

О СИЛЬНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ
С НЕВЯЗКИМ ПОТОКОМ НА ТРЕУГОЛЬНОМ КРЫЛЕ¹

М. Д. Ладыженский

(Москва)

Рассмотрено обтекание бесконечно тонкого треугольного крыла под нулевым углом атаки вязким гиперзвуковым потоком при числе Маха невозмущенного потока $M_\infty = \infty$. Как было показано в работе [1], решение уравнений пространственного пограничного слоя, которое строится независимо от левой и правой кромок крыла, совпадает с решением для сильного взаимодействия на плоской пластине, обтекаемой со скольжением. Ввиду параболичности системы уравнений это решение не удовлетворяет условию симметрии течения в плоскости симметрии крыла и потому теряет здесь силу. В настоящей работе строится решение в окрестности плоскости симметрии крыла. Ввиду того, что вторичные токи в пограничном слое направлены к плоскости симметрии крыла, толщина эффективного тела, обусловленного вытесняющим действием пограничного слоя, увеличивается. Утолщение эффективного тела приводит к усилению ударной волны и увеличению давления по сравнению со значением, полученным из решения для пластины, обтекаемой со скольжением. Показано, что при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности поперечное сечение эффективного тела в плоскости, перпендикулярной вектору скорости невозмущенного потока, приближается к полукругу.

1. Рассмотрим уравнения пространственного пограничного слоя в декартовых координатах xuz (ось x проходит через вершину треугольного крыла и направлена вдоль вектора U_∞ набегающего потока (фиг. 1), ось u перпендикулярна плоскости крыла).

Примем следующие обозначения: u, v, w — составляющие вектора скорости на оси x, y, z соответственно, p — давление, ρ — плотность, i — энтальпия, i_0 — энтальпия торможения, μ — коэффициент вязкости, κ — показатель адиабаты (газ предполагается совершенным), σ — число Прандтля. В случае обтекания треугольной пластины под нулевым углом атаки система уравнений пространственного пограничного слоя имеет автомодельное решение [1], зависящее от двух переменных η и ξ

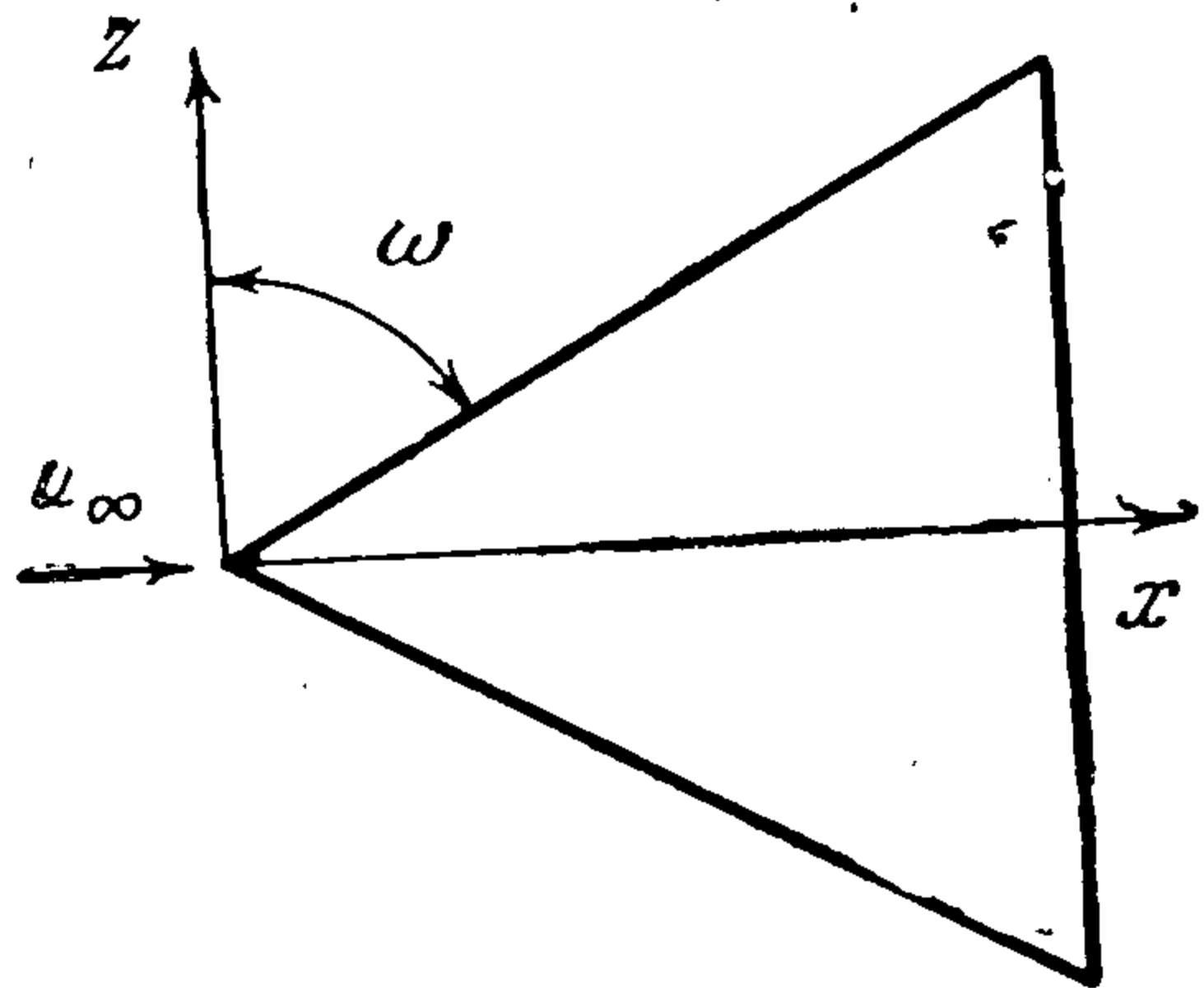
$$\begin{aligned} u &= U_\infty U(\eta, \xi), & v &= R_x^{-1/4} U_\infty V(\eta, \xi), & w &= U_\infty W(\eta, \xi) \\ p &= R_x^{-1/2} \rho_\infty U_\infty^2 P(\xi), & \rho &= R_x^{-1/2} \rho_\infty R(\eta, \xi), & i &= U_\infty^2 h(\eta, \xi) \\ i_0 &= U_\infty^2 H(\eta, \xi), & \eta &= R_x^{1/4} y/x, & \xi &= z/x, & R_x &= \rho_\infty U_\infty x / \mu_0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ρ_∞ — плотность невозмущенного потока, μ_0 — коэффициент вязкости, соответствующий температуре торможения. Уравнение внешней границы пограничного слоя имеет вид

$$y = \delta(x, z) = x R_x^{-1/4} \Phi(\xi) \quad (1.2)$$

¹ Выпуск журнала уходил в производство, когда в редакцию пришло печальное сообщение о трагической преждевременной смерти молодого талантливого ученого. В конце статьи приводятся основные данные его биографии, а также список опубликованных работ.

От редакции.



Фиг. 1

Функциональная связь между безразмерным давлением $P(\zeta)$ и функцией $\Phi(\zeta)$ берется из решения уравнений невязкого течения, рассчитываемого по «теории полос» [2] и отделенного от вязкого течения резкой границей. Уравнения пространственного пограничного слоя после подстановки выражений (1.1) сводятся к системе уравнений параболического типа, для которых ζ будет характеристикой.

Вследствие параболичности уравнений решение (оно строится от передней кромки) совпадает с решением для сильного взаимодействия на пластине со скольжением. Это решение, зависящее от одной переменной, имеет вид [1]

$$U = \chi'(\lambda), \quad W = \psi'(\lambda) + \zeta_0 \chi'(\lambda), \quad H = g(\lambda)$$

$$\psi \psi'' + 2\varepsilon(1 + \zeta_0^2)L = 4\varepsilon^{-1} \psi''' \quad (\varepsilon = (\kappa - 1)/2\kappa)$$

$$\psi \chi'' - 2\varepsilon \zeta_0 L = 4\varepsilon^{-1} \chi''' \quad (\zeta_0 = \operatorname{ctg} \omega) \quad (1.3)$$

$$g' \psi = \frac{4}{\varepsilon} \left(\frac{g'}{\sigma} \right)' + \frac{4}{\varepsilon} \frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \frac{d}{d\lambda} \frac{(2g - L)}{2} \right]$$

$$L = 2g - (1 + \zeta_0^2)(\chi')^2 - (\psi')^2 - 2\zeta_0 \psi' \chi'$$

$$\psi(0) = \psi'(0) = \chi(0) = \chi'(0) = 0, \quad \psi'(\infty) = -\zeta_0, \quad \chi'(\infty) = 1$$

$$g(0) = g_b \quad (\text{или } g'(0) = 0), \quad g(\infty) = 1/2$$

Здесь ω — угол стреловидности передней кромки крыла, g_b — энтальпия, соответствующая температуре стенки. Переменная λ связана с η и ζ преобразованием А. А. Дородницына

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{A}(\zeta_0 - \zeta)^{1/4}} \int_0^\eta R d\eta, \quad \text{или} \quad \frac{\eta}{(\zeta_0 - \zeta)^{3/4}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A}} \int_0^\lambda L(\lambda) d\lambda \quad (1.4)$$

$$A = \frac{3\varepsilon \zeta_0}{4} \sqrt{C} \int_0^\infty L(\lambda) d\lambda$$

где C — постоянная в уравнении $p = \rho_\infty U_\infty^2 C \theta^2$, связывающем давление в невязком потоке с углом наклона θ внешней границы пограничного слоя с осью x . Невязкий поток, который строится от передней кромки, соответствует обтеканию степенного тела $y = a(x \cos \omega - z \sin \omega)^{3/4}$, где a — некоторая постоянная. Поэтому вместо приближения [1] касательных клиньев $C = 1/2(\kappa + 1)$ можно взять точное значение C , полученное из расчетов автомодельного невязкого течения: $C = 1.42$ при $\kappa = 7/5$ и $C = 1.77$ при $\kappa = 5/3$ (см., например [2], стр. 455).

В уравнениях (1.3) для простоты принята линейная зависимость коэффициента вязкости от энтальпии $\mu/\mu_0 = 2h$. В случае обтекания теплоизолированной пластины ($g'(0) = 0$) и $\sigma = 1$ уравнения (1.3) упрощаются [1] ввиду наличия интеграла $g = 1/2$. Безразмерное давление P ,

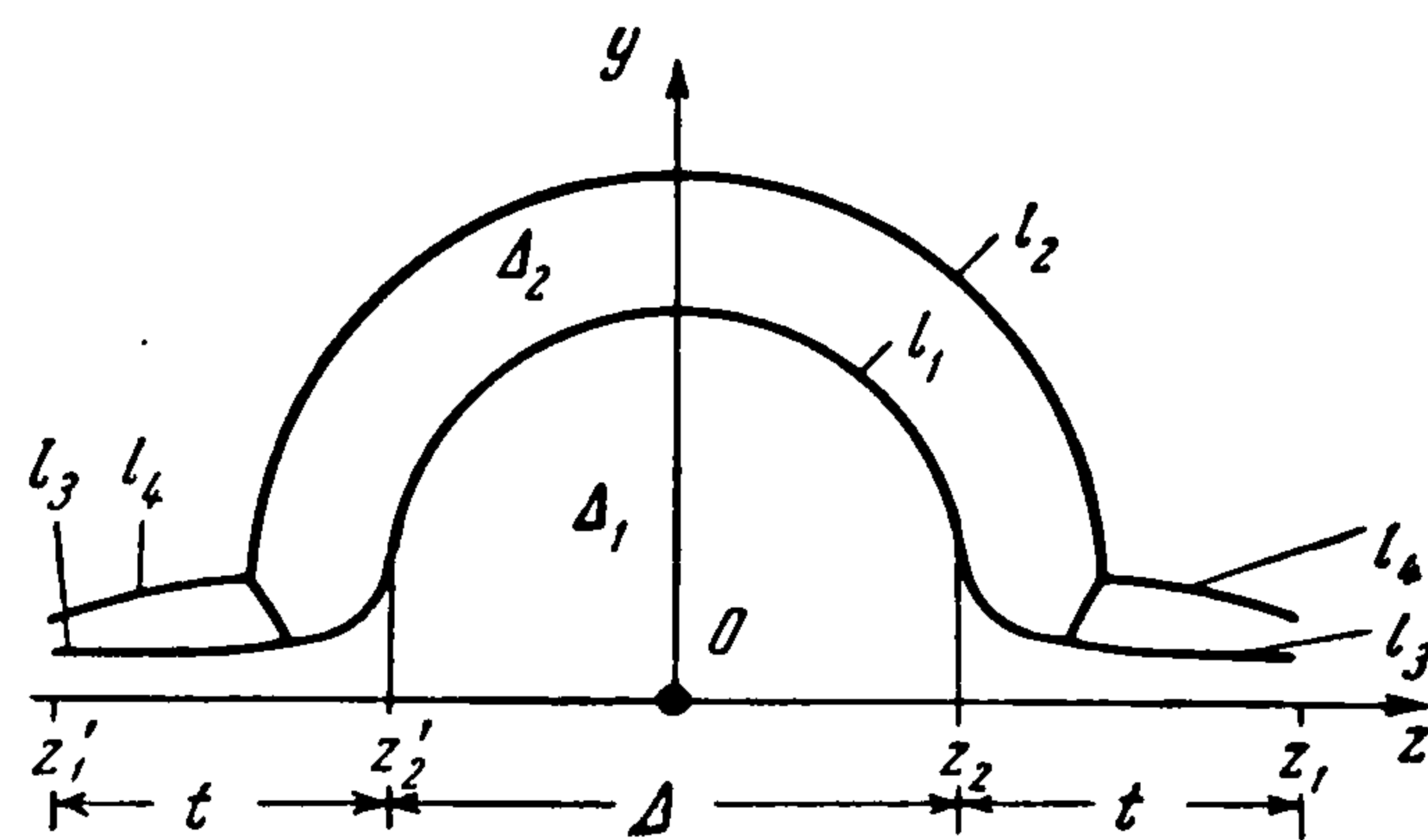
плотность R , толщина пограничного слоя Φ определяются соотношениями

$$P = \frac{A}{(\xi_0 - \xi)^{1/2}}, \quad R = \frac{P}{\varepsilon L}, \quad \Phi = B(\xi_0 - \xi)^{3/4}, \quad B = \frac{4\sqrt{A}}{3\xi_0\sqrt{C}} \quad (1.5)$$

(R находится из уравнения состояния). Решение (1.3) — (1.5) не удовлетворяет условию $w = 0$ при $z = 0$, т. е. оно теряет силу в окрестности плоскости симметрии крыла. В пограничном слое z -составляющая вектора скорости направлена к плоскости симметрии крыла [1].

В результате столкновения течений от левой и правой кромок крыла эффективное тело, образованное внешней границей пограничного слоя, утолщается. Обозначим характерный поперечный размер области вблизи плоскости симметрии, где несправедливо решение (1.3), (1.4), (1.5), через Δ , а саму область назовем Δ -областью.

Назовем Δ_1 -областью ту часть области Δ , которая заполнена газом, притекающим из пограничного слоя, а Δ_2 -областью — область невязкого потока, обтекающего эффективное тело Δ_1 . На фиг. 2 изображена предполагаемая картина течения в плоскости $x = \text{const}$. Здесь l_1 — граница между областями Δ_1 и Δ_2 , l_2 — ударная волна, отделяющая область Δ_2 от невозмущенного потока, l_3 и l_4 — внешняя граница пограничного слоя и ударная волна, соответствующие обтеканию пластины при наличии скольжения. Параметры течения в Δ_1 -области оцениваются



Фиг. 2

$$y \sim \Delta, \quad z \sim \Delta, \quad u \sim U_\infty, \quad v \sim \frac{U_\infty \Delta}{x} \quad (1.6)$$

$$w \sim \frac{U_\infty \Delta}{x}, \quad p \sim \frac{\rho_\infty U_\infty^2 \Delta^2}{x^2}, \quad i \sim U_\infty^2, \quad \rho \sim \frac{\rho_\infty \Delta^2}{x^2}$$

Оценки для u и i , обычные для пограничного слоя, подтверждаются в дальнейшем расчетом течения в Δ -области интегральным методом, оценки для v и w следуют из уравнения неразрывности, p (как и параметры течения в Δ_2 -области) оценивается обычным для гиперзвукового течения образом, как при обтекании тонкого тела толщины Δ , величина ρ определяется из уравнения состояния (ε не предполагается малым).

Оценим расход Q из пограничного слоя в Δ_1 -область

$$Q = \int_0^x dx \int_0^\delta \rho(x, y, 0) W(x, y, 0) dy, \quad \delta = \delta(x, 0) \quad (1.7)$$

Здесь $\delta = \delta(x, z)$ — толщина пограничного слоя. Как показано далее, $\Delta/x \rightarrow 0$ при $R_x \rightarrow \infty$. Поэтому расход Q определяется при помощи решения для пластины, обтекаемой со скольжением, в плоскости $z = 0$; получим оценки (δ_* — характерная толщина пограничного слоя)

$$\rho \sim \rho_\infty \delta_*^2/x^2, \quad w \sim U_\infty, \quad Q \sim \rho_\infty U_\infty \delta_*^3/x \quad (\delta_*/x = R_x^{-1/4}) \quad (1.8)$$

Приравняем Q и Q' — расход через Δ_1 -область в направлении оси x , используя оценки (1.6) и (1.8)

$$Q = Q', \quad \rho_\infty U_\infty \delta_*^3 / x \sim \rho_\infty U_\infty \Delta^4 / x^2, \quad \Delta / x \sim (\delta_* / x)^{3/4} \quad (1.9)$$

Таким образом, при $R_x \rightarrow \infty$ отношение Δ / x стремится к нулю медленнее, чем δ_* / x , так что отношение $\Delta / \delta_* \rightarrow \infty$. В дальнейшем рассматривается асимптотическое поведение решения, когда $\Delta / \delta_* \gg 1$.

Найдем соотношение между конвективными и вязкими членами в Δ_1 -области. Пользуясь (1.6) и (1.9), получим в уравнении импульса, спроектированном на ось x , соответственно для суммы конвективных K и наибольшего вязкого V_μ членов оценки

$$\begin{aligned} K &\sim \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{x} \left(\frac{\Delta}{x}\right)^2, & V_\mu &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \sim \frac{\mu_0 U_\infty}{\Delta^2} \\ \frac{V_\mu}{K} &= \frac{\mu_0 U_\infty}{\Delta^2} / \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{x} \left(\frac{\Delta}{x}\right)^2 = \frac{\mu_0}{\rho_\infty U_\infty x} \left(\frac{x}{\Delta}\right)^4 \sim \frac{\delta_*}{x} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Аналогичное соотношение между конвективными и диссипативными членами в Δ_1 -области имеет место для остальных уравнений импульса и для уравнения энергии. Существенно, что течение в Δ_1 -области будет невязким. Разумеется, внутри Δ_1 -области на стенке выполняется условие прилипания и около стенки имеется пограничный слой. Важно, что его толщина много меньше Δ .

Для характерных перепадов Δp_y и Δp_z поперек области Δ_1 из уравнений импульса в проекции на оси y и z имеем, с учетом (1.6), (1.9),

$$\begin{aligned} \Delta p_y &= \frac{\partial p}{\partial y} \Delta \sim \rho u \frac{\partial v}{\partial x} \Delta \sim \rho_\infty U_\infty^2 \left(\frac{\Delta}{x}\right)^4, & \Delta p_z &= \frac{\partial p}{\partial z} \Delta \sim \rho u \frac{\partial w}{\partial x} \Delta \sim \rho_\infty U_\infty^2 \left(\frac{\Delta}{x}\right)^4 \\ \frac{\Delta p_y}{p} &\sim \left(\frac{\Delta}{x}\right)^2 \sim \left(\frac{\delta_*}{x}\right)^{3/2}, & \frac{\Delta p_z}{p} &\sim \left(\frac{\Delta}{x}\right)^2 \sim \left(\frac{\delta_*}{x}\right)^{3/2} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Относительное изменение давления поперек Δ_1 -области стремится к нулю по мере стремления R_x к бесконечности, т. е. с относительной погрешностью порядка $(\delta_* / x)^{3/2}$ давление в Δ_1 -области зависит только от x . Отсюда следует, что граница l_1 между областями Δ_1 и Δ_2 в плоскости $x = \text{const}$ (фиг. 2) является полуокружностью. Только в этом случае давление в области Δ_2 будет постоянным вдоль l_1 , как при обтекании тела вращения, ось которого совпадает с осью x . Осесимметричность течения в Δ_2 -области устанавливается аналогично тому, как в работах [3,4] при анализе течения в энтропийном и пограничном слоях при обтекании тонких вытянутых тел.

2. Утолщение эффективного тела вблизи плоскости симметрии приводит к появлению ударной волны l_2 (фиг. 2), имеющей в плоскости $x = \text{const}$ форму полуокружности. Получим систему уравнений, связывающих параметры течения в начале (сечение z_1 на фиг. 2) и в конце (сечение z_2 на фиг. 2) области взаимодействия ударной волны l_2 с пограничным слоем. В этой области, ширина которой t стремится к нулю при стремлении R_x к бесконечности, уравнения пограничного слоя уже неприменимы, и нужно пользоваться уравнениями Навье — Стокса.

В t -области (так назовем эту область) осуществляется переход от течения в пограничном слое на пластине со скольжением к течению в Δ -области. Параметры течения в t -области имеют характерные значения, промежуточные между значениями в пограничном слое и в Δ -области. В t -области мала плотность, поскольку в пограничном слое $\rho \sim \rho_\infty \delta_*^2 / x^2$, а в Δ -области имеем $\rho \sim \rho_\infty (\delta_* / x)^{3/2}$. Вследствие этого толщина области $\delta(x, z)$ (размер в направлении оси y) совпадает, как и для пограничного слоя, с толщиной вытеснения, т. е. поверхность $y = \delta(x, z)$ следует считать поверхностью тока. На этой поверхности тепловые потоки и компоненты тензора напряжений равны нулю. Запишем уравнения Навье — Стокса в дивергентном виде, проинтегрируем их по объему t -области (x' — некоторое фиксированное значение)

$$0 \leq x \leq x', \quad 0 \leq y \leq \delta(x, z), \quad z_1(x) \leq z \leq z_2(x) \quad (2.1)$$

и преобразуем объемные интегралы к поверхностным.

Учитывая условия прилипания на стенке и условия непротекания и равенства нулю вязких напряжений и тепловых потоков на поверхности $y = \delta(x, z)$, получаем

$$\iint \rho v_n dS_1 + \iint \rho v_n dS_2 = 0 \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \iint (\rho v_n \mathbf{v} + p \mathbf{n} - T_n) dS_1 + \iint (\rho v_n \mathbf{v} + p \mathbf{n} - T_n) dS_2 + \\ + \iint p \mathbf{n} dS_3 + \iint (p \mathbf{n} - T_n) dS_4 = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\iint [\rho v_n i_0 - q_n - (\mathbf{v} T_n)] dS_1 + \iint [\rho v_n i_0 - q_n - (\mathbf{v} T)_n] dS_2 + \iint q_n dS_4 = 0 \quad (2.4)$$

Здесь S_1, S_2, S_3, S_4 — боковые поверхности рассматриваемого объема, которые являются соответственно кусками поверхностей $z = z_1(x), z = z_2(x), y = \delta(x, z)$ и $y = 0$, \mathbf{n} — внешняя по отношению к объему нормаль к его боковой поверхности, v_n — проекция вектора скорости \mathbf{v} на нормаль \mathbf{n} , T — тензор вязких напряжений, T_n — вязкое напряжение, действующее на единичную площадку с нормалью \mathbf{n} , $(\mathbf{v} T)$ — произведение вектора \mathbf{v} на тензор T , q_n и $(\mathbf{v} T)_n$ — проекции векторов теплового потока \mathbf{q} и вектора $(\mathbf{v} T)$ на нормаль \mathbf{n} .

Устремим δ_* / x к нулю. При этом линии $z = z_1(x)$ и $z = z_2(x)$ будут стремиться к линии $z = 0$, так как, очевидно, $z_1 \sim z_2 \sim \Delta$, а v_n станет равным $+w$ на S_1 и $-w$ на S_2 . Уравнение (2.4) запишется

$$\iint \rho w dS_1 - \iint \rho w dS_2 = 0 \quad (2.5)$$

Для дальнейшего понадобится лишь проекция уравнения импульсов (2.3) на ось x . На поверхности S_1 имеем

$$\cos nx = \Delta / x, \quad \cos ny = 0, \quad \cos nz = 1 + O(\Delta^2/x^2) \quad (2.6)$$

$$T_{nx} = \tau_{xx} \cos nx + \tau_{xy} \cos ny + \tau_{xz} \cos nz \sim \tau_{xx} \Delta / x + \tau_{xz}$$

С учетом выражений для напряжений трения получаем оценки

$$\tau_{xx} = \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2\mu}{3} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \sim \frac{\mu_0 U_\infty}{t}, \quad \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \sim \frac{\mu_0 U_\infty}{t} \quad (2.7)$$

Здесь оператор $\partial / \partial z$ оценивается как t^{-1} , τ_{xx} и τ_{xz} оцениваются по наибольшему члену. Члены, стоящие под знаком первого интеграла в уравнении (2.3), спроектированном на ось x , оцениваются так:

$$\rho v_n u \sim \rho_\infty U_\infty^2 \delta_*^2 / x^2, \quad p \cos nx \sim \rho_\infty U_\infty^2 (\delta_* / x)^2 \Delta \quad (2.8)$$

$$T_{nx} \sim \frac{\mu_0 U_\infty}{t}, \quad \frac{p \cos nx - T_{nx}}{\rho v_n u} \sim \Delta + \frac{\mu_0 x^2}{\rho_\infty U_\infty^2 \delta_*^2 t} \sim \Delta + \left(\frac{\delta_*}{x}\right)^2 \frac{x}{t} \lesssim \Delta + \frac{\delta_*}{x}$$

Характерный поперечный размер области t взаимодействия ударной волны с пограничным слоем, во всяком случае, не меньше δ_* (см., например [5]), откуда и получается последняя оценка. Таким образом, в подынтегральном выражении вторым и третьим членом можно пренебречь по сравнению с первым. То же справедливо и для второго интеграла.

На поверхности S_3 имеем $\cos nx \sim \delta_* / x$. На поверхности S_4

$$\cos nx = 0, \quad \cos ny = 1, \quad \cos nz = 0 \quad (2.9)$$

$$\tau_{nx} = \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \sim \frac{\mu_0 U_\infty}{\delta_*}$$

С учетом оценок для площадей $S_1 \sim S_2 \sim \delta_* x$, $S_3 \sim S_4 \sim tx$ имеем

$$\iint \rho v_n u dS_1 \sim \iint \rho v_n u dS_2 \sim \rho_\infty U_\infty^2 \delta_*^3 / x$$

$$\iint p \cos nx dS_3 \sim \rho_\infty U_\infty^2 \delta_*^3 t / x^2, \quad \iint (p \cos nx - T_{nx}) dS_4 \sim \frac{\mu_0 U_\infty}{\delta_*} tx \quad (2.10)$$

Из (2.10) следует, что отношение суммы интегралов по S_3 и S_4 к сумме интегралов по S_1 и S_2 имеет порядок t / x , т. е. стремится к нулю при стремлении R_x к бесконечности. Окончательно уравнение (2.3), спроектированное на ось x , приобретает вид при $R_x \rightarrow \infty$

$$\iint \rho w u dS_1 - \iint \rho w u dS_2 = 0 \quad (2.11)$$

Аналогичным образом уравнение (2.4) может быть записано

$$\iint \rho w i_0 dS_1 - \iint \rho w i_0 dS_2 = 0 \quad (2.12)$$

Уравнения (2.5), (2.11), (2.12) являются аналогами соотношений на разрыве, в который в пределе при $\delta_* / x \rightarrow 0$ стягивается область t . Интегралы по площади S_1 могут быть вычислены, как отмечалось, из решения для пограничного слоя на пластине со скольжением при $\zeta = 0$. С учетом выражений (1.1), (1.4) они могут быть приведены к виду

$$J_1 = \iint \rho w dS_1 = \left(\frac{4}{5}\right) \rho_\infty U_\infty L_*^{3/4} x^{5/4} \sqrt{A \zeta_0^{1/4}} i_1, \quad L_* = \frac{\mu_0}{\rho_\infty U_\infty}$$

$$J_2 = \iint \rho w u dS_1 = \left(\frac{4}{5}\right) \rho_\infty U_\infty^2 L_*^{3/4} x^{5/4} \sqrt{A \zeta_0^{1/4}} i_2 \quad (2.13)$$

$$J_3 = \iint \rho w i_0 dS_1 = \left(\frac{4}{5}\right) \rho_\infty U_\infty^3 L_*^{3/4} x^{5/4} \sqrt{A \zeta_0^{1/4}} i_3$$

$$i_1 = \int_0^\infty W d\lambda, \quad i_2 = \int_0^\infty U W d\lambda, \quad i_3 = \int_0^\infty g W d\lambda$$

Интегралы i_1 , i_2 , i_3 могут быть вычислены после решения уравнений (1.3). Все они сходятся благодаря стремлению W к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$ по экспоненциальному закону.

3. Приступим к расчету течения в Δ -области, для чего воспользуемся интегральным методом. Проинтегрируем уравнения невязкого течения, записанные в дивергентном виде, по объему Δ_1 -области от 0 до x , где x — некоторое фиксированное значение. Учитывается, что поверхность, отделяющая область Δ_1 от области Δ_2 , является поверхностью тока и что в сечениях $z = z_2(x)$ и $z = z_2'(x)$ (фиг. 2) имеются потоки массы, импульса и энергии, определяемые при помощи уравнений (2.5), (2.11), (2.12). Интегральные соотношения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \iint \rho u dS_{\Delta} + 2J_1 = 0, \quad \iint (p + \rho u^2) dS_{\Delta} - \pi \int_0^x p r dr + 2J_2 = 0 \\ \iint \rho u i_0 dS_{\Delta} + 2J_3 = 0, \quad p = \rho_{\infty} U_{\infty}^2 k \left(\frac{dr}{dx}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Множители 2 перед J_1 , J_2 , J_3 появляются из-за наличия притока массы, энергии и импульса в Δ_1 -область от левой и правой кромок крыла; двойные интегралы берутся по площади Δ_1 -области в заданном сечении x , обозначенной через S_{Δ} , второй интеграл в уравнении импульса берется по поверхности l_1 (фиг. 2), отделяющей область Δ_1 от области Δ_2 , $r(x)$ — радиус окружности l_1 (фиг. 2). К трем уравнениям сохранения присоединено соотношение, связывающее давление с углом наклона поверхности l_1 с осью x , k — постоянная величина, которая предполагается известной (см. ниже). Как было показано выше, давление p в Δ_1 -области зависит только от x . Чтобы сделать уравнения (3.1) замкнутыми, примем $u = u(x)$, $\rho = \rho(x)$, т. е. используем простейший вариант интегрального метода. Введем в уравнениях (3.1) безразмерные переменные

$$x = L_* x_0, \quad r = L_* r_0, \quad u = U_{\infty} u_0, \quad p = \rho_{\infty} U_{\infty}^2 p_0, \quad \rho = \rho_{\infty} \rho_0, \quad i_0 = U_{\infty}^2 i_{00} \quad (3.2)$$

Переменная x_0 , очевидно, совпадает с R_x .

С учетом выражений для J_1 , J_2 , J_3 (2.13) и выражения $S_{\Delta} = 0.5\pi r^2$ уравнения (3.1) запишутся в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \rho_0 u_0 r_0^2 = -v i_1 x_0^{5/4}, \quad (p_0 + \rho_0 u_0^2) r_0^2 - 2 \int_0^{x_0} \rho_0 r_0 r_0' dx_0 = -v i_2 x_0^{9/4} \\ \rho_0 u_0 r_0^2 \left(\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{u_0^2}{2} \right) = -v i_3 x_0^{9/4}, \quad p = k (r_0')^2, \quad v = \frac{16 \sqrt{A_1} \xi_0^{1/4}}{5\pi} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Система (3.3) интегродифференциальных уравнений имеет простое решение, удовлетворяющее условию $r_0(0) = 0$. Это решение имеет виде

$$r_0 = \alpha x_0^{13/16}, \quad p_0 = \beta x_0^{-3/8}, \quad \rho_0 = \gamma x_0^{-3/8}, \quad u_0 = \text{const} \quad (3.4)$$

$$\alpha = \left(\frac{256v |i_1| Z}{169k} \right)^{1/4}, \quad \beta = \frac{13}{16} (k v |i_1| Z)^{1/2}, \quad \gamma = \frac{13}{16 (i_2/i_1 + 0.3Z)} \left(\frac{v k |i_1|}{Z} \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

$$u = \frac{i_2}{i_1} + 0.3Z, \quad Z = \frac{\sqrt{\kappa^2 i_2^2 + [0.18(\kappa - 1)^2 + 1.2\kappa(\kappa - 1)] i_1 i_3} - [\kappa + 0.3(\kappa - 1)] i_2}{[0.09(\kappa - 1) + 0.6\kappa] i_1}$$

Входящая в решение величина k определяется из численных расчетов [6] автомодельного решения при обтекании тела вращения степенной формы $y \sim x^n$, $n = 13/16$.

Ниже дана таблица значений α , β , γ , u_0 и T (T — температура в Δ_1 -области, отнесенная к температуре торможения) для $\kappa = 1.4$ и $\kappa = 1.667$ и угла стреловидности передней кромки $\omega = 60^\circ$.

| ω | α | β | γ | u_0 | T |
|----------|----------|---------|----------|-------|-----|
|----------|----------|---------|----------|-------|-----|

Двуатомный газ ($\kappa = 1.4$, $k = 0.950$)

| | | | | | |
|-----|-------|-------|------|-------|-------|
| 30° | 0.548 | 0.189 | 2.55 | 0.694 | 0.518 |
| 45° | 0.612 | 0.235 | 3.18 | 0.694 | 0.518 |
| 60° | 0.664 | 0.277 | 3.69 | 0.689 | 0.525 |
| 75° | 0.678 | 0.288 | 3.80 | 0.685 | 0.530 |

Одноатомный газ ($\kappa = 5/3$, $k = 0.982$)

| | | | | | |
|-----|-------|-------|------|-------|-------|
| 30° | 0.590 | 0.226 | 2.35 | 0.721 | 0.479 |
| 45° | 0.661 | 0.283 | 2.91 | 0.716 | 0.487 |
| 60° | 0.713 | 0.330 | 3.34 | 0.711 | 0.494 |
| 65° | 0.723 | 0.339 | 3.56 | 0.703 | 0.505 |

Величины i_1 , i_2 определялись из расчетов, выполненных А. А. Богачевой, некоторые результаты которых приведены в работе [1]. Расчеты проводились для теплоизолированной поверхности, для которой, как легко видеть, $i_3 = 0.5i_1$.

Из примеров видно, что в Δ_1 -области действительно $u \sim U_\infty$, $T \sim 1$, что подтверждает оценки (1.6).

На фиг. 3 приведены примеры расчетов по формулам (3.4), (3.5) давления p_0 и толщины эффективного тела в зависимости от $x_0 = R_x$ для $\omega = 60^\circ$. Сплошные линии соответствуют $\kappa = 1.4$, а пунктир соответствует $\kappa = 1.667$. Здесь для сравнения даны безразмерные давление p_1 и толщина пограничного слоя y_1 , вычисленные из решения для скользящей пластины при $z = 0$ по формулам, следующим из (1.1), (1.4)

$$p_1 = \frac{A}{\sqrt{R_x \operatorname{ctg} \omega}}$$

$$y_1 = B (R_x \operatorname{ctg} \omega)^{3/4}$$

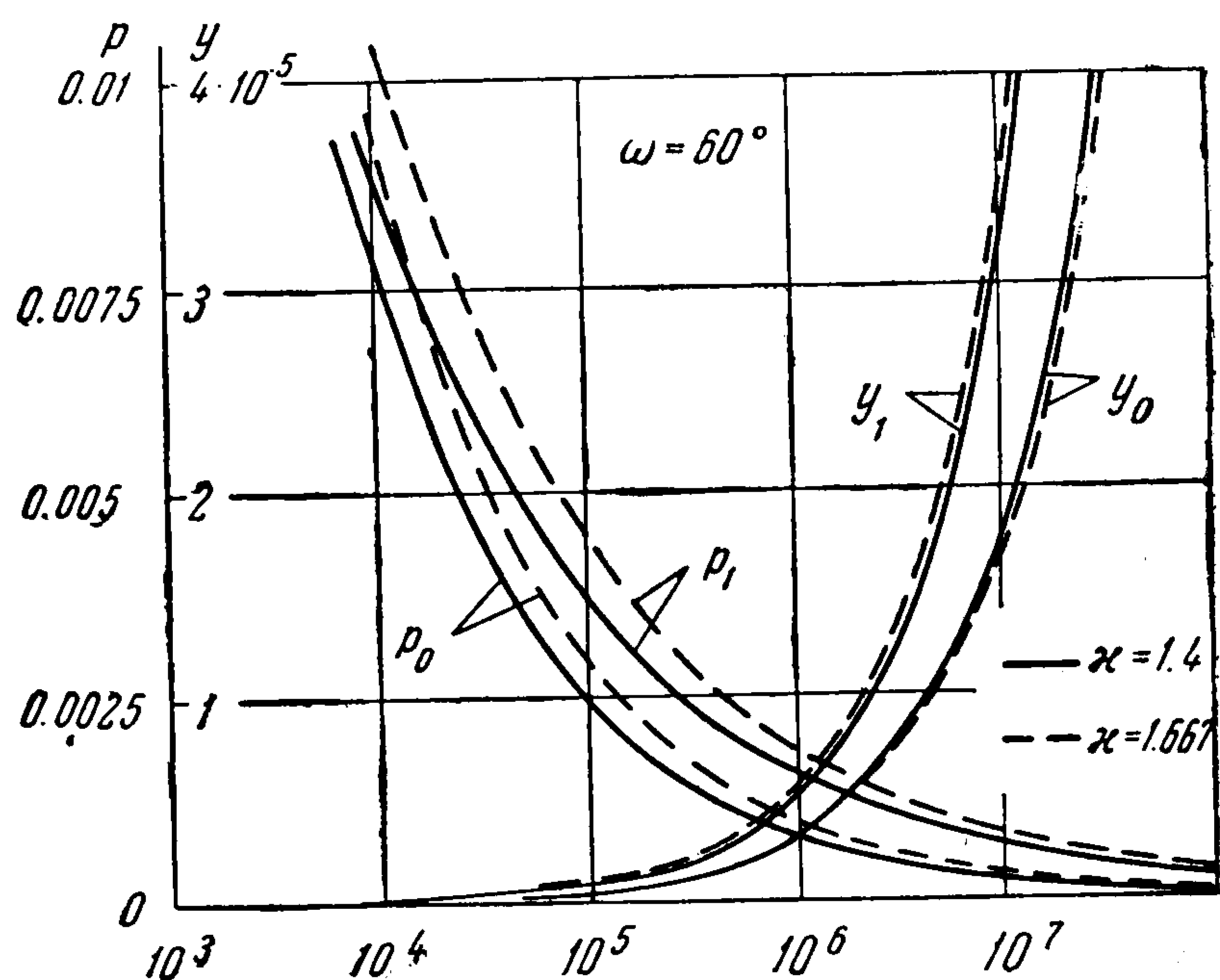
Из фиг. 3 можно сделать вывод, насколько увеличиваются давление и толщина пограничного слоя вблизи плоскости симметрии крыла по сравнению со значениями, вычисленными из решений для пластины со скольжением.

Построенное решение имеет асимптотический характер. Строго говоря, им можно пользоваться при $p_1 \gg p_0$, $y_1 \gg y_0$. Можно думать, что основные качественные закономерности передаются уже при $y_1 > y_0$, $p_1 > p$.

Поступила 10 X 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Л а д ы ж е н с к и й М. Д. О пространственном гиперзвуковом течении около тонких крыльев. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
2. Х е й з У. Д., П р о б с т е й н Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. Изд. иностр. лит., 1962.
3. Л а д ы ж е н с к и й М. Д. Гиперзвуковое правило площадей. Инж. ж., 1961, т. 1, № 1.
4. Л а д ы ж е н с к и й М. Д. Обтекание тонких тел вязким гиперзвуковым потоком. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
5. L e e s L., R e e v e s B. L. Supersonic separated and reattaching laminar flows. General theory and application to adiabatic boundary layer-shock wave interaction. AIAA Report No. 64-4, 1964.
6. Ч е р н ы й Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.



Фиг. 3

От редакции

М. Д. ЛАДЫЖЕНСКИЙ

(10 ноября 1931—15 мая 1965)

Михаил Давидович Ладыженский родился в Одессе, в семье военнослужащего. В 1949 году поступил в Московский Университет на физико-технический факультет, который через два года выделился в самостоятельный институт. После окончания этого института с отличием в 1955 году М. Д. Ладыженский поступил на работу в ЦАГИ.

В 1961 году он защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук на тему «Некоторые задачи газовой динамики гиперзвуковых течений».

Круг научных интересов М. Д. Ладыженского был весьма широким. Ему принадлежит ряд результатов в теории распространения ударных волн от сверхзвукового самолета, в теории пространственных гиперзвуковых течений, в частности по пространственному обтеканию тонких слабозатупленных тел (гиперзвуковое правило площадей). Ряд исследований М. Д. Ладыженского посвящен проблемам управления движения ионизированного газа в магнитных полях при малых магнитных числах Рейнольдса.

Проблемы гиперзвукового полета на больших высотах связаны с изучением вязких гиперзвуковых течений. М. Д. Ладыженский был пионером в теории пространственных гиперзвуковых течений вязкого газа, и эта теория в литературе пока опубликована лишь в тех пределах, в которых она продвинута его трудами.

За цикл работ по исследованию течений в гиперзвуковых соплах и пространственных гиперзвуковых течений в 1961 году он (совместно с О. М. Белоцерковским и В. В. Сычевым) был удостоен премии им. Н. Е. Жуковского I степени.

Кроме работы в Центральном аэро-гидродинамическом институте им. Н. Е. Жуковского М. Д. Ладыженский вел преподавательскую работу в Московском физико-техническом институте.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ М. Д. ЛАДЫЖЕНСКОГО

1. Затухание ударных волн. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
2. Задачи обтекания в магнитной гидродинамике. ПММ, 1959, т. 23, вып. 2.
3. Гиперзвуковое обтекание тел в магнитной гидродинамике. ПММ, 1959, т. 23, вып. 6.
4. О течениях газа с большой сверхзвуковой скоростью. Докл. АН СССР, 1960, т. 134, вып. 2.
5. О гиперзвуковом обтекании затупленных тел. Изв. АН СССР серия Механика и машиностроение, 1961, № 1.
6. Гиперзвуковое правило площадей. Инж. ж. 1961, № 1.
7. Исследование распространения ударных волн в разрядной трубке. ПМТФ, 1961, № 2 (совместно с Л. Г. Черниковой).
8. Обобщение гиперзвукового правила площадей. Изв. АН СССР серия Механика и машиностроение, 1961, № 3.
9. О некоторых интегралах уравнений околозвуковых течений газа. Инж. ж., 1962, т. 2, вып. 1.
10. Анализ уравнений гиперзвуковых течений и решение задачи Коши. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
11. Гиперзвуковое обтекание тонких затупленных эллиптических конусов. Инж. ж., 1962, т. 2, вып. 3. (совместно с А. А. Богачевой).
12. Об истечении вязкого газа в пустоту. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
13. Об одном автомодельном решении уравнений магнитной гидродинамики. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5. (совместно с А. А. Богачевой).
14. О магнитогидродинамическом течении при малых Re_m . Сб. «Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы». Изд-во АН Латв.ССР, 1962.
15. К вопросу об устойчивости плазменного шнура. Сб. «Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы». Изд-во АН Латв.ССР, 1962.
16. О магнитогидродинамическом гиперзвуковом обтекании клина. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.
17. Обтекание тонких тел вязким гиперзвуковым потоком, ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
18. О расчете пограничного слоя сжимаемой жидкости с граничными условиями скольжения. Докл. АН СССР 1964, т. 154, вып. 6. (совместно с В. С. Галкиным).
19. О пространственном гиперзвуковом течении около тонких крыльев. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
20. О гиперзвуковых течениях в соплах. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.