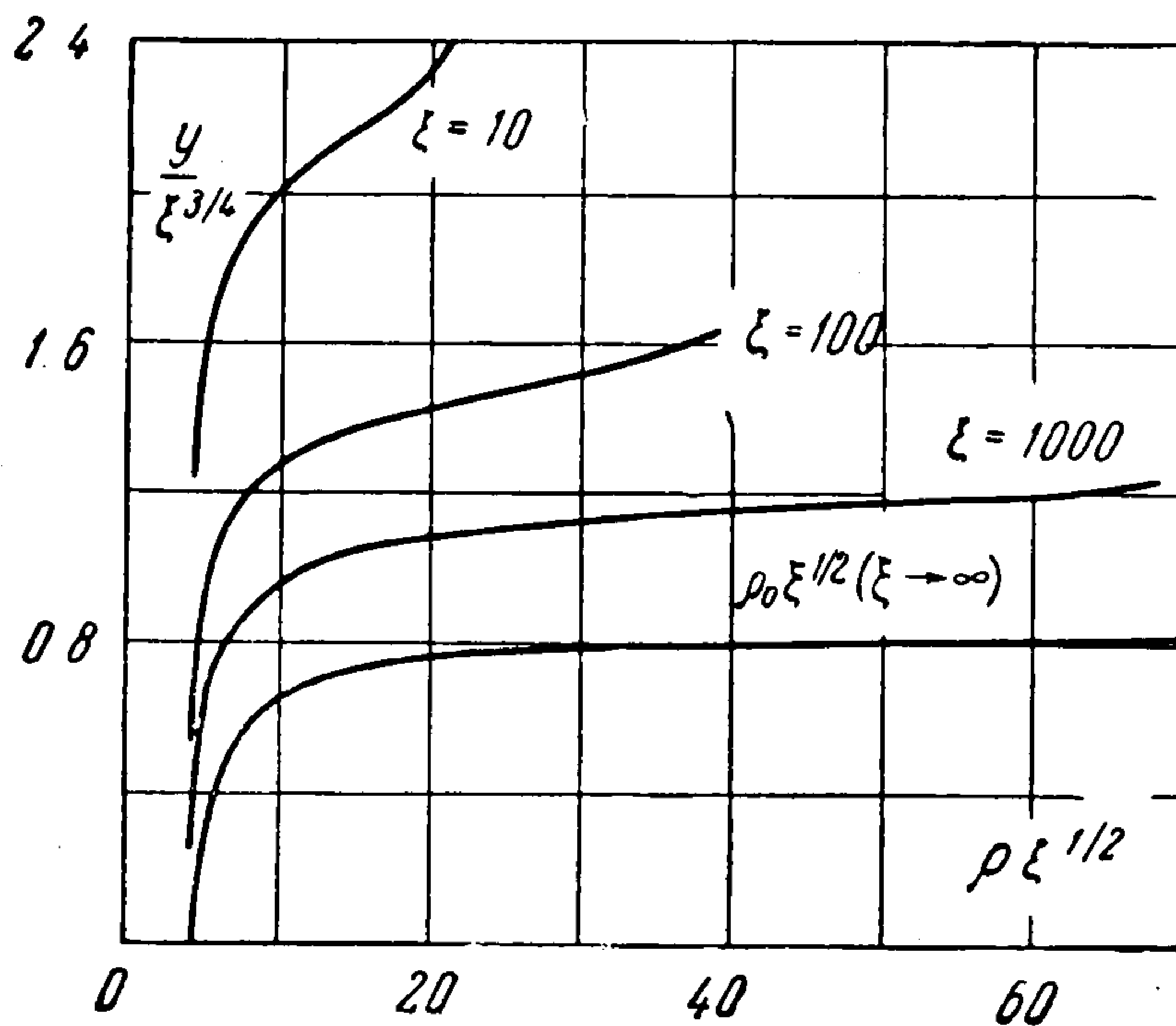
Проведенное исследование показывает, что рассмотрение задачи обтекания тонкого тела вязким гиперзвуковым потоком газа с числом Маха $M_\infty \rightarrow \infty$, как задачи о сильном взаимодействии пограничного слоя у поверхности тела с невязкой областью поля течения, позволяет получить решение этой задачи в более высоком приближении, чем это делалось до сих пор. Дальнейшее уточнение полученных результатов (определение следующих членов асимптотических разложений) будет приводить к необходимости учета вязкости во внешней части поля течения и дополнительных членов уравнений (отбрасываемых в теории пограничного слоя) во внутренней области. Однако, как показано в работах [1,6], подобное рассмотрение, строго говоря, уже неправомерно, так как порядок учитываемых при этом членов уравнений Навье — Стокса такой же, как и порядок барнеттовских членов, не учитываемых этими уравнениями.

Использованный во второй части работы метод построения асимптотического решения на основе сращивания внутреннего и внешнего разложений с одновременным использованием метода ПЛГ, по-видимому, может быть использован при решении многих других задач, в которых внутренний предел внешнего асимптотического решения является особым.

Поступила 25 XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Hayes W. D., Probstein R. F. Hypersonic flow theory. Acad. [press. N. Y., 1959.
2. Stewartson K. On the motion of a flat plate at high speed in a viscous compressible fluid Impulsive motion. Proc. Camb. Phil. Soc. 1955, vol. 51, p. 202—219.
3. Stewartson K. On the motion of a flat plate at high speed in a viscous compressible fluid Steady motion. J. Aero. Sci., 1955, vol. 22, p. 303—309.
4. Kaplun S., Lagerstrom P. A. Asymptotic expansions of Navier—Stokes solutions for small Reynolds numbers. J. Rat. Mech. Anal., 1957, vol. 6, No. 5.
5. Сычев В. В. О методе малых возмущений в задачах обтекания тонких затупленных тел гиперзвуковым потоком газа. ПМТФ, 1962, № 6.
6. Галкин В. С. Об эффектах скольжения при обтекании тел гиперзвуковым слабо разреженным потоком. Инж. ж., 1963, т. III, вып. 1.



Фиг. 5