

ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ЗАДАЧА О СВЕРХЗВУКОВОМ ТЕЧЕНИИ
НА ВХОДЕ В ЭЛЕКТРОДНУЮ ЗОНУ
МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО КАНАЛА

А. А. Бармин, А. Г. Куликовский, Л. Ф. Лобанова
(Москва)

Обычно предполагается, что в магнитогидродинамических установках длина канала много больше его ширины. Это позволяет производить расчет течения по одномерной схеме. Однако этот расчет не применим к областям, где происходит резкое изменение (на длинах порядка ширины канала) параметров приложенного электромагнитного поля. Поэтому представляет интерес выяснение характера течения в таких областях. В работах [1,2] изучались электрические поля и поля токов в области входа потока в магнитное поле и в области между электродами. При этом течение считалось заданным, и влиянием электромагнитного поля на него пренебрегалось. В работе [3] рассмотрена линеаризованная задача о влинии электромагнитного поля вблизи концов электродов на течение несжимаемой жидкости. Магнитное поле считалось постоянным и отличным от нуля в области между электродами.

В настоящей работе рассматривается влияние электромагнитного поля на сверхзвуковой поток газа. Поскольку параметр взаимодействия и магнитное число Рейнольдса обычно малы, то задача рассматривалась в линеаризованной постановке, а магнитное поле считалось заданным и переменным по длине канала.

Постановка задачи. Рассмотрим стационарную двумерную задачу о сверхзвуковом течении проводящего газа в плоском канале $-a < y < a$, $-\infty < x < \infty$. Стенки канала при $x < 0$ являются изоляторами, при $x > 0$ — проводниками. Газ считается совершенным, идеальным с постоянной электропроводностью σ . Закон Ома берется в форме

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right)$$

что справедливо при достаточно высокой плотности газа.

При $x = -\infty$ газ движется поступательно со сверхзвуковой скоростью U , а электрическое поле E равно нулю. При нахождении электрического поля предполагается его ограниченность при $x = \infty$.

Магнитное число Рейнольдса R_m и параметр взаимодействия N

$$R_m = \frac{4\pi\sigma U a}{c^2}, \quad N = \frac{\sigma H_0^2 a}{\rho U c^2}$$

будем считать малыми. Малость R_m позволяет пренебрегать индуцированным магнитным полем по сравнению с заданным внешним.

Пусть заданное поле имеет вид

$$\mathbf{H} = H(x) \mathbf{e}_z, \quad H(x) = \begin{cases} H_0 & \text{при } x \geq 0 \\ H_0 (k^2 + 1) e^{\pi x/a} (1 + k^2 e^{\pi x/a})^{-1} & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь \mathbf{e}_z — единичный вектор, перпендикулярный плоскости течения, k — параметр, характеризующий профиль магнитного поля.

Так как параметр взаимодействия N предполагается малым, то возмущения скорости и термодинамических величин так же малы.

Поэтому в первом приближении электрическое поле и токи определяются по заданной постоянной скорости газа и магнитному полю, а затем вычисляются электромагнитная сила и джоулево тепло, и из линеаризованных уравнений движения находятся все гидродинамические параметры. Таким образом, общая система уравнений магнитной гидродинамики в этом случае разбивается на две системы с соответствующими граничными условиями.

Для определения электрического поля $E = \text{grad } \varphi$ и тока имеем уравнения неразрывности тока и закон Ома, т. е.

$$\text{div } \mathbf{j}' = 0, \quad \mathbf{j}' = [(\text{grad } \varphi)' - h(x) \mathbf{e}_y] \quad (2)$$

Здесь штрихами отмечены безразмерные величины, определяемые формулами $x' = \frac{x}{a}$, $y' = \frac{y}{a}$, $\mathbf{j}' = \frac{4\pi a}{HcR_m} \mathbf{j}$, $h(x) = \frac{H(x)}{H_0}$, $(\text{grad } \varphi)' = \frac{\text{grad } \varphi}{H_0 U / c}$

Так как на электродах потенциал постоянный, а на изоляторе отсутствует нормальная составляющая тока, имеем для безразмерного потенциала граничные условия

$$\begin{aligned} \varphi' = \pm \eta \equiv \frac{\varphi_0}{aH_0U/c} \quad \text{при } y' = \pm 1, x' > 0, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} = h(x) \quad \text{при } y' = \pm 1, x' < 0 \\ |(\text{grad } \varphi)'| = 0 \quad \text{при } x' = -\infty, \quad (\text{grad } \varphi)' = \eta \mathbf{e}_y \quad \text{при } x' = \infty \end{aligned} \quad (3)$$

Последнее условие вытекает из ограниченности электрического поля при $x = \infty$.

Линеаризованные гидродинамические уравнения имеют вид

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{1}{M^2} \frac{\partial \rho'}{\partial x'} + \frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial \xi'}{\partial x'} = F_x$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial \rho'}{\partial x'} = 0$$

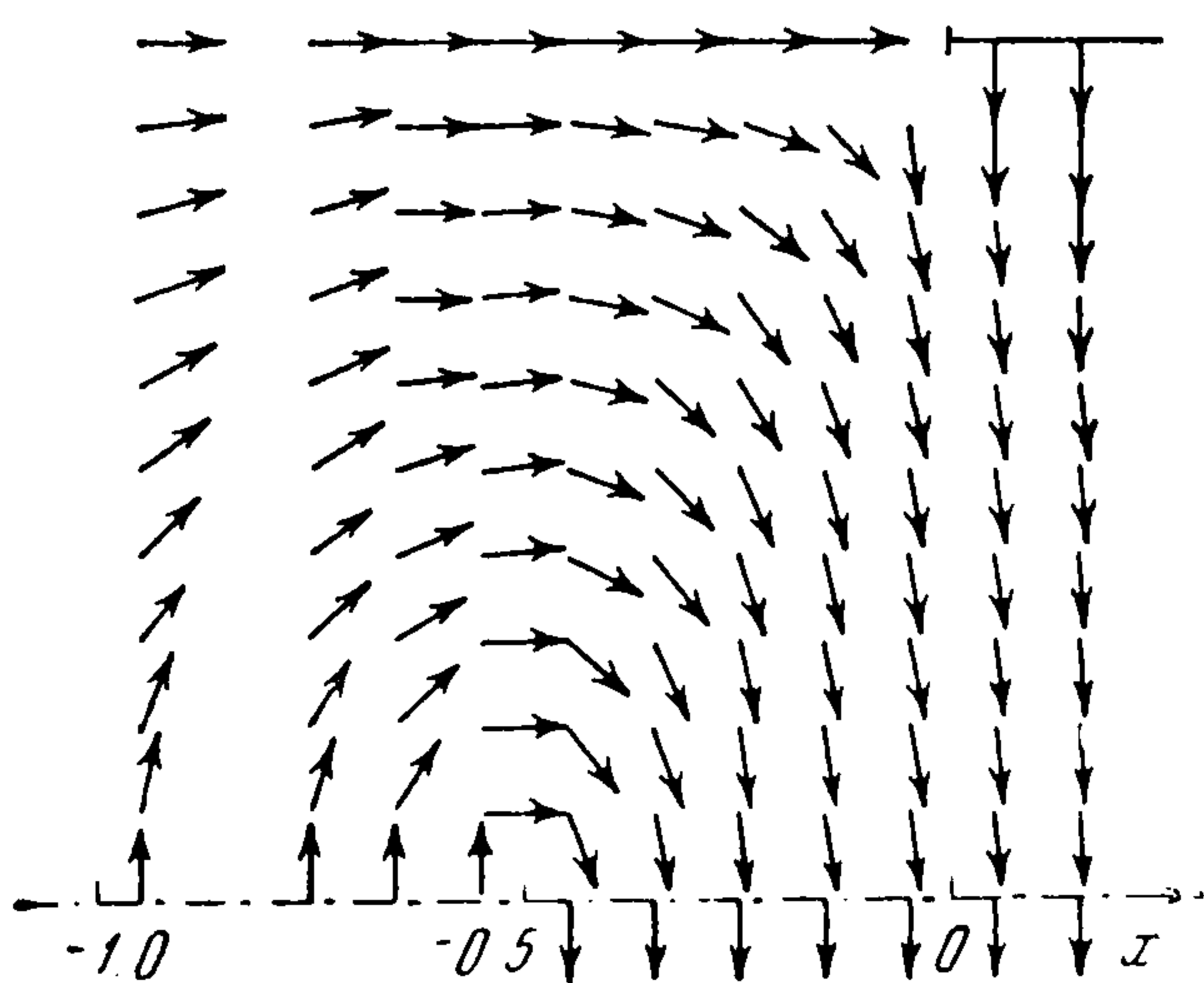
$$\frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{1}{M^2} \frac{\partial \rho'}{\partial y'} + \frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial \xi'}{\partial y'} = F_y$$

$$\frac{\partial \xi'}{\partial x'} = \gamma(\gamma - 1) M^2 Q$$

$$F_x = h(x) \left[\frac{\partial \varphi'}{\partial x'} - h(x) \right]$$

$$F_y = -\frac{\partial \varphi'}{\partial x'} h(x)$$

$$Q = [(\text{grad } \varphi)' - h(x) \mathbf{e}_y]^2$$



Фиг. 1

Безразмерные величины введены следующими формулами

$$\mathbf{v}' = u' \mathbf{e}_x + v' \mathbf{e}_y = \frac{\mathbf{v}}{U} \frac{1}{N}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{1}{N}, \quad \xi' = \frac{s}{Nc_v}$$

Здесь ρ_0 — значение невозмущенной плотности, ρ , v , s — возмущения плотности, скорости и энтропии.

При этом возмущение скорости должно удовлетворять граничным условиям

$$v' = 0 \quad \text{при } y' = \pm 1, \quad v' = 0 \quad \text{при } x' = -\infty$$

Как известно, система (2) сводится к уравнению Лапласа для φ со смешанными граничными условиями (3). Эта задача может быть решена [1, 2] по формуле Келды-

ша — Седова. Для магнитного поля, заданного равенством (1), решение имеет вид

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial y'} = - \frac{(k^2 + 1) (e^{2\alpha} \cos 2\beta - k^2 e^{4\alpha})}{1 + k^4 e^{4\alpha} - 2k^2 e^{2\alpha} \cos 2\beta} + \quad (5)$$

$$+ A(\alpha, \beta) \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k^2} \frac{1 - k^2 e^\alpha \sin \beta - k^2 e^{2\alpha} \cos 2\beta - k^4 e^{3\alpha} \sin \beta}{1 - 2k^2 e^{2\alpha} \cos 2\beta + k^4 e^{4\alpha}} -$$

$$- B(\alpha, \beta) \sqrt{k^2 + 1} \frac{e^\alpha \cos \beta + e^{2\alpha} \sin 2\beta - k^2 e^{3\alpha} \cos \beta}{1 - 2k^2 e^{2\alpha} \cos 2\beta + k^4 e^{4\alpha}} +$$

$$+ A(\alpha, \beta) \left(\eta - \frac{k^2 + 1}{k^2} \right) + \gamma_0 \operatorname{sign} \beta \left(\frac{\sqrt{1 + 2e^{2\alpha} \cos 2\beta + e^{4\alpha}} - 1 - e^{2\alpha} \cos 2\beta}{2 + 4e^{2\alpha} \cos 2\beta + 2e^{4\alpha}} \right)^{1/2}$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'} = - \frac{(k^2 + 1) e^{2\alpha} \sin 2\beta}{1 + k^4 e^{4\alpha} - 2k^2 e^{2\alpha} \cos 2\beta} +$$

$$+ A(\alpha, \beta) \sqrt{k^2 + 1} \frac{e^\alpha \cos \beta + e^{2\alpha} \sin 2\beta - k^2 e^{3\alpha} \cos \beta}{1 - 2k^2 e^{2\alpha} \cos 2\beta + k^4 e^{4\alpha}} +$$

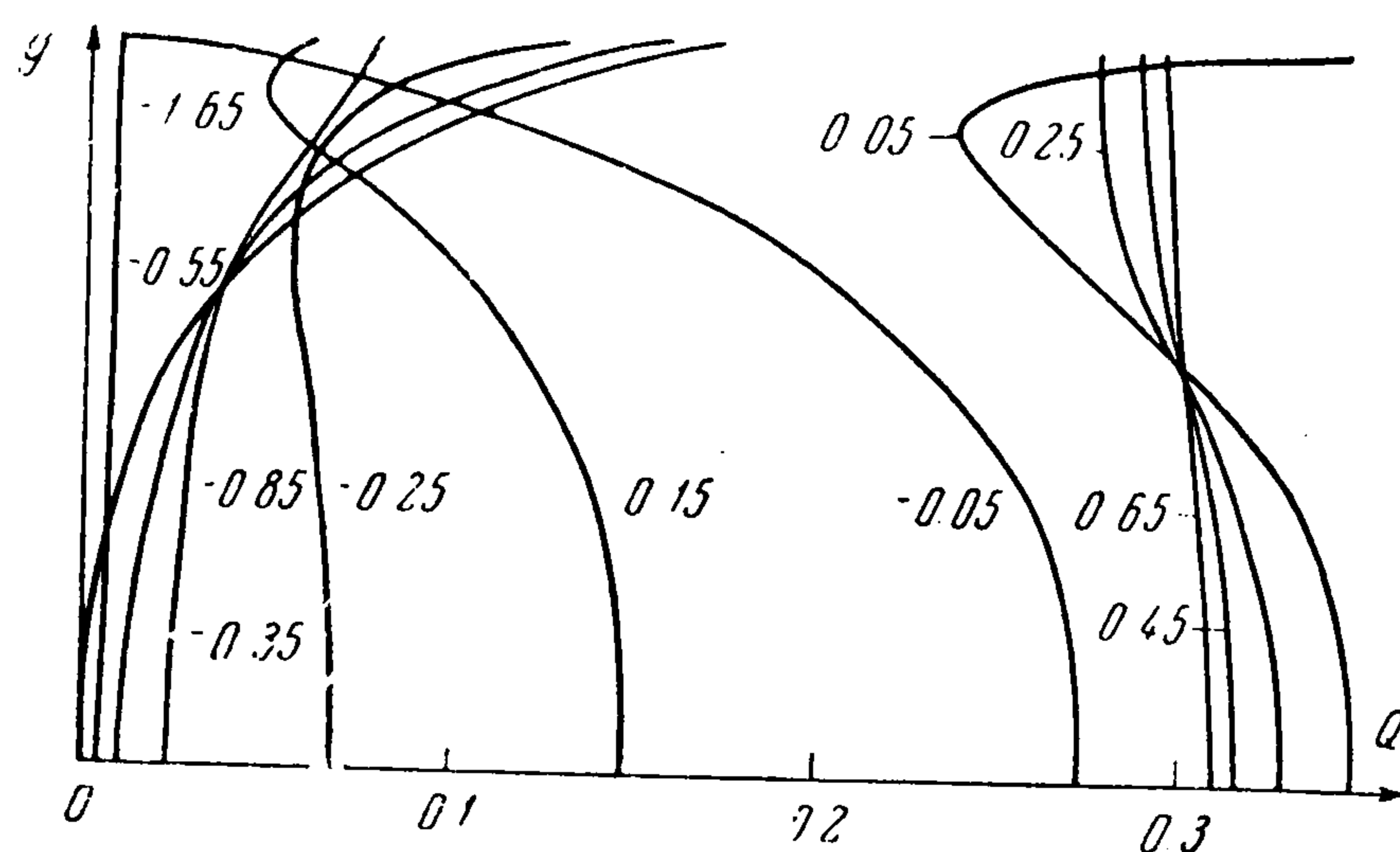
$$+ B(\alpha, \beta) \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k^2} \frac{1 - k^2 e^\alpha \sin \beta - k^2 e^{2\alpha} \cos 2\beta - k^4 e^{3\alpha} \sin \beta}{1 - 2k^2 e^{2\alpha} \cos 2\beta + k^4 e^{4\alpha}} +$$

$$+ B(\alpha, \beta) \left(\eta - \frac{k^2 + 1}{k^2} \right) - \gamma_0 \left(\frac{\sqrt{1 + 2e^{2\alpha} \cos 2\beta + e^{4\alpha}} + 1 + e^{2\alpha} \cos 2\beta}{2 + 4e^{2\alpha} \cos 2\beta + 2e^{4\alpha}} \right)^{1/2}$$

$$A(\alpha, \beta) = \left(\frac{\sqrt{1 + 2e^{2\alpha} \cos 2\beta + e^{4\alpha}} - 1 + e^{2\alpha}}{2 + 4e^\alpha \sin \beta + 2e^{2\alpha}} \right)^{1/2} \quad \left(\alpha = \frac{\pi x}{2a}, \beta = \frac{\pi y}{2a} \right)$$

$$B(\alpha, \beta) = \left(\frac{\sqrt{1 + 2e^{2\alpha} \cos 2\beta + e^{4\alpha}} + 1 - e^{2\alpha}}{2 + 4e^\alpha \sin \beta + 2e^{2\alpha}} \right)^{1/2} \quad \left(\gamma_0 = -\eta - \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k^2} + \frac{k^2 + 1}{k^2} \right)$$

Заметим, что электрическое поле в канале не зависит от вида магнитного поля в области между электродами, так как оно входит только через граничные условия на изоляторе.



Фиг. 2

Используя эти выражения, по (2), (4) можно вычислить распределение токов, сил и диссипации в канале. На фиг. 1, 2 представлены поле направлений электрического тока и распределение диссипации поперек канала при различных значениях x для $k = 1$.

Из системы (4) исключим ρ и ξ ; получим

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} (M^2 - 1) - \frac{\partial v'}{\partial y'} = M^2 [F_x - (\gamma - 1) Q] \quad - \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} = F_y - \int_{-\infty}^{x'} \frac{\partial F_x}{\partial y} dx' \quad (6)$$

При этом ρ' и ξ' находятся из уравнений

$$\rho' = -M^2 u' - \frac{1}{\gamma} \xi' + M^2 \int_{-\infty}^{x'} F_x dx', \quad \xi' = \gamma(\gamma - 1) \int_{-\infty}^{x'} Q dx' \quad (7)$$

Уравнения характеристик системы уравнений (6) имеют вид

$$y' = \pm \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} x', \quad \frac{\partial}{\partial x'} \left[u' \mp \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} v' \right] = \\ = - \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \left\{ (\gamma - 1) Q - F_x \pm \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \left(F_y - \frac{\partial}{\partial y'} \int_{-\infty}^{x'} F_x dx' \right) \right\} \quad (8)$$

Для численного решения задачи была выбрана ортогональная сетка точек x'_n и y'_m таким образом, что $\Delta y' \equiv y'_{m+1} - y'_m = 0.1$, $\Delta x'$ выбиралось равным $\sqrt{M^2 - 1} \Delta y'$.

k	M	η	γ
1	1.41	0.45	1.4
1	1.41	0.5	1.4
1	1.41	0.3	1.4
1	2.0	0.45	1.4
0.1	1.41	0.45	1.4

Для определения значений u' , v' , ρ' и ξ' в точке $x'_n y'_m$ использовались значения этих величин в точках $x'_{n-1} y'_{m-1}$, $x'_{n-1} y'_m$, $x'_{n-1} y'_{m+1}$, причем для вычисления интегралов при решении уравнений (8) и (7) использовалась формула трапеций без промежуточных точек между точками сетки.

Расчет проводился на электронной машине «Стрела» для комбинаций значений параметров, приведенных в табличке слева.

Результаты. Характерной особенностью поля электрических токов является наличие кольцевых токов с особой точкой типа центр на оси канала при входе потока в магнитное поле (фиг. 1). Область кольцевых токов отделяется от области, где токи замыкаются через электроды, сепаратрисой, которая заканчивается на стенках канала при $x < 0$ седловыми особыми точками.

На концах электродов плотность токов становится бесконечной, но суммарный ток, суммарное количество джоулева тепла, суммарный импульс, которые передаются жидкости в любой окрестности этих особых точек, конечны.

С увеличением параметра k , т. е. выдвиганием магнитного поля за электроды, область с кольцевыми точками также отодвигается вверх по потоку. Так, значения абсцисс особой точки центр X° и седловой особой точки X^\vee приведены здесь в табличке справа.

k	X°	X^\vee	η
0.1	-0.35	-0.05	0.45
1	-0.55	-0.05	0.45
10	-1.55	-0.55	0.3
1	-0.65	-0.15	0.3

При уменьшении коэффициента нагрузки область кольцевых токов также смещается вверх по потоку, а плотность токов возрастает.

Вниз по потоку поле токов быстро становится одномерным. Так, на одной четверти ширины канала от конца электродов ($x' \sim 0.5$) отношение токов $j_x / j_y \sim 0.015$ ($k = 1$).

Джоулева диссипация при больших отрицательных x' мала (фиг. 2). (На фиг. 2 и следующих фигурах значения x' , для которых построены графики, указаны рядом с соответствующими кривыми). Например $Q < 0.05$ для $k = 1$ при $x' = -1.65$.

При x' , сравнимых с X^\vee , диссипация у стенки увеличивается за счет увеличения плотности токов, а в окрестности особой точки центр падает

В окрестности линии раздела токов (сепаратрисы) диссипация в средней части канала резко возрастает, а у стенок, наоборот, падает до нуля в окрестности седловой особой точки. В окрестности начала электродов у стенки происходит резкое увеличение диссипации. Затем происходит выравнивание диссипации по сечению канала. При $x' = 0.85$ для $k = 1$, $\eta = 0.45$ относительное изменение Q поперек канала порядка 0.03.

Так как при уменьшении k седловая особая точка приближается к $x' = 0$, то суммарное количество тепла, выделяющееся в окрестности начала электрода, уменьшается за счет малой диссипации в окрестности седловой особой точки.

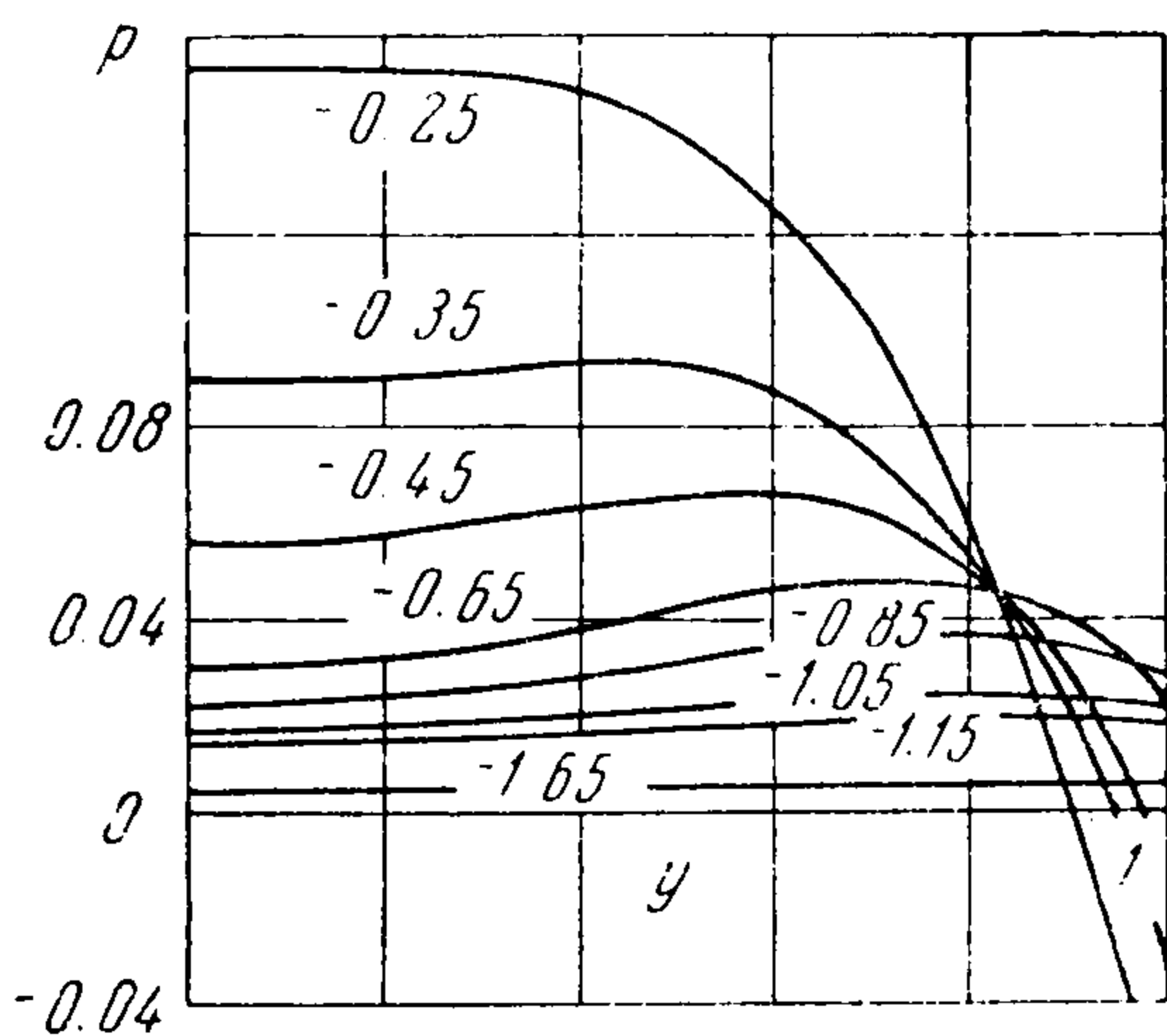
С уменьшением коэффициента нагрузки диссипация Q увеличивается.

Приводим значения Q на оси канала при $k = 1$ для трех значений x'

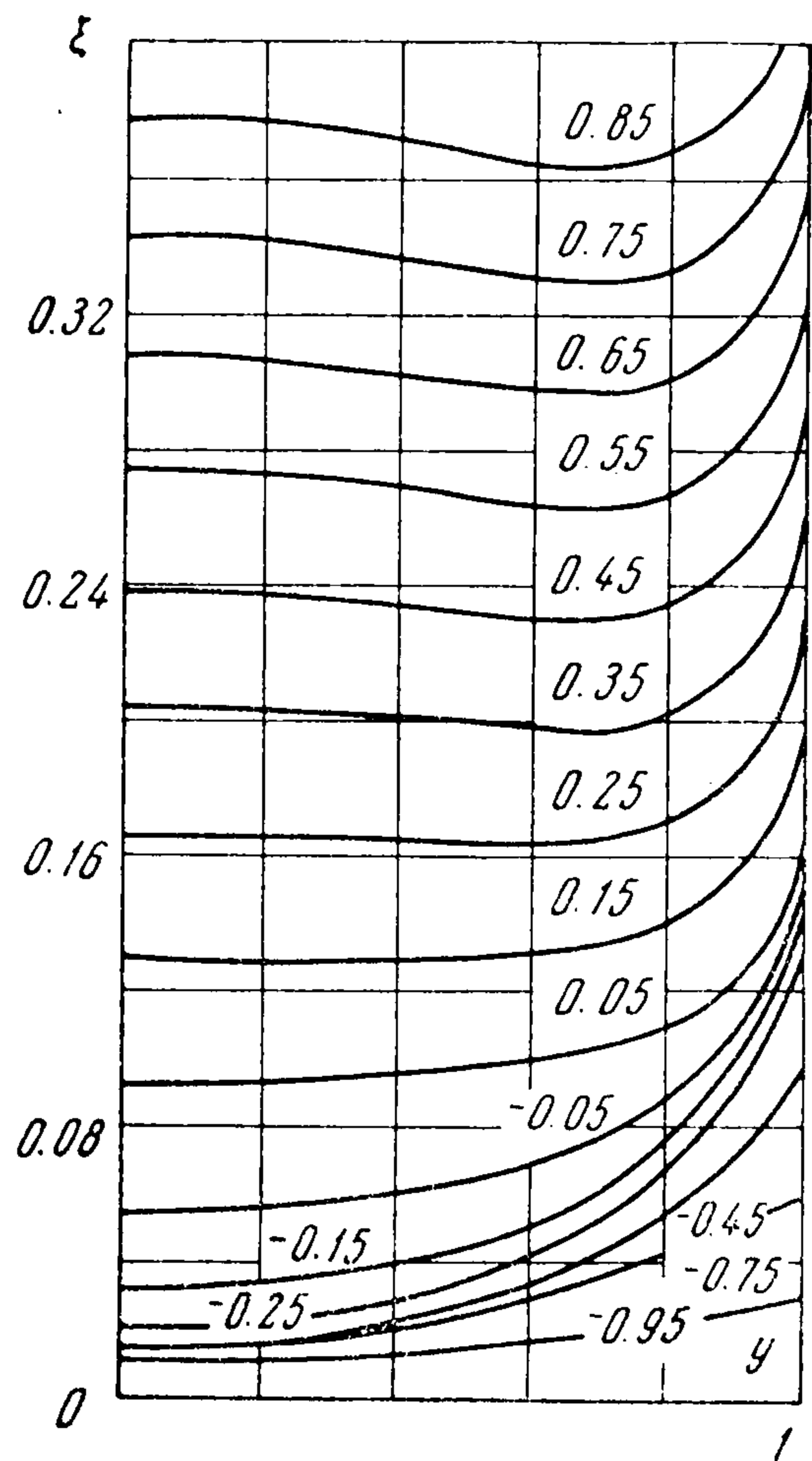
$x' = -0.25$	-0.05	0.65	
$Q = 0.06$	0.27	0.31	при $\eta = 0.45$
$Q = 0.12$	0.39	0.49	при $\eta = 0.30$

Диссипация определяет прирост энтропии, график которой представлен для $k = 1$, $M = 1.4$, $\eta = 0.45$ на фиг. 3.

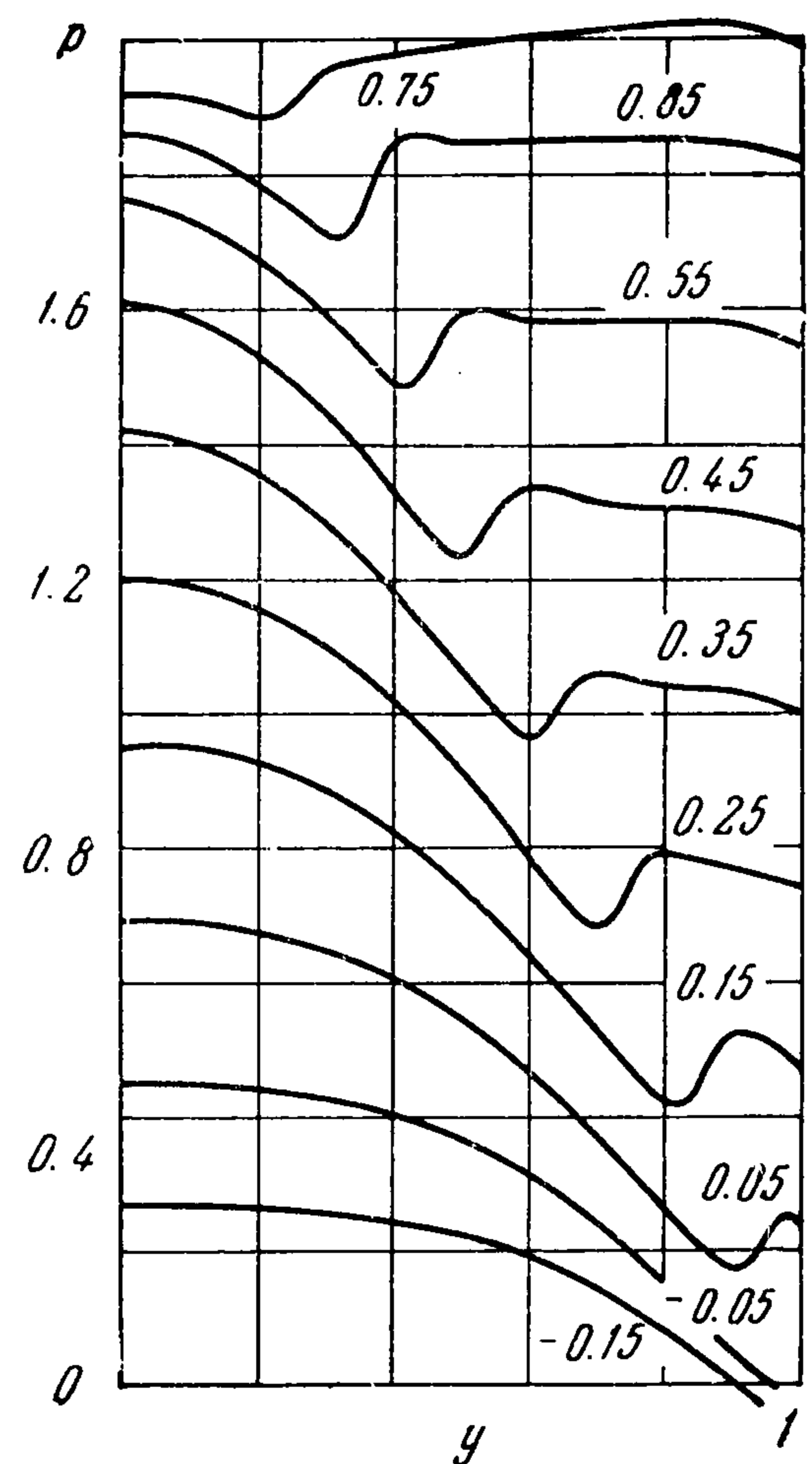
При больших отрицательных x' давление мало меняется поперек канала.



Фиг. 4



Фиг. 3

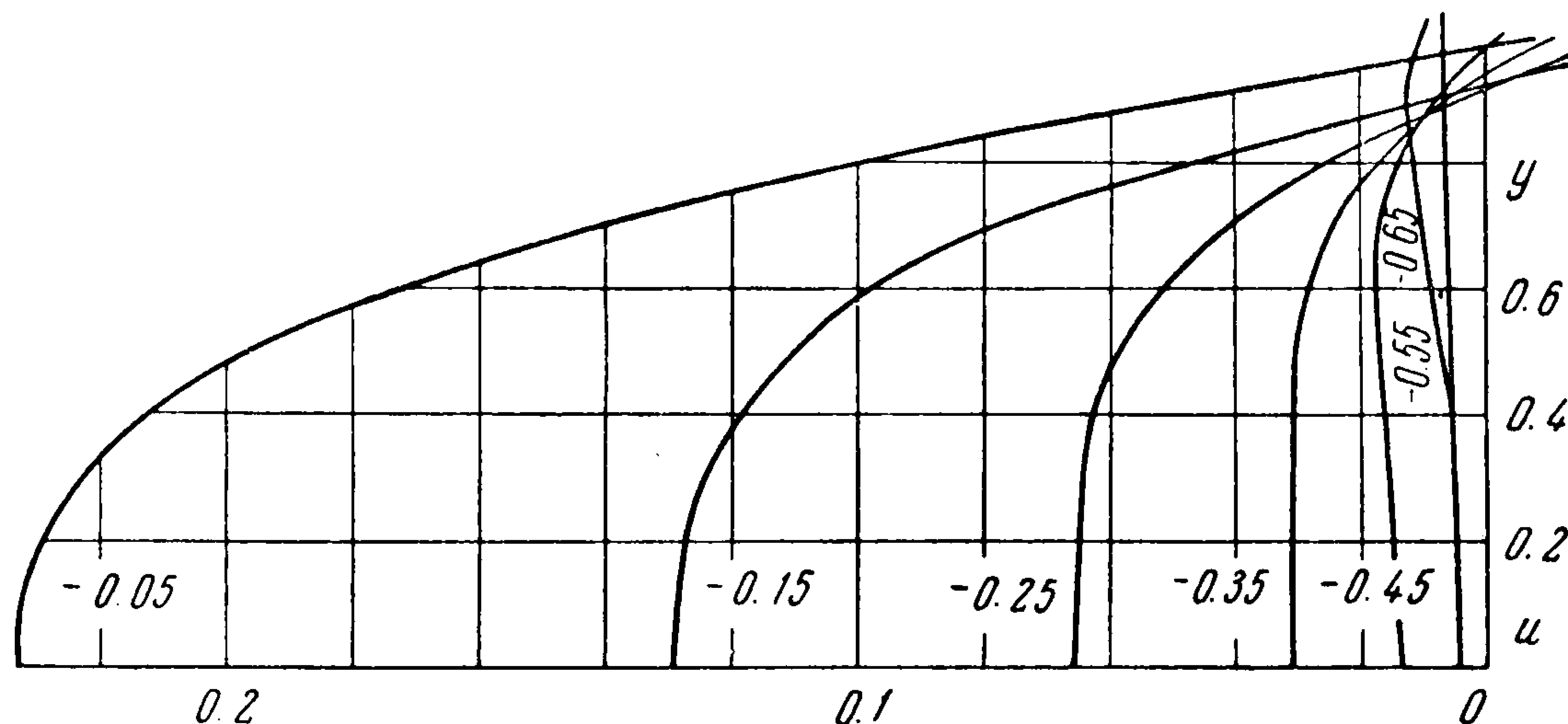


Фиг. 5

Так, при $k = 1$, $M = 1.4$, $\eta = 0.45$ для $x' = -1.15$ относительное изменение давления поперек канала порядка 0.2. При x' порядка X^* у стен-

ки появляется поперечная сила, направленная к оси канала. Эта сила уменьшает давление в указанной области. Вследствие этого на некоторой части стенки возникает область разрежения. В этой области образуется пологая волна разрежения.

В окрестности начала электродов за счет увеличения диссипации и тормозящей силы образуется волна сжатия. При уменьшении k эта волна сжа-



Фиг. 6

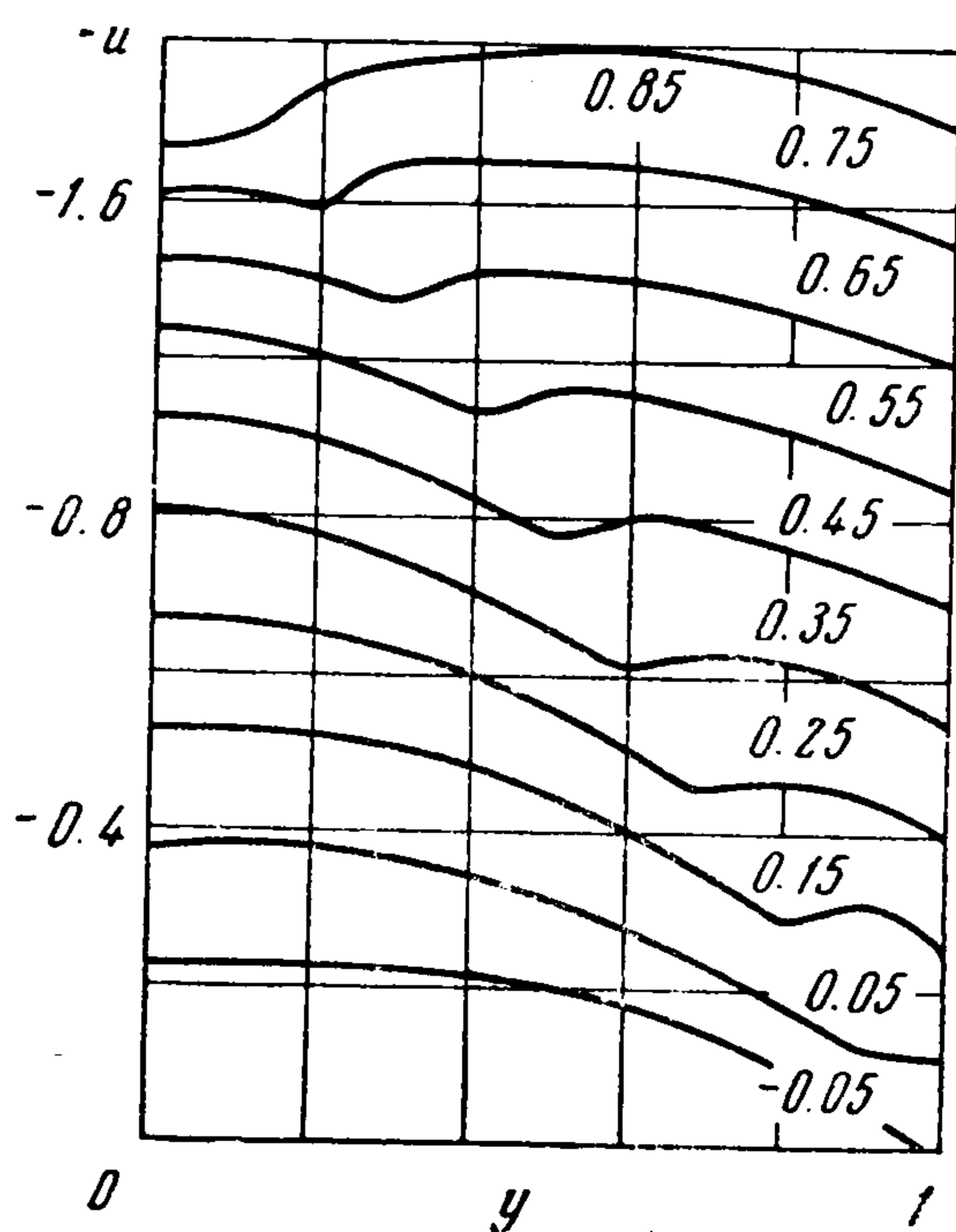
тия становится слабее за счет уменьшения выделения тепла в этой области.

После прохождения области с сильной диссипацией образуется волна разрежения, которая особенно ярко выражена в случае $k = 1$, $\eta = 0.3$, $M = 1.4$, когда диссипация в окрестности начала электрода особенно велика.

При положительных значениях x' ($x' > 0.25$) происходит линейный по x' рост среднего по сечению давления. По этому фону распространяются вышеуказанные волны. Кривые распределения давления изображены на фиг. 4, 5.

При больших отрицательных x' происходит равномерное торможение потока ($u < 0$) вследствие выделяющегося при диссипации тепла (фиг. 6, 7).

Ниже по потоку торможение в средней части уменьшается за счет увеличения ускоряющей силы. При x' , близких к X^* , происходит ускорение потока у стенки, вызванное отрицательным градиентом да-



Фиг. 7

вления. В окрестности сепаратрисы начинается резкое торможение потока. В дальнейшем происходит линейное по x' уменьшение средней по сечению величины скорости.

Величина возмущения поперечной скорости на порядок меньше продольной, т. е. $v'/u' \sim 0.1$. В области кольцевых токов происходит сжатие потока к центру ($v' < 0$ при $y > 0$) за счет поперечных сил. После

прохождения центра поток опять расширяется, и по нему распространяется волна сжатия от концов электродов. В дальнейшем эти волны распространяются вниз по потоку.

В заключение отметим, что уже примерно на одной четверти ширины канала вниз по потоку после начала электродов поток становится практически однородным и далее может рассчитываться по одномерной теории. В качестве начальных данных для такого расчета нужно брать величины, которые получаются из двумерной теории после осреднения их по ширине канала. Если интересоваться не только осредненными характеристиками потока, то можно рассмотреть распространение волн, возникших на входе и вычисленных в настоящей работе по линейной теории, по фону, который вычисляется по одномерной нелинейной теории.

Поступила 17 XI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. В а т а ж и н А. Б., К решению некоторых краевых задач магнитной гидродинамики. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5, стр. 965—968.
2. В а т а ж и н А. Б. Магнитогидродинамическое течение в плоском канале с конечными электродами. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1, стр. 52—58.
3. S u t t o n G. W., C a r l s o n A. W. End effects in inviscid flow in magnetohydrodynamic channels. J. Fluid Mech., 1961, vol. 11, pt. 1.