

КРЫЛЬЯ В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Г. Г. Черный

(Москва)

При решении многих прикладных задач механики сплошной среды, приводящих к системам дифференциальных уравнений с частными производными, широкое распространение получили методы интегральных соотношений. Эти методы позволяют при приближенном решении задач уменьшить число независимых переменных в дифференциальных уравнениях и даже свести эти уравнения к алгебраическим.

Большой популярностью уже в течение пятидесяти лет пользуется метод Б. Г. Галеркина. Как известно, в методе Галеркина вид решения выбирается априорно, а интегральные соотношения, обращаясь в алгебраические уравнения, служат для определения входящих в решение постоянных. Л. В. Канторович [1] предложил в задачах с двумя переменными разыскивать решение в виде, содержащем неопределенные функции одного переменного, и определять эти функции из обыкновенных дифференциальных уравнений, в которые обращаются интегральные соотношения. В важной частной проблеме механики жидкостей — теории пограничного слоя — такой подход использовался ранее в методе интегральных соотношений Кармана [2].

В ряде задач метод интегральных соотношений позволил получить хорошие результаты при очень небольшом числе приближений и даже в первом приближении. Для этого важное значение имел выбор априорно задаваемой части решения, основанный на использовании дополнительных сведений о виде искомого решения (примерами могут служить метод Кочина-Лойцянского в теории пограничного слоя [2] или метод, использовавшийся автором при расчете одномерных неустановившихся течений газа с сильными ударными волнами [3]). Применение быстродействующих вычислительных машин дает возможность эффективно находить достаточно высокие приближения в методе интегральных соотношений и тем самым позволяет ослабить требования к выбору априорно задаваемой части решения и формы исходных уравнений. Однако пользование высокими приближениями затрудняет качественный анализ решений аппроксимирующей системы уравнений и интерпретацию [получаемых результатов]. В настоящей работе метод интегральных соотношений применен к трехмерным течениям газа с ударными волнами. Приведен качественный анализ системы уравнений нулевого приближения, и эти уравнения интерпретированы как уравнения двумерного движения газа на обтекаемой поверхности.

Обратимся сначала к основной идее метода интегральных соотношений. Рассмотрим систему n дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно функций u_1, \dots, u_n трех независимых переменных x_1, x_2, z

$$L_i(u) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Пусть требуется найти решение этой системы в области D , причем для определенности будем считать, что область D ограничена поверхностью $\chi(x_1, x_2) = 0$ и поверхностями $z = z_w(x_1, x_2)$, $z = z_s(x_1, x_2)$.

Допустим, что краевые условия имеют вид $\psi_k(u, x_1, x_2) = 0$ на поверхностях $z = z_w$ и $z = z_s$ и $\psi_l^*(u, x_1, x_2, z) = 0$ на поверхности $\chi = 0$ (в зависимости от характера задачи последние условия могут быть и иными).

Пусть нам удалось найти систему функций $\varphi_m(x_1, x_2, z)$, обладающую тем свойством, что любую функцию $u(x_1, x_2, z)$, непрерывную в области D , можно аппроксимировать некоторой линейной комбинацией функций этой системы.

Будем разыскивать приближенное решение задачи в виде

$$u_k^{(N)} = \sum_{m=0}^N u_{km}^{(N)}(x_1, x_2) \Phi_m(x_1, x_2, z)$$

Для отыскания коэффициентов $u_{km}^{(N)}$ служат взятые в необходимом числе интегральные соотношения (условия ортогональности выражения $L_i(u^{(N)})$ функциям ψ_m)

$$\int_{z_w}^{z_s} L_i(u^{(N)}) \psi_m(x_1, x_2, z) dz = 0 \quad (m = 0, 1, \dots)$$

где $\psi_m(x_1, x_2, z)$ — система функций, полная в области D (в частности, системы функций Φ_m и ψ_m могут быть совпадающими), а также граничные условия $\psi_k(u^{(N)}, x_1, x_2) = 0$, дающие конечные соотношения между функциями $u_{km}^{(N)}$. Интегральные соотношения обращаются в дифференциальные уравнения относительно функций $u_{km}^{(N)}$ в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными. Решение этих уравнений разыскивается в области плоскости x_1, x_2 , ограниченной кривой $\chi(x_1, x_2) = 0$. Если краевые условия на границе области имели вид $\psi_l^*(u, x_1, x_2, z) = 0$, то требуемые условия для двумерной задачи найдем из соотношений

$$\int_{z_w}^{z_s} \psi_l^*(u^{(N)}, x_1, x_2, z) \psi_m(x_1, x_2, z) dz = 0$$

Формулировка задачи без труда обобщается на случай, когда, например, поверхность $z = z_s(x_1, x_2)$ не задана, а отыскивается сама. При этом условия на поверхности $z = z_s$ приобретают вид

$$\psi_k(u, x_1, x_2, z, \partial z_s / \partial x_1, \partial z_s / \partial x_2) = 0$$

и число их на единицу возрастает.

Для выбора функций Φ_m и ψ_m может быть рекомендован следующий общий прием. Пусть $\eta_m(z)$ — система линейно независимых функций, полная на отрезке $[a, b]$.

Тогда система функций $\eta_m(\zeta)$, где

$$\zeta = \frac{(b-a)z + az_s - bz_w}{z_s - z_w}$$

полна на отрезке $[z_w, z_s]$. Поэтому в области D можно в качестве Φ_m и ψ_m использовать системы функций $\eta_m(\zeta)$.

Своеобразный выбор ортогонализирующих функций ψ_m был предложен А. А. Дороницыным [4]. Функции ψ_m принимаются им зависящими от выбранного приближения и определяются формулами

$$\psi_m^{(N)} = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < \zeta < (m+1)/N \\ 0 & \text{при } (m+1)/N < \zeta < 1 \end{cases} \quad (m = 0, 1, \dots, N-1)$$

В качестве функций Φ_m , применяемых для аппроксимации решения, берутся степенные функции ζ^m . При использовании такого выбора функций Φ_m и ψ_m О. М. Белоцерковским было дано эффективное численное решение ряда задач о двумерном обтекании тел газом при наличии ударной волны [5].

1. Общие уравнения. Применим изложенные общие соображения к задаче о сверхзвуковом обтекании тела идеальным газом. Для простоты будем считать, что рассматриваемый участок поверхности обтекаемого тела плоский (в частности, можно предполагать, что речь идет об обтекании плоского крыла под углом атаки). Для описания движения газа введем декартовы координаты, выбирая оси x и y лежащими на плоской поверхности тела, а ось z направим по нормали к ним.

Уравнения движения газа в слое между поверхностью крыла и ударной волной возьмем в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, & \quad \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial \rho uw}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \rho vu}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + p) + \frac{\partial \rho vw}{\partial z} = 0, & \quad \frac{\partial \rho wu}{\partial x} + \frac{\partial \rho wv}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w^2 + p) = 0 \\ \frac{\partial \rho uS}{\partial x} + \frac{\partial \rho vS}{\partial y} + \frac{\partial \rho wS}{\partial z} = 0, & \quad \frac{\partial \rho ui^*}{\partial x} + \frac{\partial \rho vi^*}{\partial y} + \frac{\partial \rho wi^*}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u, v, w — компоненты скорости вдоль осей; ρ, p, S, i^* — плотность, давление, энтропия и полное теплосодержание единицы массы газа соответственно. Для совершенного газа с постоянными теплоемкостями

$$S = \frac{p^{1/\gamma}}{\rho}, \quad i^* = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$$

Последнее уравнение системы (1.1), выражающее сохранение полного теплосодержания в частице газа, не является независимым — оно получается как следствие остальных уравнений системы.

Систему уравнений (1.1) можно переписать в общем виде

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial B_i}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь

$$x_1 = x, \quad x_2 = y$$

$$\begin{aligned} A_{11} = \rho u, \quad A_{12} = \rho v, \quad B_1 = \rho w, \quad A_{21} = \rho u^2 + p, \quad A_{22} = \rho uv, \quad B_2 = \rho uw, \\ A_{31} = \rho vu, \quad A_{32} = \rho v^2 + p, \quad B_3 = \rho vw, \quad A_{41} = \rho wu, \quad A_{42} = \rho wv, \quad B_4 = \rho w^2 + p \\ A_{51} = \rho uS, \quad A_{52} = \rho vS, \quad B_5 = \rho wS, \quad A_{61} = \rho ui^*, \quad A_{62} = \rho vi^*, \quad B_6 = \rho wi^* \end{aligned}$$

Пусть $h = h(x, y)$ — толщина слоя газа между поверхностью крыла и ударной волной. На ударной волне, т. е. при $z = h(x, y)$, должны быть выполнены условия сохранения массы, импульса (в проекциях на три оси) и полного теплосодержания. Эти условия в введенных выше обозначениях можно написать следующим образом:

$$\left(B_i - A_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right)_{z=h} = B_i^\infty - A_{ij}^\infty \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 6) \quad (1.3)$$

Верхним индексом ∞ здесь отмечены значения в набегающем потоке.

При $i = 5$, т. е. для энтропии, закон сохранения на ударной волне, как известно, не имеет места. Значение энтропии за ударной волной S_h выражается при помощи уравнений сохранения (1.3) через параметры набегающего потока и $\partial h / \partial x_j$. Для совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями

$$\begin{aligned} S_h = \frac{1}{\rho^\infty} \left[\frac{2}{(\gamma + 1) \rho^\infty} \frac{(B_1 - A_{1j} \partial h / \partial x_j)^2}{1 + (\partial h / \partial x_j) (\partial h / \partial x_j)} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} p^\infty \right]^{1/\gamma} \times \\ \times \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} p^\infty \rho^\infty \frac{1 + (\partial h / \partial x_j) (\partial h / \partial x_j)}{(B_1 - A_{1j} \partial h / \partial x_j)^2} \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Используя это выражение, можно и при $i = 5$ написать

$$\left(B_5 - A_{5j} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right)_{z=h} = B_5^\infty - A_{5j}^\infty \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad (1.5)$$

Здесь введены условные обозначения $B_5^\infty = B_1^\infty S_h$, $A_{5j}^\infty = A_{1j}^\infty S_h$.

Введем, в соответствии с общей теорией, вместо координаты z переменную ζ по формуле

$$\zeta = 2z/h - 1$$

Переменная ζ меняется от -1 до $+1$, причем $\zeta = -1$ соответствует плоскости крыла, а $\zeta = +1$ — поверхности ударной волны. В качестве функций φ_m возьмем полиномы Лежандра $P_m(\zeta)$, образующие полную систему ортогональных функций на отрезке $[-1, +1]$, и будем аппроксимировать искомые функции, например функцию u , выражениями вида

$$u^{(N)} = \sum_{m=0}^N P_m(\zeta) u_m^{(N)}$$

которые назовем N -м приближением для этих функций.

За ортогонализирующие функции ψ_m также примем полиномы Лежандра $P_m(\zeta)$. Умножим почленно уравнения системы (1.2) на полином Лежандра m -го порядка $P_m(\zeta)$ и проинтегрируем их по z от 0 до h

$$\int_0^h P_m(\zeta) \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} dz + \int_0^h P_m(\zeta) \frac{\partial B_i}{\partial z} dz = 0$$

Выполняя несложные преобразования с использованием свойств полиномов Лежандра, получим

при $m = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{h}{2} \int_{-1}^1 A_{ij} d\zeta + \left(B_i - A_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right)_{z=h} - (B_i)_{z=0} = 0$$

при $m = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{h}{2} \int_{-1}^1 P_m A_{ij} d\zeta + \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x_j} \int_{-1}^1 \left[m P_m + \sum_{k=1}^m (2m - 2k + 1) P_{m-k} \right] A_{ij} d\zeta - \\ & - \int_{-1}^1 B_i \sum_{k=1}^n (2m - 4k + 3) P_{m-2k+1} d\zeta + \left(B_i - A_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right)_{z=h} - (B_i)_{z=0} = 0 \\ & \left(n = \frac{m}{2}, \frac{m+1}{2} \text{ соответственно для } m \text{ четных или нечетных} \right) \end{aligned}$$

Используя условия (1.3) и (1.5) на ударной волне и условие $w(x_1, x_2, 0) = 0$ на обтекаемой поверхности, эту систему интегральных соотношений можно переписать в следующей форме ($i = 1, \dots, 6$):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{h}{2} \int_{-1}^1 A_{ij} d\zeta + B_i^\infty - A_{ij}^\infty \frac{\partial h}{\partial x_j} - (B_i)_{z=0} = 0 \quad (m = 0) \\ & \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{h}{2} \int_{-1}^1 (P_m - P_{m-1}) A_{ij} d\zeta + \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x_j} \int_{-1}^1 m (P_m + P_{m-1}) A_{ij} d\zeta - \\ & - \int_{-1}^1 B_i \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k} (2k + 1) P_k d\zeta = 0 \quad (m = 1, 2, 3 \dots) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь $(B_4)_{z=0} = p_w$, остальные $(B_i)_{z=0} = 0$.

Воспользуемся выписанными интегральными соотношениями, граничными условиями (1.3) и (1.5) на ударной волне и граничным условием $w = 0$ на обтекаемой поверхности для определения коэффициентов $u_m^{(N)}, v_m^{(N)}, \dots$ в N -х приближениях искомых функций.

При этом в качестве исходных пяти независимых уравнений системы (1.1) возьмем уравнение неразрывности, проекции уравнения импульсов на оси x и y , уравнение сохранения энтропии и уравнение сохранения полного теплосодержания в проинтегрированном виде. Для совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями последнее уравнение (интеграл Бернулли) имеет вид

$$\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{V^{\infty 2}}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p^{\infty}}{\rho^{\infty}} = i^{*\infty}$$

При получении этого интеграла уже использовано условие на ударной волне (1.3) при $i = 6$.

Таким образом, окончательно при $N \geq 1$ для определения $5(N + 1)$ коэффициентов N -х приближений величин $u^{(N)}, v^{(N)}, w^{(N)}, p^{(N)}, \rho^{(N)}$ и функции h система соотношений содержит $4N$ первых дифференциальных уравнений системы (1.6) (при $i = 1, 2, 3, 5$ и $m = 0, 1, \dots, N - 1$), далее N конечных соотношений

$$\int_{-1}^1 P_m \left[\rho \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} - i^{*\infty} \right) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \right] d\xi = 0 \quad (m = 0, 1, \dots, N - 1), \quad (1.7)$$

четыре соотношения на ударной волне

$$B_i^{(N)} - A_{ij}^{(N)} \frac{\partial h}{\partial x_j} = B_i^{\infty} - A_{ij}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad \text{при } \zeta = 1, \quad i = 1, 2, 3, 5$$

и одно соотношение на поверхности тела

$$w^{(N)} = w_0^{(N)} - w_1^{(N)} + \dots + (-1)^N w_N^{(N)} = 0 \quad \text{при } \zeta = -1 \quad (1.8)$$

При $N = 0$, т. е. в нулевом приближении, система соотношений для определения пяти величин $u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)}, p^{(0)}, \rho^{(0)}$ и h состоит из первых четырех дифференциальных уравнений (1.6) при $i = 1, 2, 3, 5$, первого соотношения (1.7) и условия (1.8).

Эта система уравнений нулевого приближения имеет следующий вид (индексы у искомых величин опущены):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u h}{\partial x} + \frac{\partial \rho v h}{\partial y} + \rho^{\infty} V_v &= 0 \quad \left(V_v = W - U \frac{\partial h}{\partial x} - V \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ \rho h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (p - p^{\infty}) h + \rho^{\infty} V_v (U - u) &= 0 \\ \rho h \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (p - p^{\infty}) h + \rho^{\infty} V_v (V - v) &= 0 \quad (1.9) \\ \rho h \left(u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \rho^{\infty} V_v (S_h - S) &= 0 \\ \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} &= \frac{V^{\infty 2}}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p^{\infty}}{\rho^{\infty}} \end{aligned}$$

Здесь S_h определяется формулой (1.4).

Уравнению неразрывности и уравнениям движения в проекциях на оси x и y может быть придана еще следующая альтернативная форма:

$$\frac{\rho h}{a^2} \left[(a^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} - uv \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + (a^2 - v^2) \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \\ + \rho \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\rho^\infty V_v}{\gamma - 1} \left(\gamma \frac{S_h}{S} - 1 \right) = 0$$

либо $\rho v h \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + (p - p^\infty) \frac{\partial h}{\partial x} + \rho^\infty V_v (U - u) - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho h \frac{\partial \ln S}{\partial x} = 0$

либо $\rho u h \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + (p - p^\infty) \frac{\partial h}{\partial y} + \rho^\infty V_v (V - v) - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho h \frac{\partial \ln S}{\partial y} = 0$

$$(p - p^\infty) \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \rho^\infty V_v \left[(U - u) u + (V - v) v + \right. \\ \left. + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} (S_h - S) \right] = 0$$

Решение системы (1.9) может производиться методами, аналогичными тем, которые используются при решении задач об обычных двумерных течениях газа (нужно лишь учитывать, что уравнение энтропии является существенно нелинейным). В частности, при сверхзвуковых скоростях для решения системы (1.9) можно использовать метод характеристик.

Система (1.9) имеет следующие семейства характеристик:

$$y_{1,2}' = \frac{uv \pm a \sqrt{u^2 + v^2 - a^2}}{u^2 - a^2}, \quad y_3' = \frac{v}{u}, \quad y_4' = \frac{\Phi'_{h_y}}{\Phi'_{h_x}}$$

(характеристики третьего семейства являются сдвоенными).

Вдоль характеристик выполняются соответственно соотношения

$$v' + \frac{y'}{y_1' y_2'} u' = \pm \frac{a \sqrt{u^2 + v^2 - a^2}}{v^2 - a^2} y' \Omega + \\ + \frac{a^2 y'}{\rho h (v^2 - a^2)} \left(\rho u h_x + \rho v h_y + \frac{\rho^\infty V_v}{\gamma - 1} \frac{\gamma S_h - S}{S} \right) \\ \rho h u S' + \rho^\infty V_v (S_h - S) = 0$$

$$\Phi'_{h_x} h_y' = -\Phi'_{h_x} \frac{\partial u}{\partial y} - \Phi'_{h_y} \frac{\partial v}{\partial y} - \Phi'_{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \Phi'_{S} \frac{\partial S}{\partial y}$$

Здесь

$$\Phi \equiv (p - p^\infty) (u h_x + v h_y) + \rho^\infty V_v \left[(U - u) u + (V - v) v + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} (S_h - S) \right] \\ \Omega \equiv \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho u h} \left[(p - p^\infty) h_y + \rho^\infty V_v (V - v) - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho h \frac{\partial \ln S}{\partial y} \right]$$

Величины $\partial u / \partial y$, $\partial v / \partial y$, $\partial \rho / \partial y$, $\partial S / \partial y$ легко выражаются через соответствующие значения u' , v' , ρ' , S' , например

$$\rho h (v - u y') \frac{\partial S}{\partial y} = -\rho h u S' - \rho^\infty V_v (S_h - S)$$

Первые три семейства характеристик будут обычными для двумерных задач газовой динамики акустическими характеристиками и линиями тока, четвертое семейство — новое, не имеющее аналогии в обычных двумерных задачах газодинамики.

Для решения полученной системы должны быть сформулированы краевые условия на границе области в плоскости xy . В дальнейшем ограничимся случаем обтекания плоского крыла с острыми кромками. Тогда границей рассматриваемой области движения будет кромка крыла.

Очевидно, что на той части контура, где ударная волна присоединена к кромке крыла, $h = 0$, а значения остальных искомых функций определяются из соотношений на волне.

Краевые условия на остальной части контура в общем случае не могут задаваться заранее, так что течение с наветренной стороны крыла и течение с его подветренной стороны должны рассчитываться совместно.

Представим мысленно, что при фиксированных условиях в набегающем потоке давление с подветренной стороны крыла уменьшается. Влияние этого уменьшения давления будет передаваться на наветренную сторону крыла вдоль той части кромки, где ударная волна отсоединена и нормальная к кромке составляющая скорости газа меньше скорости звука. При понижении давления эта составляющая будет расти, пока не достигнет скорости звука; после этого влияние понижения давления на течение с наветренной стороны крыла прекратится.

Таким образом, при достаточно большой скорости набегающего потока и больших углах атаки, когда отношение давлений с наветренной и подветренной сторон крыла достаточно велико, в качестве краевого условия на границе области (т. е. на кромке крыла), где $h \neq 0$, следует принять $v_n \geq a$.

2. Линеаризованные уравнения и их решение. Пусть передняя кромка крыла имеет прямолинейный участок, причем на этом участке скачок уплотнения присоединен к кромке и течение за ним сверхзвуковое. Тогда в области влияния прямолинейного участка кромки система уравнений (1.9) дает точное решение, соответствующее поступательному потоку газа. Если участок кромки мало отличается от прямолинейного, то для нахождения течения в области влияния, а также в некоторой окрестности вне ее можно использовать линеаризованные уравнения.

Предположим, что отличие потока за скачком от поступательного характеризуется малым параметром ε , например, предположим, что уравнение передней кромки крыла на рассматриваемом участке имеет вид $x = x^*(y)$, где $x^*(y) = \varepsilon x_1(y)$, а x — величина порядка единицы. Запишем решение системы (1.9) в форме рядов по ε

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, \quad v = v_0 + \varepsilon v_1 + \dots, \quad p = p_0 + \varepsilon p_1 + \dots, \quad (2.1)$$

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \dots, \quad S = S_0 + \varepsilon S_1 + \dots, \quad h = k(x - x^*) + \varepsilon h_1 + \dots$$

и ограничимся в дальнейшем определением только написанных членов этих рядов. Подставим выражения (2.1), а также выражение $S_h = S_{h_0} + \varepsilon S_{h_1} + \dots$ в уравнения (1.9). Учитывая, что в рассматриваемом случае величины с индексом 0 и величина k постоянны, получим для определения этих величин следующую систему соотношений (соотношения на скачке):

$$\rho_0 u_0 k + \rho^\infty (W - Uk) = 0, \quad p_0 - p^\infty - \rho_0 u_0 (U - u_0) = 0, \quad v_0 = V \quad (2.2)$$

$$p_0 - p^\infty - \rho^\infty W (W - Uk) = 0, \quad \frac{u_0^2 + v_0^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{V_\infty^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p^\infty}{\rho^\infty}$$

Здесь вместо равенства $S_{h_0} = S_0$, полученного с использованием уравнения импульсов в проекции на нормаль к крылу, записано само это урав-

нение. Система для определения следующих членов рядов (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} [\rho_0 k (x - x^*) u_1 + u_0 k (x - x^*) \rho_1] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho_0 k (x - x^*) v_1 + v_0 k (x - x^*) \rho_1] + \\ & + (\rho_0 u_0 - \rho^\infty U) \frac{\partial h_1}{\partial x} + (\rho_0 v_0 - \rho^\infty V) \left(\frac{\partial h_1}{\partial y} - k x_1' \right) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial x} [2\rho_0 u_0 k (x - x^*) u_1 + u_0^2 k (x - x^*) \rho_1 + k (x - x^*) p_1] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} [\rho_0 u_0 k (x - x^*) v_1 + \rho_0 v_0 k (x - x^*) u_1 + u_0 v_0 k (x - x^*) \rho_1] + \\ & + U (\rho_0 u_0 - \rho^\infty U) \frac{\partial h_1}{\partial x} + (\rho_0 u_0 v_0 - \rho^\infty UV) \left(\frac{\partial h_1}{\partial y} - k x_1' \right) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial x} [\rho_0 u_0 k (x - x^*) v_1 + \rho_0 v_0 k (x - x^*) u_1 + u_0 v_0 k (x - x^*) \rho_1] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} [2\rho_0 v_0 k (x - x^*) v_1 + v_0^2 k (x - x^*) \rho_1 + k (x - x^*) p_1] + \\ & + (\rho_0 u_0 - \rho^\infty U) V \frac{\partial h_1}{\partial x} + (\rho_0 v_0^2 + p_0 - p^\infty - \rho^\infty V^2) \left(\frac{\partial h_1}{\partial y} - k x_1' \right) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial x} u_0 (x - x^*) S_1 + \frac{\partial}{\partial y} v_0 (x - x^*) S_1 - u_0 S_{h_1} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$u_0 u_1 + v_0 v_1 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p_1}{\rho_0} - \frac{p_0}{\rho_0^2} \rho_1 \right) = 0$$

$$\frac{S_1'}{S_0} = \frac{1}{\gamma} \frac{p_1}{p_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0}, \quad S_{h_1} = m \frac{\partial h_1}{\partial x} + n \left(\frac{\partial h_1}{\partial y} - k x_1' \right)$$

$$m = - \frac{2(W - Uk)(U + Wk)}{(1 + k^2)^2} S_{h_1}', \quad n = - \frac{2(W - Uk)V}{1 + k^2} S_{h_1}'$$

Через S_{h_1}' обозначена производная от S_{h_1} по v_n^2 при $\varepsilon=0$, т. е.

$$S_{h_1}' = \frac{2(\gamma - 1)(1 - a^{\infty^2}/v_n^2)^2}{\gamma(\gamma + 1) p_0^{\gamma-1/\gamma}} \left(v_n^2 = \frac{(W - U \partial h / \partial x - V \partial h / \partial y)^2}{1 + (\partial h / \partial x)^2 + (\partial h / \partial y)^2} \right)$$

Система линейных уравнений (2.3) подстановкой

$$\begin{aligned} k(x - x^*) u_1 = U_x, & \quad k(x - x^*) p_1 = P_x, & \quad k(x - x^*) S_1 = \sigma_x \\ k(x - x^*) v_1 = V_x, & \quad k(x - x^*) \rho_1 = R_x, & \quad h_1 - k x_1 = H_x \end{aligned} \quad (2.4)$$

сводится к системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 U_x + u_0 R_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_0 V_x + v_0 R_x) + \\ & + (\rho_0 u_0 - \rho^\infty U) \frac{\partial H_x}{\partial x} + (\rho_0 v_0 - \rho^\infty V) \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 u_0 U_x + P_x) + \frac{\partial}{\partial y} \rho_0 v_0 U_x + \\ & + (U - u_0) (\rho_0 u_0 - \rho^\infty U) \frac{\partial H_x}{\partial x} - \rho^\infty V (U - u_0) \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho_0 u_0 V_x + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_0 v_0 V_x + P_x) + \rho_0 u_0 (U - u_0) \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_0 \sigma_x + \frac{\partial}{\partial y} v_0 \sigma_x - u_0 k \left(m \frac{\partial H_x}{\partial x} + n \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = 0$$

$$u_0 U_x + v_0 V_x + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P_x}{\rho_0} - \frac{p_0}{\rho_0^2} R_x \right) = 0, \quad \frac{\sigma_x}{S_0} = \frac{1}{\gamma} \frac{P_x}{p_0} - \frac{R_x}{\rho_0}$$

У этой системы четыре действительных характеристических направления, определяемых соотношениями $(dy / dx) = \beta_i$; соответствующие этим направлениям решения имеют вид

$$\beta_1 = \frac{u_0 v_0 + a_0 \sqrt{a_0^2 - (u_0^2 + v_0^2)}}{u_0^2 - a_0^2}, \quad \beta_2 = \frac{u_0 v_0 - a_0 \sqrt{a_0^2 - (u_0^2 + v_0^2)}}{u_0^2 - a_0^2}, \quad \beta_3 = \frac{v_0}{u_0}$$

$$U_{x1} = -\beta_1 V_{x1}^{(1)}, \quad V_{x1} = V_{x1}^{(1)}(y - \beta_1 x), \quad U_{x2} = -\beta_2 V_{x2}^{(2)}, \quad V_{x2} = V_{x2}^{(2)}(y - \beta_2 x)$$

$$P_{x1} = \rho_0 (\beta_1 u_0 - v_0) V_{x1}^{(1)}, \quad \sigma_{x1} = 0, \quad P_{x2} = \rho_0 (\beta_2 u_0 - v_0) V_{x2}^{(2)}, \quad \sigma_{x2} = 0$$

$$R_{x1} = \frac{\rho_0}{a_0^2} (\beta_1 u_0 - v_0) V_{x1}^{(1)}, \quad H_{x1} = 0, \quad R_{x2} = \frac{\rho_0}{a_0^2} (\beta_2 u_0 - v_0) V_{x2}^{(2)}, \quad H_{x2} = 0$$

$$U_{x3} = -\frac{u_0 a_0^2}{(\gamma - 1) S_0 (u_0^2 + v_0^2)} \sigma_x, \quad P_{x3} = 0, \quad R_{x3} = -\frac{\rho_0}{S_0} \sigma_x$$

$$V_{x3} = -\frac{v_0 a_0^2}{(\gamma - 1) S_0 (u_0^2 + v_0^2)} \sigma_x, \quad \sigma_{x3} = \sigma_x (y - \beta_3 x), \quad H_{x3} = 0$$

При $\beta_4 = (1 + k^2) v_0 / u_0 \neq \beta_3$ (т. е. при $V \neq 0$)

$$U_{x4} = (U - u_0 - \beta_4 C) H_x, \quad R_{x4} = \frac{\rho_0}{a_0^2} [(\beta_4 u_0 - v_0) C - u_0 (U - u_0)] H_x$$

$$V_{x4} = \frac{(U - u_0) (\beta_4 a_0^2 - k^2 u_0 v_0)}{a_0^2 (1 + \beta_4^2) - k^2 v_0^2} H_x = C H_x, \quad \sigma_{x4} = 0$$

$$P_{x4} = \rho_0 [(\beta_4 u_0 - v_0) C - u_0 (U - u_0)] H_x, \quad H_{x4} = H_x (y - \beta_4 x)$$

Если $V = 0$, то $\beta_3 = \beta_4 = 0$, и соответствующие этому общему характеристическому направлению функции имеют вид

$$U_x = (U - u_0) H_x - \frac{a_0^2}{(\gamma - 1) u_0 S_0} \sigma_x, \quad R_x = -\frac{p_0 - p^\infty}{a_0^2} H_x - \frac{\rho_0}{S_0} \sigma_x$$

$$V_x = 0, \quad P_x = -(p_0 - p^\infty) H_x, \quad \sigma_x = \sigma_x (y), \quad H_x = H_x (y)$$

Полученное решение показывает, что, как и в обычных задачах о плоских сверхзвуковых движениях газа, вдоль линий тока невозмущенного движения переносятся только возмущения энтропии, плотности и продольной скорости (легко убедиться, что в системе координат, в которой $v_0 = 0$, имеет место равенство $V_{x3} = 0$); вдоль акустических характеристик переносятся возмущения давления, плотности и перпендикулярной к характеристике составляющей скорости. Характеристики четвертого семейства являются линиями переноса возмущений формы ударной волны (толщины слоя сжатого газа); возмущения энтропии вдоль этих характеристик не переносятся.

Несложное геометрическое рассмотрение показывает, что четвертое характеристическое направление представляет собой направление проекции на плоскость крыла касательной к ударной волне составляющей скорости набегающего потока. Более наглядным является иное толкование этого направления. Рассмотрим в потоке за скачком конус Маха, выходящий из точки кромки крыла. Этот конус пересекается с плоскостью скачка

вдоль двух прямых линий. Можно показать, что четвертое характеристическое направление есть биссектриса угла между прямыми — проекциями на плоскость крыла этих двух линий. Конечно, по установленному выше физическому смыслу характеристик четвертого семейства, как линий распространения возмущений формы волны, более удовлетворительным было бы, чтобы каждая из этих прямых порознь являлась характеристикой. Однако в нулевом приближении это получить не удастся.

Четыре произвольные функции $V_x^{(1)}(y - \beta_1 x)$, $V_x^{(2)}(y - \beta_2 x)$, $\sigma_x(y - \beta_3 x)$, $H_x(y - \beta_4 x)$, входящие в общее решение, в области влияния легко определяются через уравнение передней кромки $x_1(y)$.

В самом деле, в соответствии с определением (2.4), функции U_x , V_x , P_x , R_x , σ_x должны при $x = x^*$ обращаться в нуль (величины u_1 , v_1 , p_1 , ρ_1 , S_1 остаются ограниченными при приближении к кромке крыла), а функция H_x определяется соотношением

$$H_x(y - \beta_4 x^*) = -kx_1(y) \quad (2.5)$$

Представив каждую из функций U_x , V_x , P_x , R_x , σ_x в виде суммы произвольных функций $V_x^{(1)}$, $V_x^{(2)}$, σ_x , H_x с соответствующими коэффициентами и приравняв нулю при $x = x^*$, получим

$$U_x = -\beta_1 V_x^{(1)} - \beta_2 V_x^{(2)} - \frac{u_0 a_0^2}{(\gamma - 1) S_0 (u_0^2 + v_0^2)} \sigma_x + (U - u_0 - \beta_4 C) H_x = 0$$

$$V_x = V_x^{(1)} + V_x^{(2)} - \frac{v_0 a_0^2}{(\gamma - 1) S_0 (u_0^2 + v_0^2)} \sigma_x + C H_x = 0$$

$$P_x = \rho_0 (\beta_1 u_0 - v_0) V_x^{(1)} + \rho_0 (\beta_2 u_0 - v_0) V_x^{(2)} + \\ + \rho_0 [(\beta_4 u_0 - v_0) C - u_0 (U - u_0)] H_x = 0$$

$$R_x = \frac{\rho_0}{a_0^2} (\beta_1 u_0 - v_0) V_x^{(1)} + \frac{\rho_0}{a_0^2} (\beta_2 u_0 - v_0) V_x^{(2)} - \\ - \frac{\rho_0}{S_0} \sigma_x + \frac{\rho_0}{a_0^2} [(\beta_4 u_0 - v_0) C - u_0 (U - u_0)] H_x = 0$$

$$\sigma_x = 0$$

Учитывая последнее равенство, найдем, что два предыдущих равенства являются следствиями двух первых (при отсутствии возмущений энтропии из равенства нулю возмущений компонент скорости следует отсутствие возмущений давления и плотности). Из двух первых равенств при $\sigma_x = 0$ находим

$$V_x^{(1)}(y - \beta_1 x^*) = -\frac{(\beta_2 - \beta_4) C + U - u_0}{\beta_1 - \beta_2} kx_1(y)$$

$$V_x^{(2)}(y - \beta_2 x^*) = -\frac{(\beta_1 - \beta_4) C + U - u_0}{\beta_2 - \beta_1} kx_1(y)$$

В частном случае, когда $V = 0$, получаем, что $C = 0$, $\beta_1 = -\beta_2 = = (M_0^2 - 1)^{-1/2}$ и, следовательно,

$$V_x^{(1)}(y - \beta_1 x^*) = -V_x^{(2)}(y + \beta_1 x^*) = \frac{U - u_0}{2\beta_1} kx_1(y) \quad (2.6)$$

Рассмотрим примеры.

Пусть передняя кромка крыла состоит из двух прямолинейных отрезков, уравнения которых $x = 0$ при $y < 0$, $x = \epsilon y$ при $y > 0$

т. е. пусть функция $x_1(y)$ в выражениях (2.5) и (2.6) определена формулами

$$x_1(y) = 0 \quad \text{при } y < 0, \quad x_1(y) = y \quad \text{при } y > 0$$

Тогда

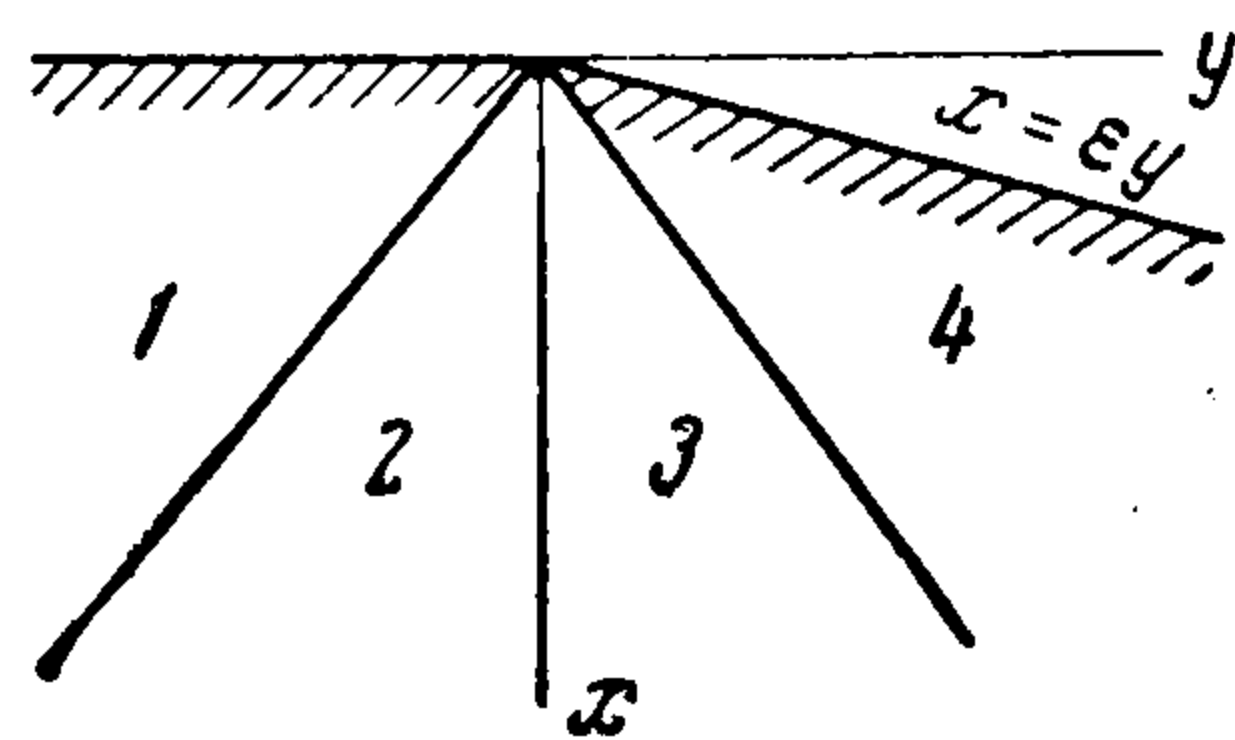
$$V_x^{(1)}(\xi) = -\frac{k}{2\beta} (U - u_0) (1 + \beta\varepsilon) \xi \quad \text{при } \xi > 0$$

$$V_x^{(2)}(\eta) = \frac{k}{2\beta} (U - u_0) (1 - \beta\varepsilon) \eta \quad \text{при } \eta > 0$$

$$H_x(y) = -ky \quad \text{при } y > 0$$

При отрицательных значениях аргументов все эти функции равны нулю.

Найдем выражения для давления и для компоненты скорости v , определяющей в линейном приближении форму линий тока, в четырех областях, отделенных одна от другой характеристиками $\eta \equiv y + \beta x = 0$, $y = 0$, $\xi \equiv y - \beta x = 0$ (фиг. 1).



Фиг. 1

Области	p_1	v_1
1	0	0
2	$-1/2(p_0 - p^\infty) ((y/x) + \beta)$	$\left. \begin{array}{l} U - u_0 \left(\frac{y}{x} + \beta \right) \\ U - u_0 \end{array} \right\}$
3	$1/2(p_0 - p^\infty) ((y/x) - \beta)$	
4	0	$U - u_0$

Внутри угла, образованного характеристиками $y + \beta x = 0$ и $y - \beta x = 0$, давление понижается, причем наибольшее понижение давления равно

$$-\varepsilon \frac{p_0 - p^\infty}{2 \sqrt{M_0^2 - 1}} \quad \text{при } y = 0$$

Изменение давления в области 4, по сравнению с давлением в области 1, имеет порядок ε^2 . Все линии тока отклоняются в сторону положительных y , асимптотически принимая направление линии $y = \varepsilon ((U - u_0) / 2u_0)x$ (это направление соответствует особой точке типа Ферри для конических пространственных течений), делящей пополам угол между направлениями поступательных потоков в областях 1 и 4.

Очевидно, что решение задачи для случая, когда $x_1 = |y|$, т. е. для симметричного обтекания крыла, в линейной постановке можно получить простой суперпозицией из найденного решения.

В качестве следующего примера рассмотрим (фиг. 2) крыло, у которого передняя кромка прямолинейна и перпендикулярна набегающему потоку всюду, за исключением участка $(-l, l)$. На фиг. 2 в каждой из областей, отделенных одна от другой характеристиками, идущими из концов искривленного участка кромки, указаны функции, определяющие возмущения потока. При определении этих функций по формулам (2.5) и (2.6) и использовании их в области влияния искривленного участка кромки нужно сохранять члены порядка ε ; в выражениях (2.4), определяющих возмущения потока через функции $V_x^{(1)}$, $V_x^{(2)}$ и H_x , также нельзя пренебрегать членом $x^* = \varepsilon x_1$ по сравнению с x . Таким образом, в области влияния искривленного участка кромки получаем

$$[x - \varepsilon x_1(y)] v_1 = \frac{U - u_0}{2\beta} \{x_1 [y + \beta(x - \varepsilon x_1)] - x_1 [y - \beta(x - \varepsilon x_1)]\}$$

$$v_1 \rightarrow (U - u_0) x_1'(y) \quad \text{при } x \rightarrow \varepsilon x_1(y)$$

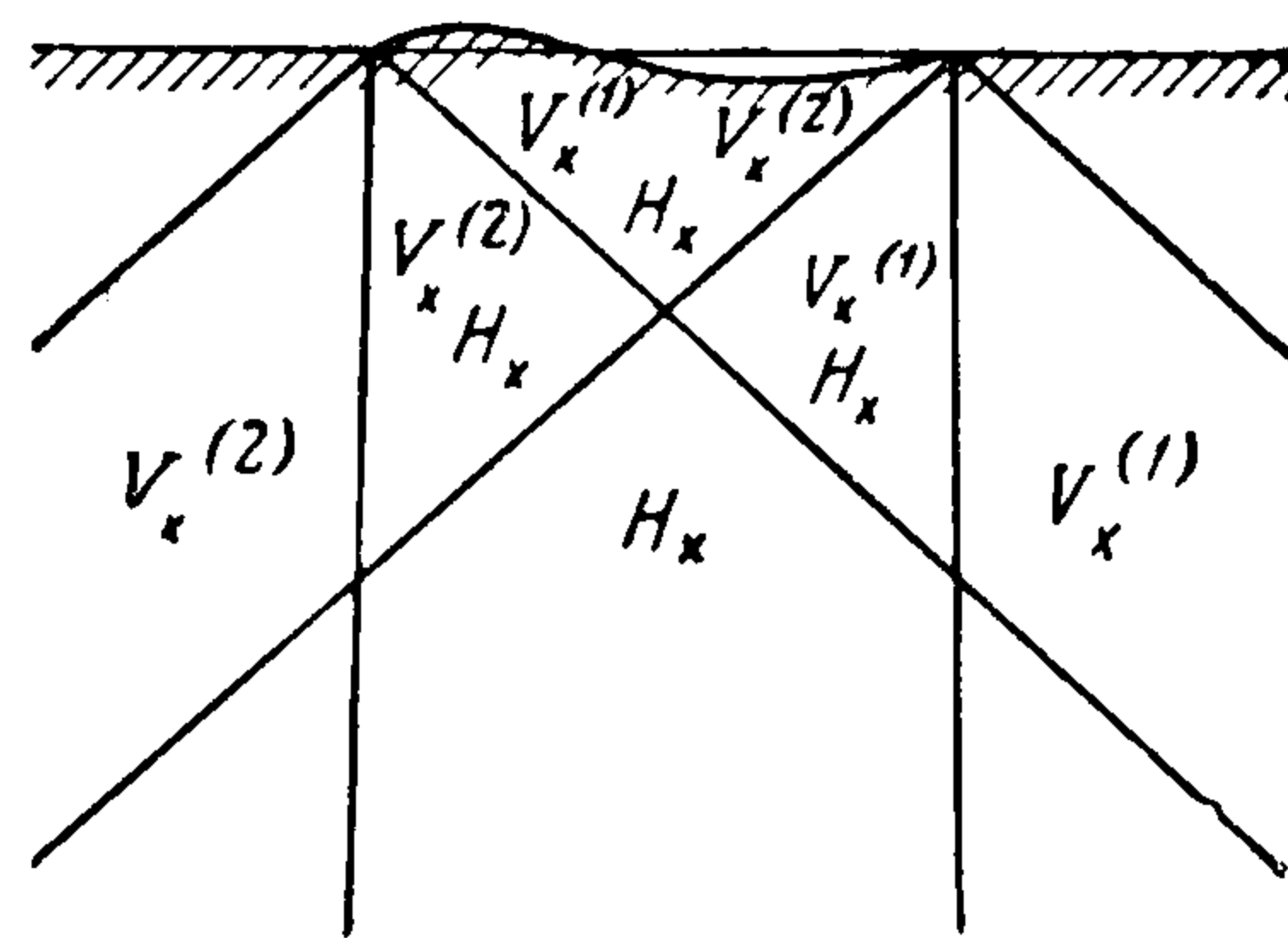
т. е. v_1 стремится к нужному значению, определяемому соотношениями на скачке

Аналогично

$$(x - x^*) p_1 = (p_0 - p^\infty) \{x_1(y) - 1/2(x_1 [y - \beta(x - x^*)] + x_1 [y + \beta(x - x^*)])\}$$

При малых $x - x^*$

$$p_1 \rightarrow 1/2(p_0 - p^\infty) \beta^2 x_1''(y) (x - x^*)$$



Фиг. 2

В наиболее удаленной точке области влияния искривленного участка

$$p_1 = \frac{p_0 - p^\infty}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \frac{x_1(0)}{l}$$

Рассмотрим теперь крыло, имеющее в плане форму равнобедренного треугольника с основанием, обращенным к набегающему потоку. Если скачок присоединен к передней кромке, то до тех пор, пока все крыло находится в области влияния передней кромки, поток на поверхности крыла будет поступательным. Если увеличивать угол атаки (или уменьшать число M набегающего потока, или удлинять крыло, уменьшая угол, противоположный передней кромке), то между областью влияния передней кромки крыла и боковыми кромками крыла образуются области течения с переменными параметрами (фиг. 3). Для возможности использовать линейную теорию предположим, что уравнение одной из кромок имеет вид

$$y = x \operatorname{tg}(\mu - \varepsilon)$$

где $\operatorname{tg} \mu = \beta$, а ε — малая величина. На кромке крыла должно быть выполнено условие $v_n = a$, которое в линейном приближении можно привести к следующему виду:

$$V_x^{(1)} + AV_x^{(2)} = -\frac{2}{\gamma + 1} ku_0 x \cos^2 \mu \quad \text{при } y \approx x \left(\beta - \frac{\varepsilon}{\cos^2 \mu} \right)$$

$$A = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{3 - \gamma}{2} - \frac{2}{M_0^2} \right)$$

На линии симметрии крыла, т. е. при $y = l$, из условия $v = 0$ следует

$$V_x^{(1)} + V_x^{(2)} = 0$$

Из этих условий легко находим, что в области 1

$$V_x^{(1)} = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{ku_0 \cos^4 \mu}{\varepsilon} \xi, \quad V_x^{(2)} = 0, \quad H_x = 0$$

В области 2 величины $V_x^{(1)}$ и H_x , очевидно, сохраняются теми же, а

$$V_x^{(2)} = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{ku_0 \cos^4 \mu}{\varepsilon} (\eta - 2l)$$

Решение в областях 3, 4 и т. д. тоже можно найти без труда, но, учитывая размер этих областей, в линейном приближении достаточно ограничиться рассмотрением течения только в областях 1 и 2.

Таким образом, в области 1, где течение имеет конический характер

$$v = \frac{2}{\gamma + 1} u_0 \cos^4 \mu \left(\frac{y}{x} - \beta \right), \quad p = p_0 + \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 u_0^2 \operatorname{tg} \mu \cos^4 \mu \left(\frac{y}{x} - \beta \right)$$

В области 2

$$v = \frac{4}{\gamma + 1} u_0 \operatorname{tg} \mu \cos^4 \mu \left(\frac{y}{l} - 1 \right), \quad p = p_0 - \frac{4}{\gamma + 1} \rho_0 u_0^2 \sin^2 \mu \cos^2 \mu \left(\frac{x\beta}{l} - 1 \right)$$

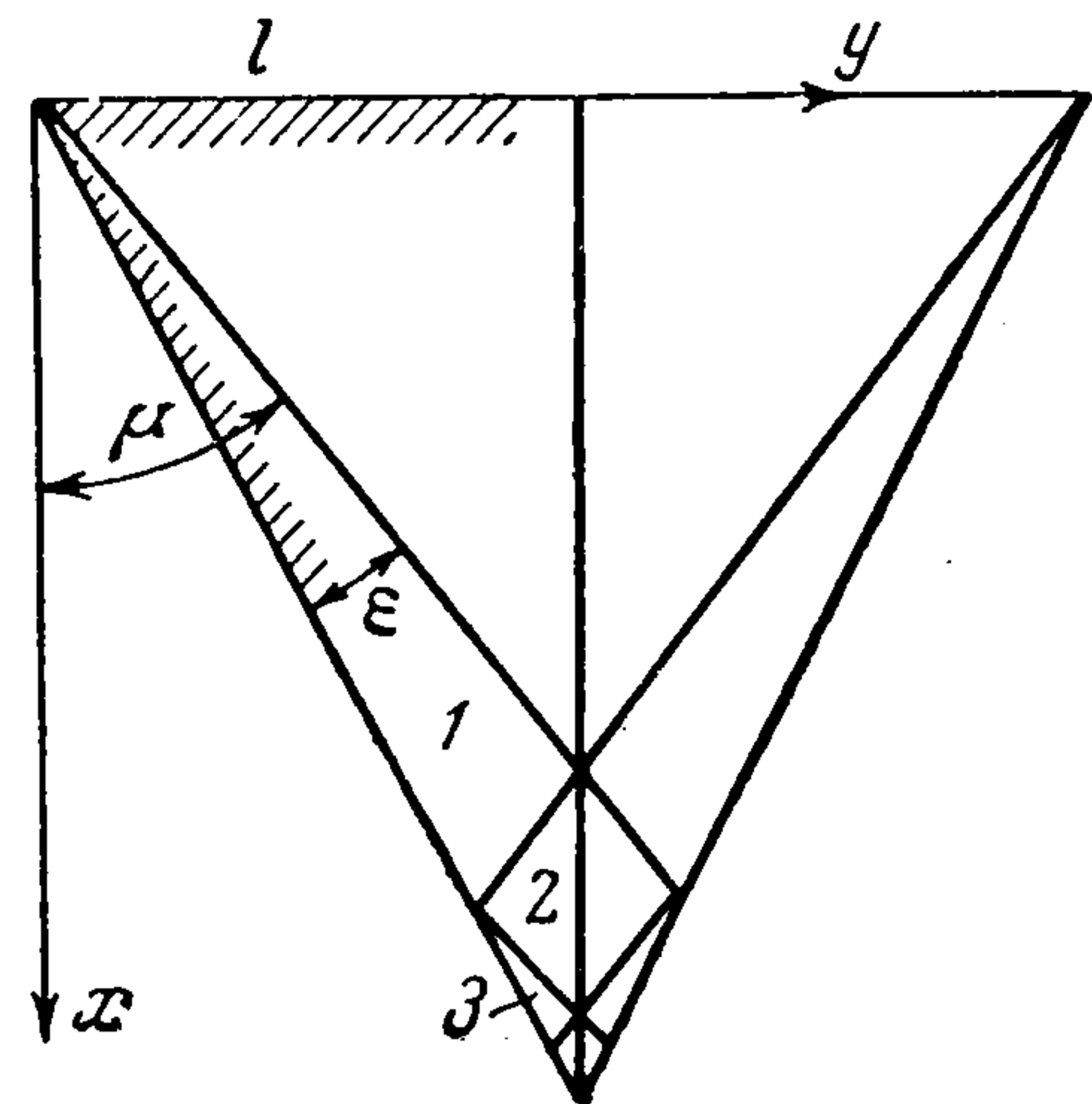
В точке с наибольшим значением x в области 2

$$p = p_0 - \frac{4\varepsilon}{\gamma + 1} \rho_0 u_0^2 \sin \mu \cos \mu$$

Коэффициент нормальной силы, действующей на крыло, имеет вид

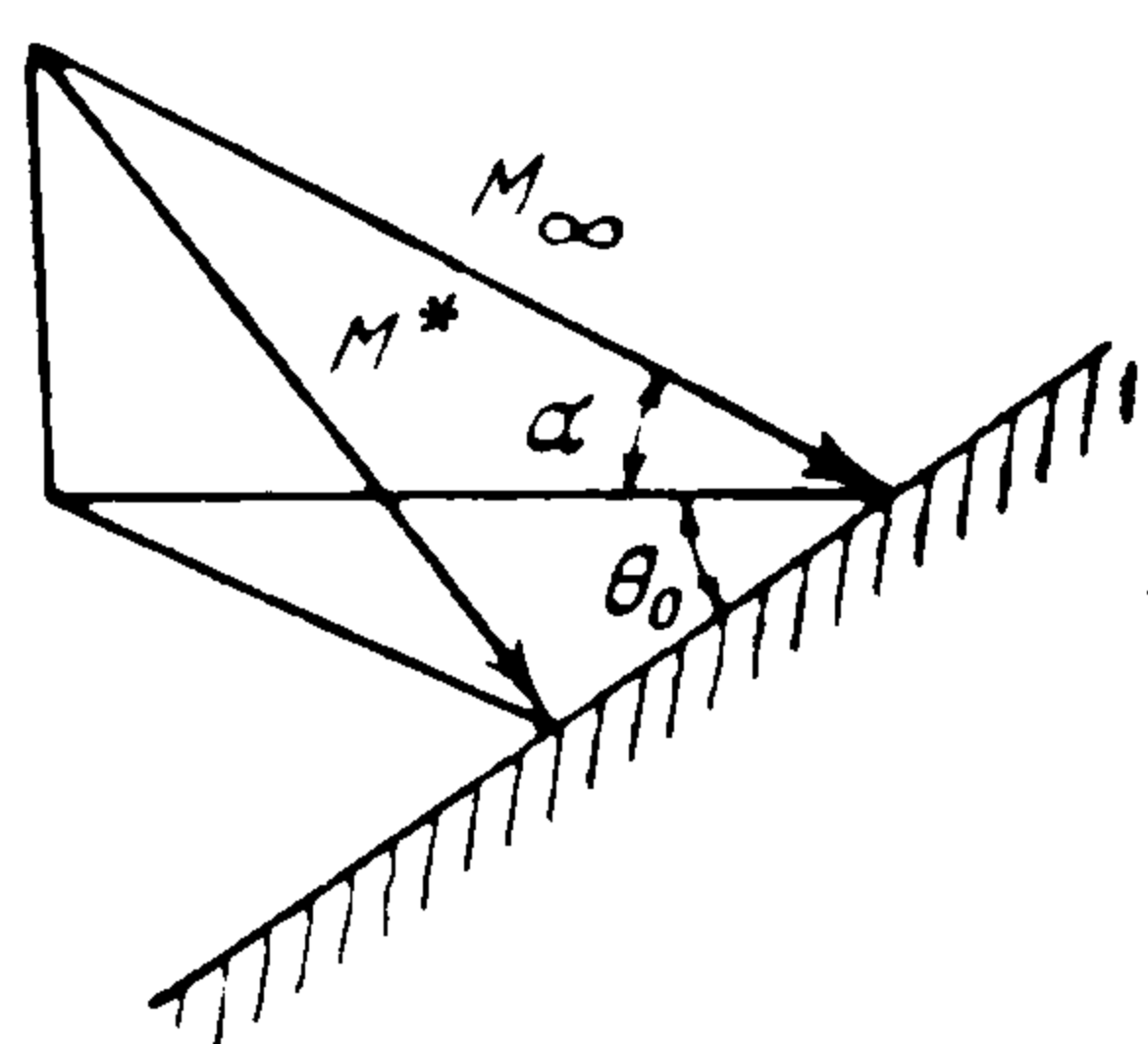
$$C_N - C_N^\circ = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu < \theta_0 \\ -\frac{2}{\gamma + 1} \frac{\rho_0 u_0^2}{\rho^\infty V_\infty^2} \sin \theta_0 \cos \theta_0 (\mu - \theta_0)^2 & \text{при } \mu > \theta_0 \end{cases}$$

Здесь C_N° — значение C_N для крыла бесконечного размаха.



Фиг. 3

3. Конические течения. В качестве примера использования нелинейных уравнений рассмотрим конические течения. Эти течения описывают некоторые режимы обтекания треугольных, трапециевидных и других крыльев, передняя кромка которых состоит из прямолинейных участков. В конических течениях параметры газа в слое между поверхностью крыла и ударной волной не зависят от расстояния r от вершины крыла (принимаемой за начало координат), а толщина слоя h пропорциональна этому расстоянию. Отсчитывая полярный угол θ от направления проекции вектора скорости набегающего потока на плоскость крыла, обозначив через u и v радиальную и окружную скорости и полагая $h = r H(\theta)$, преобразуем уравнения (1.9) с учетом конического характера течения к виду



Фиг. 4

$$2\rho uH + \frac{d}{d\theta} \rho vH + \rho^\infty V_v = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho vH \frac{du}{d\theta} - \rho v^2 H + (p - p^\infty) H + \rho^\infty V_v (V_r - u) = 0$$

$$(p - p^\infty) \left(uH + v \frac{dH}{d\theta} \right) + \rho^\infty V_v \left[u (V_r - u) + v (V_\theta - v) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p^{\gamma-1/\gamma} (S_h - S) \right] = 0$$

$$\rho vH \frac{dS}{d\theta} + \rho^\infty V_v (S_h - S) = 0$$

$$\left(V_v = W - V_r H - V_\theta \frac{dH}{d\theta}, W = -V_\infty \sin \alpha, V_r = V_\infty \cos \alpha \cos \theta, V_\theta = -V_\infty \cos \alpha \sin \theta \right)$$

Величина $S_h(v_n^2)$ определяется выражением (1.4), где

$$v_n^2 = \frac{(W - V_r H - V_\theta dH/d\theta)^2}{1 + H^2 + (dH/d\theta)^2}$$

Третье уравнение системы (3.1) неявным образом определяет $dH/d\theta$. Остальные уравнения можно разрешить относительно производных, в результате чего получаем

$$\Phi(dH/d\theta, H, u, v, S) = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{du}{d\theta} = v - \frac{(p - p^\infty) H + \rho^\infty (W - V_r H - V_\theta dH/d\theta) (V_r - u)}{\rho v H}$$

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{1}{\rho H (v^2 - a^2)} \left[\rho a^2 (2uH + vH') - \rho u v^2 H + (p - p^\infty) u H + \rho^\infty V_v \left\{ a^2 \left[1 + \frac{S_h - S}{S} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right] + u (V_r - u) \right\} \right]$$

$$\frac{dS}{d\theta} = - \frac{\rho^\infty V_v (S_h - S)}{\rho v H}, \quad \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} S p^{\gamma-1/\gamma} = i^{*\infty}, \quad \rho = \frac{p^{1/\gamma}}{S}, \quad a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$$

Рассмотрим участок кромки крыла, характеризуемый углом $\theta_0 < 1/2\pi$. Простое геометрическое рассмотрение (фиг. 4) показывает, что если угол θ_0 таков, что выполняется условие

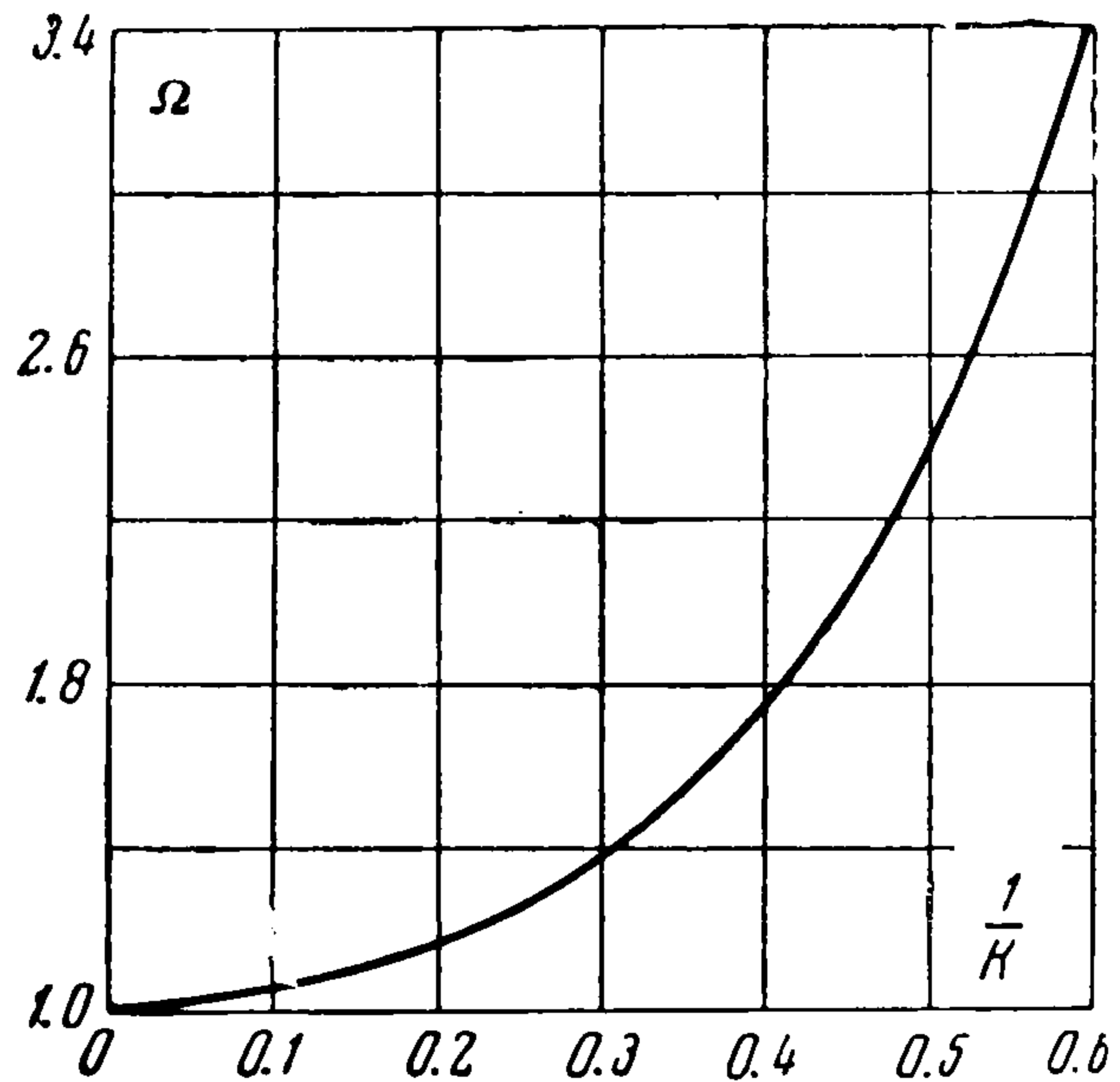
$$\sin \theta_0 / \operatorname{tg} \alpha > \operatorname{ctg} \varphi_{\max}(M^*) \quad (M^* = \sqrt{M_\infty^2 \sin^2 \alpha + M_\infty^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \theta_0}) \quad (3.3)$$

где $\varphi_{\max}(M)$ — предельный угол отклонения потока в косом скачке уплотнения при данном числе M , то скачок будет присоединенным

вдоль кромки. Неравенство (3.3) можно переписать в виде

$$\Omega > \operatorname{ctg} \varphi_{\max} (K \sqrt{1 + \Omega^2}) \quad (K = M_{\infty} \sin \alpha, \Omega = \sin \theta_0 / \operatorname{tg} \alpha) \quad (3.4)$$

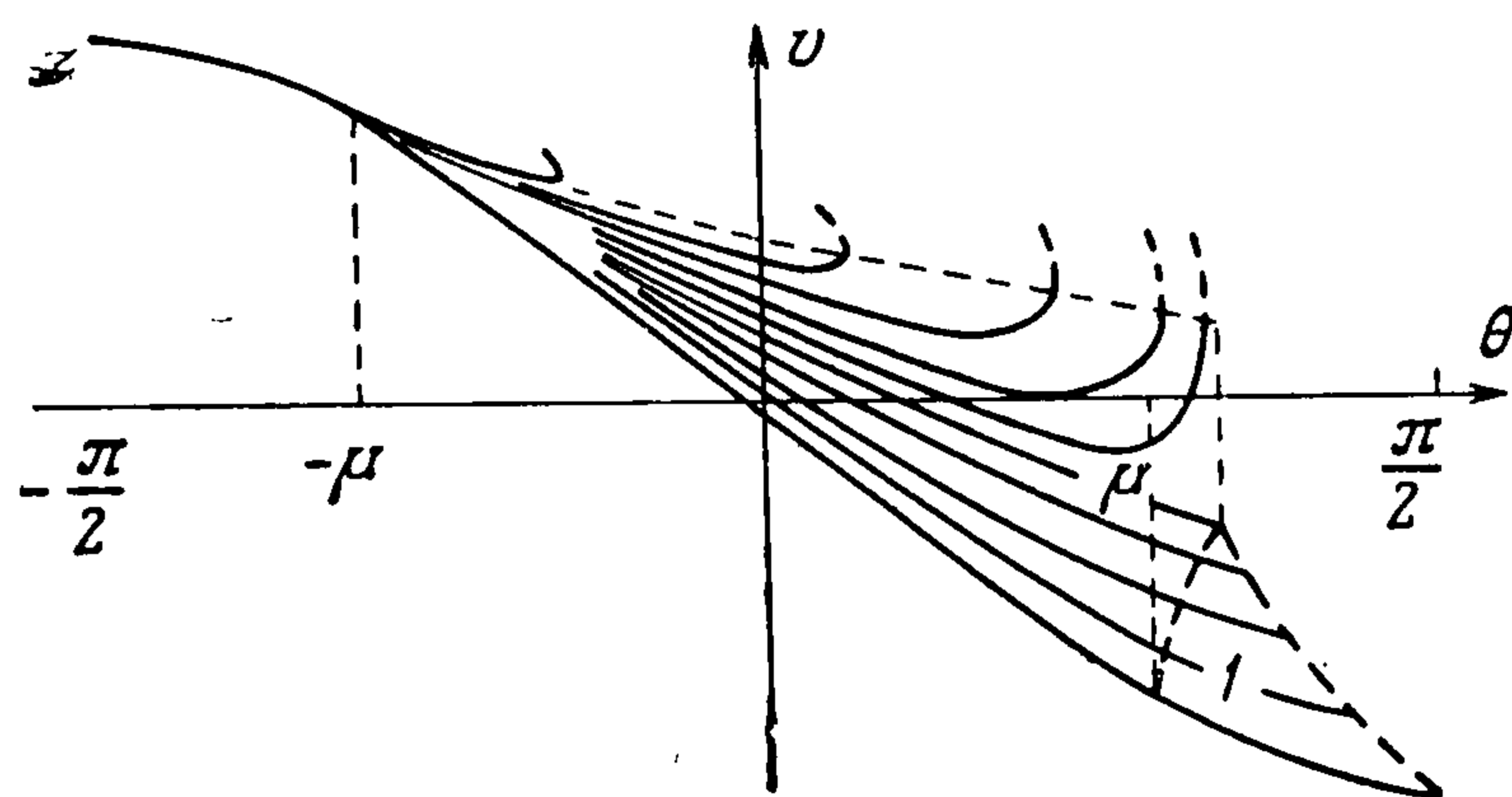
Соответствующая выполнению этого неравенства область значений параметров M_{∞} , α и θ_0 лежит (при $\gamma = 1,4$) выше кривой, изображенной на фиг. 5. Граничные значения искомых функций на кромке крыла будут в этом случае определяться соотношениями на скачке и условием $H = 0$. Для значений параметров M_{∞} , α и θ_0 , не удовлетворяющих неравенству (3.4), скачок в случае существования конического течения присоединен только к вершине угла передней кромки. При этом газ с наветренной стороны крыла перетекает вдоль кромки на подветренную сторону. При достаточно большом значении отношения давлений с наветренной и подветренной сторон крыла нормальная к кромке составляющая скорости должна достигать у кромки скорости звука, т. е. $v = a$ при $\theta = \theta_0$.



Фиг. 5

Это равенство, или эквивалентное ему соотношение $v' = \infty$ при $\theta = \theta_0$, следующее из выражения (3.2) для v' , служит граничным условием при решении системы (3.2) в случае, если определяющие параметры M_{∞} , α и θ_0 принадлежат области ниже кривой на фиг. 5.

Рассмотрим два примера. Пусть передняя кромка крыла образует угол, одна сторона которого перпендикулярна направлению набегающего потока (т. е. для нее $\theta = -1/2\pi$), а вторая характеризуется углом $-1/2\pi < \theta_0 < 1/2\pi$. Угол атаки крыла α будем считать таким, чтобы скачок при $\theta = -1/2\pi$ был присоединенным к кромке.



Фиг. 6

Очевидно, что в таком случае при $\theta_0 = 1/2\pi$ имеется простое точное решение, в котором

$$u = u_0 \cos \theta, \quad v = -u_0 \sin \theta \\ H = k \cos \theta$$

а величины p и ρ постоянны (поступательный поток за скачком); u_0 , k , p и ρ находятся из соотношений (2.2) на скачке (при $V=0$).

Начнем постепенно уменьшать угол θ_0 . Возникающее при этом течение можно разбить на

три следующих области: два поступательных потока при $-1/2\pi < \theta < -\mu$ и при $\mu_0 < \theta < \theta_0$ и заключенное между ними течение с переменными параметрами; $-\mu$ и μ_0 обозначены углы, образованные граничными характеристиками обоих поступательных потоков с направлением $\theta = 0$. Параметры газа в обоих поступательных потоках и, в частности, эти углы определяются при помощи соотношений на скачках. Для описания течений, возникающих при изменении θ_0 , обратимся к фиг. 6

и 7, на которых изображены величины v и $a^2 - v^2$ в зависимости от θ при фиксированных M и α для разных углов θ_0 .

При $\theta_0 = 1/2\pi$ имеем $v = -u_0 \sin \theta$ (нижняя кривая на фиг. 6) и $a^2 - v^2 = u_0^2 (\sin^2 \mu - \sin^2 \theta)$ (верхняя кривая на фиг. 7). При уменьшении θ_0 решение в интервале $\mu_0 < \theta < \theta_0$ легко находится по соотношениям на скачке. Соответствующие кривые заполняют на фиг. 6 и 7 области 1. Для построения кривых в промежутке $-\mu < \theta < \mu_0$ (в случае, когда скачок является присоединенным) или в промежутке $-\mu < \theta < \theta_0$ (в случае, когда скачок становится отсоединенным) заметим, что точка $\theta = -\mu$ (соответствующая характеристике) является особой для уравнения, определяющего $dv/d\theta$. В самом деле, это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{dv}{d\theta} = -u - \frac{1}{\rho H(a^2 - v^2)} \left\{ u [(p - p^\infty) H + \rho^\infty V_v (V_r - u)] + a^2 [\rho (uH + vH') + \rho^\infty V_v] + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho^\infty V_v a^2 \left(\frac{S_h}{S} - 1 \right) \right\}$$

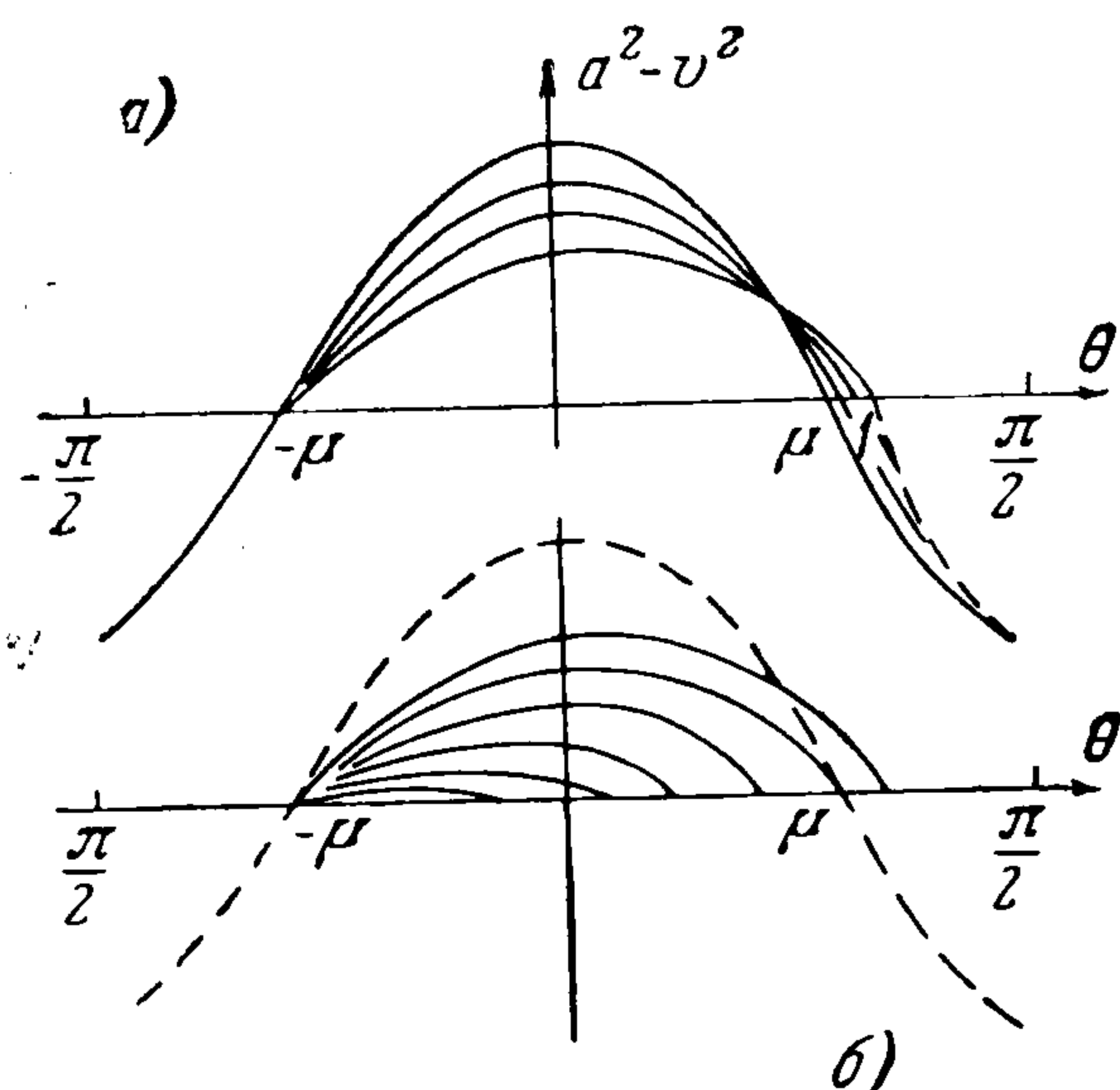
Числитель и знаменатель второго слагаемого в правой части, очевидно, обращаются в нуль при $\theta = -\mu$ (это же относится, конечно, и к $\theta = \mu_0$). Таким образом, из точки $\theta = -\mu$ выходит пучок кривых $v(\theta)$, отличающихся начальным значением производной $dv/d\theta$, и, соответственно, пучок кривых $a^2 - v^2$. Если ввести обозначение

$$\left. \frac{dv}{d\theta} \right|_{\theta = -\mu} = -u_0 + \Delta$$

то легко получить что

$$\left. \frac{d}{d\theta} (a^2 - v^2) \right|_{\theta = -\mu} = [2u_0 - (\gamma + 1) \Delta] v_0$$

При увеличении Δ от нуля кривые $v(\theta)$ и $a^2 - v^2$ продолжают до $\theta = \mu_0$, где они соединяются (с разрывом производных) с соответствующими отрезками в областях 1, относящихся к поступательному потоку. Начиная с некоторого значения Δ , обращение



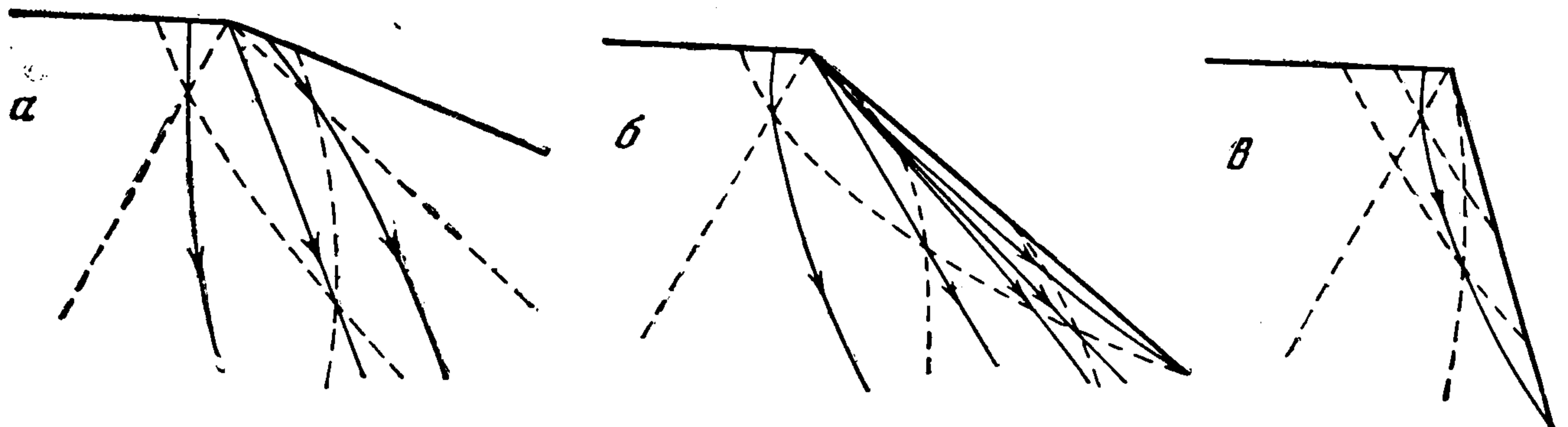
Фиг. 7

разности $a^2 - v^2$ в нуль происходит раньше, чем обращается в нуль числитель второго слагаемого в выражении для $dv/d\theta$; [производная $dv/d\theta$ становится в такой точке бесконечной. Очевидно, что решения при таких Δ соответствуют течениям с отсоединенной волной, а значение θ , в котором $a^2 - v^2$ обращается в нуль, а v' — в бесконечность, и есть угол θ_0 кромки крыла. Описанное поведение кривых иллюстрировано на фиг. 6 и 7. Приведенные выше выражения для $dv/d\theta$ и $d(a^2 - v^2)/d\theta$ при $\theta = -\mu$ показывают, что начальные значения производной $dv/d\theta$ заключены в пределах

$$-u_0 \leq \left. \frac{dv}{d\theta} \right|_{\theta = -\mu} \leq -\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} u_0$$

Пользуясь фиг. 6 и 7, легко построить картину линий тока и акустических характеристик для качественно различных случаев обтекания крыла. На фиг. 8, а, б, в показана последовательная смена режимов обтекания при уменьшении угла θ_0 ; сплошными линиями показаны линии тока, пунктирными — акустические характеристики двух семейств. Фиг. 8, а соответствует режимам обтекания с присоединенным скачком уплотнения. В области конического течения с переменными параметрами имеется одна прямая линия тока ($v = 0$), направление которой является асимптотическим для всех других линий тока. Такая особенность поведения конических течений хорошо известна; как уже указывалось выше, в пространственных конических потоках наличие соответствующих особых точек было установлено А. Ферри. Фиг. 8, б относится к течениям с отсоединенной волной, для которых кривая $v(\theta)$ имеет участок с отрицательными значениями v (фиг. 6). В этом случае появляется еще одна прямая линия

тока. От этой линии тока поток растекается наружу — через кромку крыла, и внутрь, асимптотически приближаясь к направлению первой прямой линии тока. При дальнейшем уменьшении угла θ_0 обе прямые линии тока сливаются и исчезают; все линии тока пересекают при этом кромку крыла, как показано на фиг. 8, *е*. Последующее уменьшение угла θ_0 , не изменяя качественно картины течения, приводит к сокращению области с направленными наружу линиями тока; наконец, при $\theta_0 \leq -\mu$ вся поверхность крыла оказывается занятой поступательным потоком газа.



Фиг. 8 а, б, в

В качестве второго примера рассмотрим симметричное обтекание угла, т. е. примем, что $\theta_1 = -\theta_0$, и будем, кроме этого, считать $\theta_0 \leq 1/2\pi$. Очевидно, достаточно рассмотреть решение только при $0 \leq \theta \leq \theta_0$.

На линии симметрии $\theta = 0$ должны быть выполнены условия $v = 0$, $dH/d\theta = 0$, $dS/d\theta = 0$; равенство нулю производной $du/d\theta$ следует из этих условий и альтернативной записи выражения для $du/d\theta$

$$\frac{du}{d\theta} = v + \frac{1}{\rho u H} \left[(p - p^\infty) \frac{dH}{d\theta} + \rho^\infty V_\infty (V_\theta - v) - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{pH}{S} \frac{dS}{d\theta} \right]$$

Система уравнений (3.1) дает следующие связи между значениями искомых функций при $\theta = 0$

$$(p_0 - p^\infty) H_0 + \rho^\infty (W - V_{r0} H_0) (V_{r0} - u_0) = 0 \quad (3.5)$$

$$S_{h0} (v_{n0}^2) = S_0, \quad v_{n0}^2 = \frac{(W - V_{r0} H_0)^2}{1 + H_0^2}$$

$$\frac{u_0^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} = i^{*\infty}, \quad S_0 = \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0}$$

Таким образом, начальные значения всех функций могут быть выражены, например, через u_0 — скорость газа на оси симметрии. Через u_0 выразится и значение производной $dv/d\theta$ на оси симметрии

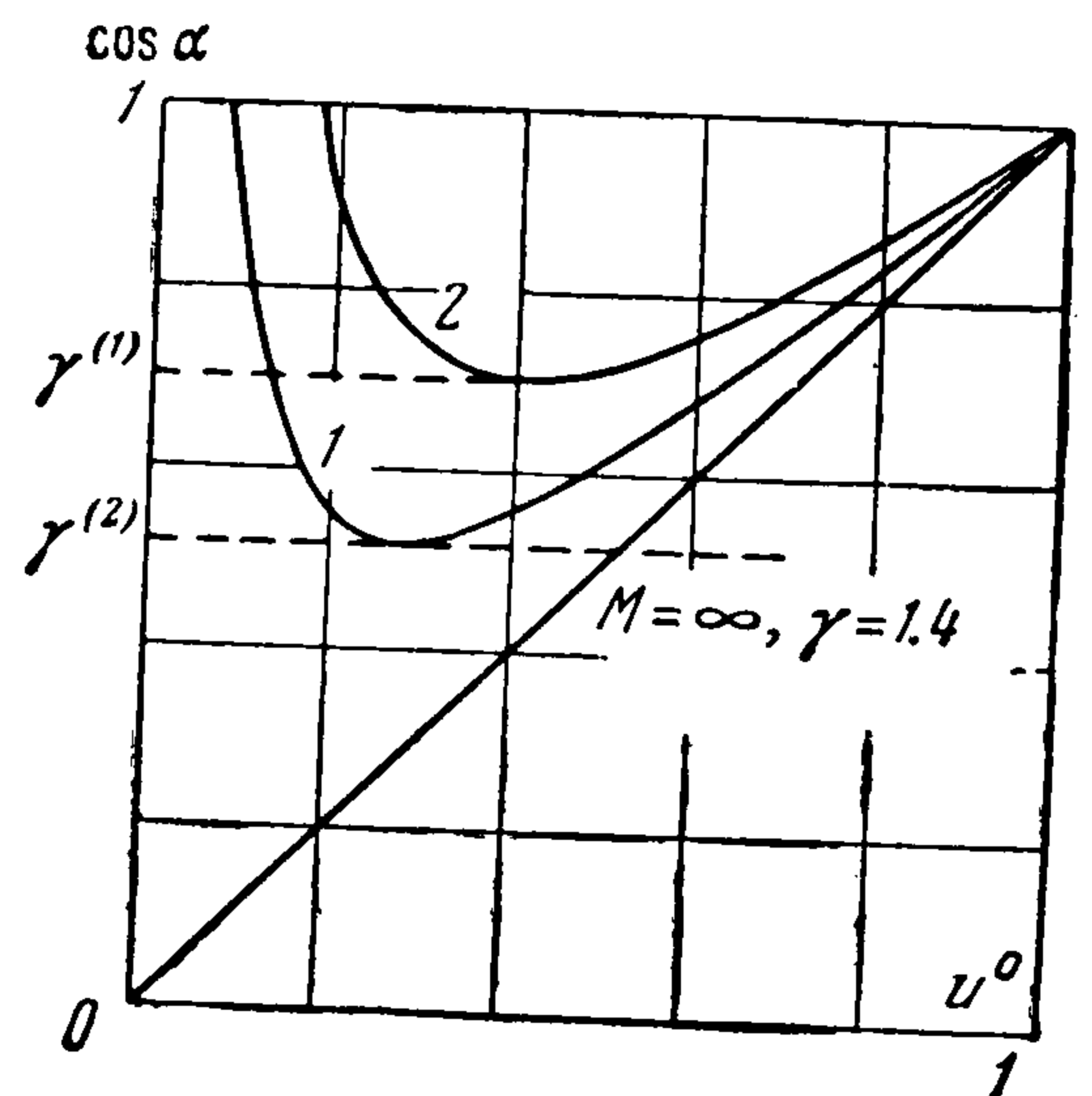
$$\left. \frac{dv}{d\theta} \right|_0 = -2u_0 - \frac{\rho^\infty (W - V_{r0} H_0)}{\rho_0 H_0}$$

Распоряжаясь выбором значения u_0 , можно удовлетворить краевому условию на кромке крыла при $\theta = \theta_0$.

Рассмотрим типы течений, которые возникают при разных значениях M , α и θ_0 . Ради простоты анализ проведем для случая $p^\infty = 0$, т. е. $M = \infty$. В этом случае используемое в анализе выражение $dv/d\theta$ при $\theta = 0$ в зависимости от u_0 выписывается в явном виде, а именно,

$$\frac{1}{V_\infty} \left. \frac{dv}{d\theta} \right|_0 = \frac{1}{\cos \alpha - u^\circ} \left(\frac{3\gamma + 1}{2\gamma} u^{\circ 2} - 2u^\circ \cos \alpha + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right) \quad (3.6)$$

Здесь $u_0 = u^\circ / V_\infty$. Найдём ещё нужные для дальнейшего значения u° , которые соответствуют случаю $\theta_0 = 1/2\pi$.



Фиг. 9

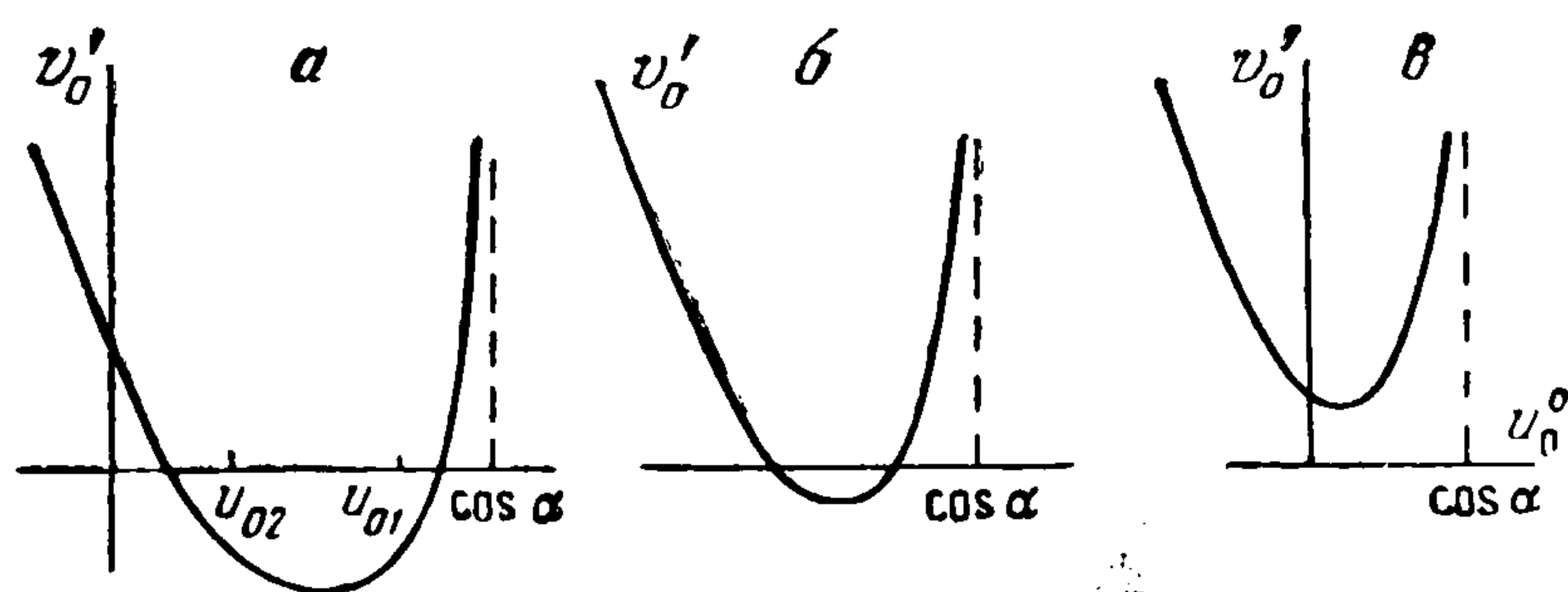
К соотношениям (3.5) в этом случае нужно добавить еще условие сохранения массы на скачке, которое при $\theta_0 = 1/2\pi$ имеет вид

$$\rho_0 u_0 H_0 + \rho^\infty (W - V_{r0} H_0) = 0$$

Используя это соотношение, при $M = \infty$ без труда найдем уравнение, определяющее значения u° для случая $\theta_0 = 1/2\pi$

$$\frac{\gamma + 1}{2\gamma} u_{\perp}^{\circ 2} - u_{\perp}^{\circ} \cos \alpha + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} = 0 \quad (3.7)$$

Найденное выражение можно, конечно, получить и из формулы (3.6), следующей



Фиг. 10

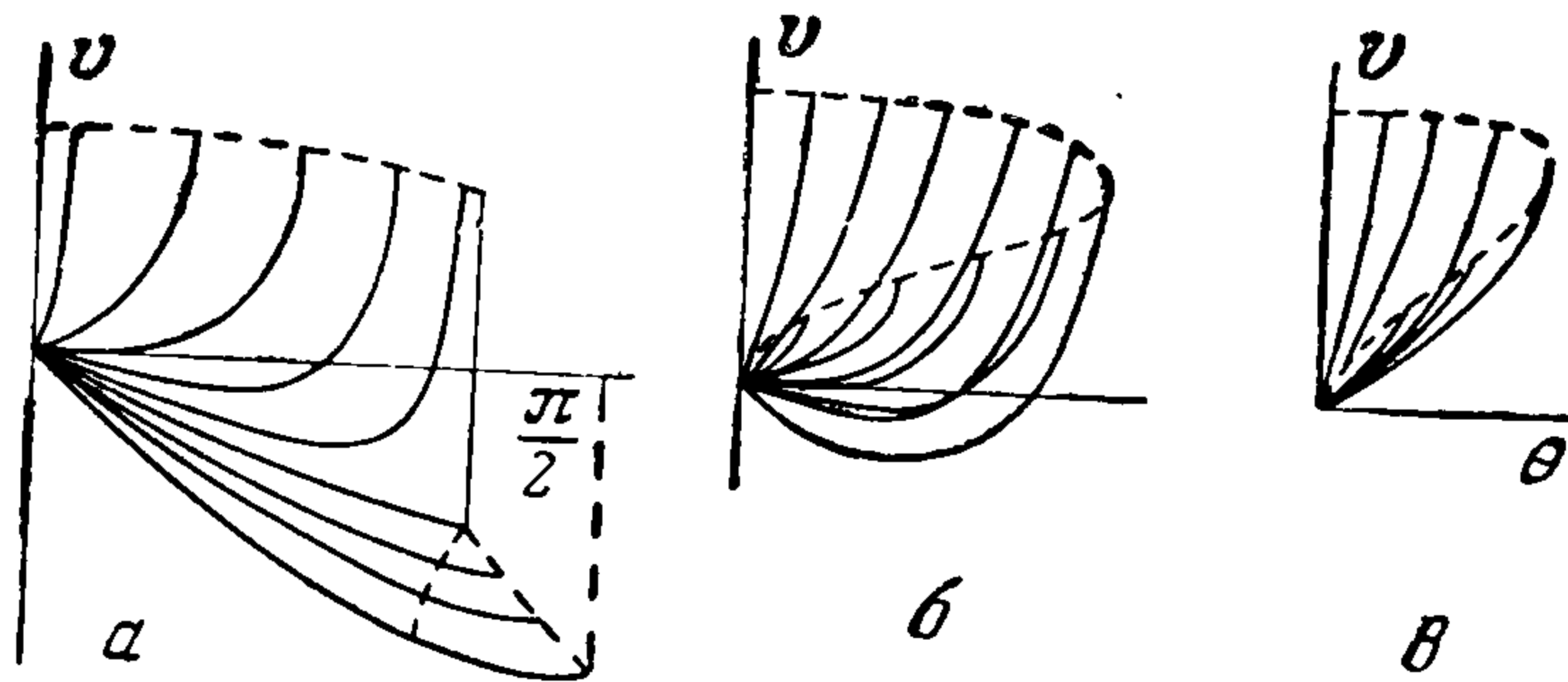
из уравнения сохранения массы. Для этого нужно воспользоваться связью $dv/d\theta = -u$, справедливой для поступательного потока при $\theta_0 = 1/2\pi$.

На фиг. 9 кривая 1 соответствует обращению в нуль числителя в выражении (3.6) для $dv/d\theta$ при $\theta = 0$, на прямой $\cos \alpha - u^\circ = 0$ обращается в нуль знаменатель этого

выражения, а кривая 2 дает значения u° при $\theta_0 = 1/2\pi$ в зависимости от $\cos \alpha$, т. е. от угла атаки.

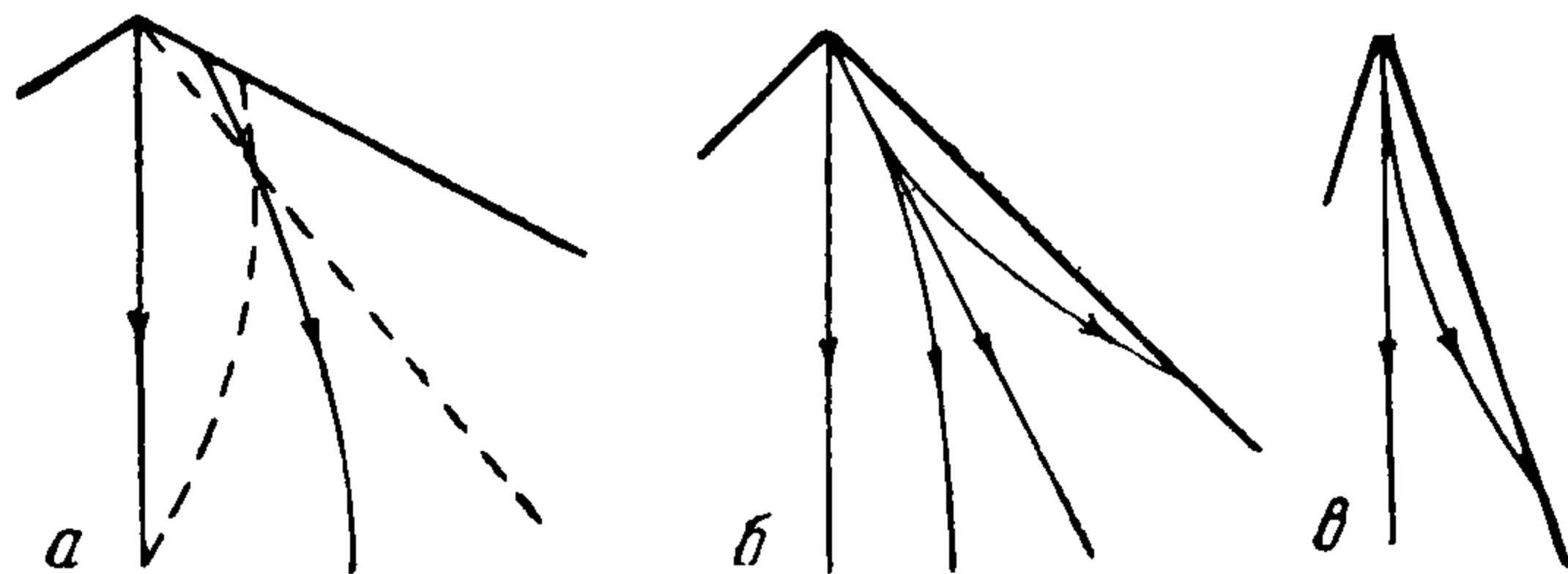
В зависимости от $\cos \alpha$ могут возникнуть три существенно различных случая.

а) Случай $\cos \alpha > \gamma^{-1} \sqrt{\gamma^2 - 1}$. В этом случае при $\theta_0 = 1/2\pi$ возможно обтекание крыла с присоединенным скачком. Зависимость v_0' от u_0 изображена на фиг. 10, а; точками u_{01} и u_{02} отмечены два возможных значения скорости u_0 при $\theta_0 = 1/2\pi$. Зависимость $v_\theta = -u_{01} \sin \theta$, соответствующая большему из этих двух значений скорости, изображена нижней кривой на фиг. 11, а. При увеличении u_0 от значения u_{01} производная v'_θ возрастает. Интегральные кривые $v(\theta)$ приведены на фиг. 11, а. Это поведение аналогично тому, которое было рассмотрено в первом примере. На фиг. 12, а, б, в изображена смена режимов обтекания при уменьшении θ_0 от $1/2\pi$ до 0. При изменении u_0 от u_{01} в сторону меньших значений угол θ_0



Фиг. 11 а, б, в

сначала растет от $1/2\pi$ до некоторой предельной величины, а затем уменьшается, достигая вновь значения $1/2\pi$ при $u_0 = u_{02}$, что соответствует второму возможному режиму обтекания крыла с $\theta_0 = 1/2\pi$ (с более сильным скачком). Дальнейшее уменьшение u_0 приводит вновь к уменьшению θ_0 .



Фиг. 12 а, б, в

Анализ течений с $u_{02} < u_0 < u_{01}$ требует введения в рассмотрение скачков уплотнения внутри области движения газа. Учитывая ограниченный интерес этого случая и случая $u_0 < u_{02}$, не будем рассматривать их более детально.

б) Случай $1/2\gamma^{-1} \sqrt{(3\gamma + 1)(\gamma - 1)} < \cos \alpha < \gamma^{-1} \sqrt{\gamma^2 - 1}$. В этом случае зависимость v_0' от u_0 имеет качественно тот же вид, что и ранее (фиг. 10, б), но обте-

кание крыла с присоединенным скачком невозможно. При уменьшении u_0 от $V_\infty \cos \alpha$ производная v'_0 уменьшается от ∞ до 0, становится отрицательной, достигает минимума, а затем вновь растет. Кривые $v(\theta)$ приведены на фиг. 11, б. Для каждого θ_0 получаем два решения, причем имеется наибольшее значение θ_0 , при котором еще возможно коническое течение. Возможные режимы течения соответствуют изображенным на рис. 12, б, в.

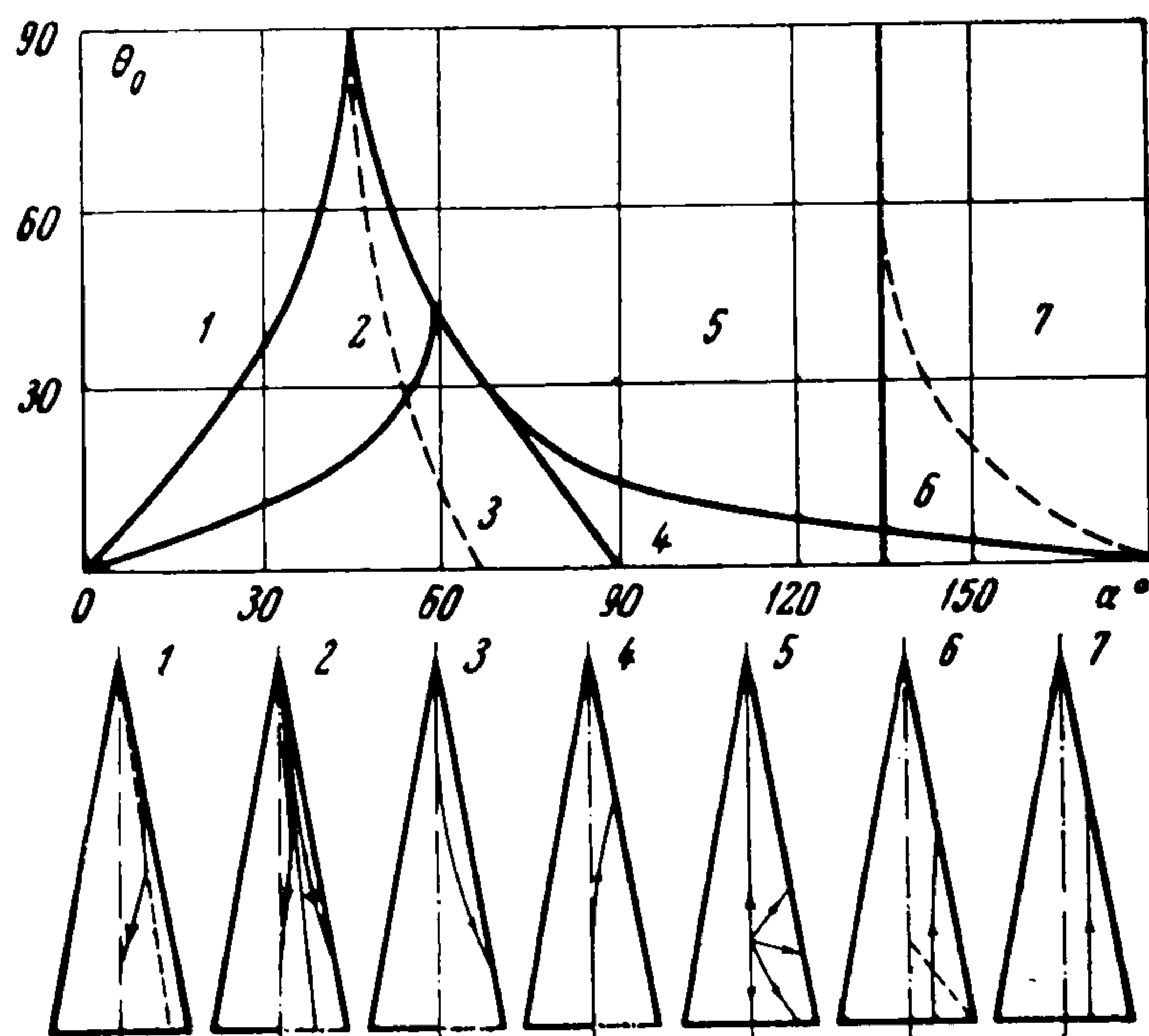
с) *Случай* $\cos \alpha < \frac{1}{2}\gamma^{-1} \sqrt{(3\gamma + 1)(\gamma - 1)}$. Зависимость v'_0 от u_0 изображена на фиг. 10, в, кривые $v(\theta)$ — на фиг. 11, в. В этом случае возможен лишь один режим течения, при котором все линии тока направлены от оси симметрии через кромки крыла наружу. Отметим лишь, что при уменьшении $\cos \alpha$ значения u_0 становятся отрицательными, т. е. поток становится направленным к вершине крыла.

На фиг. 13, относящейся к случаю $M = \infty$ и $\gamma = 1.4$, нанесены линии, отделяющие области различных видов симметричного обтекания треугольного крыла. В областях 1—4 возможны конические режимы обтекания. При этом каждой паре значений угла атаки α и полуугла при вершине крыла θ_0 соответствуют два решения так же, как при обтекании плоского крыла бесконечного размаха ($\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$).

В областях 5—7 конических течений нет (исключение составляет пересечение областей 6 и 4). В области 1 и в части областей 2 и 3 слева от пунктирной линии задняя кромка крыла не оказывает влияния вверх по потоку (в решении с более слабой волной), и, следовательно, полученные для бесконечного крыла решения пригодны и для конечного крыла. В остальной области изменения параметров нужно рассматривать конечные крылья.

Для примера внизу на фиг. 13 показано изменение картины обтекания крыла с $\theta_0 = 10^\circ$ при изменении угла атаки от 0 до 180° .

В области 1 скачок присоединен к передним кромкам крыла. За скачком имеется область поступательного потока, непрерывным образом (через акустическую характеристику) переходящего в поток, линии тока которого асимптотически приобретают направление к средней линии крыла. При переходе из области 1 в область 2 скачок становится отсоединенным вдоль кромок, но сохраняет общую с крылом вершину. Составляющая скорости по нормали к кромке крыла равна при этом скорости звука. Линии, на которых составляющая скорости обращается в нуль и от которых поток растекается к кромкам крыла и к его средней линии, при увеличении угла атаки сближаются и при переходе (фиг. 13) в область 3 сливаются с средней линией (при полууглах крыла, больших некоторого $\theta_0^*(M)$, это слияние не происходит до нарушения конического характера потока). При переходе в область 4 течение на средней линии крыла меняет направление: газ начинает двигаться к вершине крыла. Для конечного крыла это означает появление на его поверхности критической точки. При увеличении угла атаки и выходе в область 5 коническое течение становится невозможным, и нужно рассматривать крыло конечного размера. Критическая точка по мере дальнейшего роста угла атаки смещается к задней кромке крыла и сходит с нее; при входе в область 6 скачок становится присоединенным вдоль задней кромки, и вблизи нее появляется область поступательного потока, которая постепенно растет и при входе в область 7 заполняет всю поверхность крыла.



Фиг. 13

С некоторыми видоизменениями описанная смена видов обтекания происходит и для крыльев с другими углами при вершине.

Отметим интересную с принципиальной точки зрения деталь. Выше отмечалось, что для одного и того же бесконечного крыла либо коническое течение не существует, либо существуют два разных конических течения. Как известно, при обтекании клина ($\theta_0 = 1/2\pi$) из двух возможных течений реализуется то, которое соответствует более слабому скачку. То же справедливо и для треугольного крыла с присоединенным вдоль кромок скачком в области *1*. Но при постепенном увеличении угла атаки и непрерывном переходе из области *1* в область *4* обнаруживается, что решению соответствует более сильный скачок. Решение же с более слабым скачком оказывается в числе нереализуемых. Это, по-видимому, — первый пример двузначного стационарного течения с ударными волнами, в котором следует отдать предпочтение решению с более сильной волной.

В заключение отметим, что краткий вывод основной системы уравнений и анализ некоторых ее свойств был дан автором ранее в работах [6,7].

В работе [8] содержатся примеры расчета обтекания треугольного крыла в режиме, соответствующем фиг. 12, б при использовании первого приближения метода интегральных соотношений.

Поступила 13 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. К а н т о р о в и ч Л. В. Об одном прямом методе решения задачи о минимуме двойного интеграла. Изв. АН СССР, 1933, № 5.
2. К о ч и н Н. Е., К и б е л ь И. А., Р о з е Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II. Физматгиз, 1963.
3. Ч е р н ы й Г. Г. Метод интегральных соотношений для расчета течений газа с сильными ударными волнами. ПММ, 1961, т. 25, вып. 1.
4. Д о р о д н и ц ы н А. А. Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики. Тр. III Всесоюзн. математ. съезда, т. II, Изд-во АН СССР, 1956.
5. Б е л о ц е р к о в с к и й О. М. Расчет обтекания осесимметричных тел с отошедшей ударной волной. Вычисл. центр АН СССР, 1961.
6. Ч е р н ы й Г. Г. Гиперзвуковое обтекание крыльев при больших углах атаки. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 2.
7. Ч е р н ы й Г. Г. Плоское крыло в гиперзвуковом потоке. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 4.
8. Б а з ж и н А. П. Расчет обтекания треугольного крыла методом интегральных соотношений. Инж. ж., 1964, т. 4.