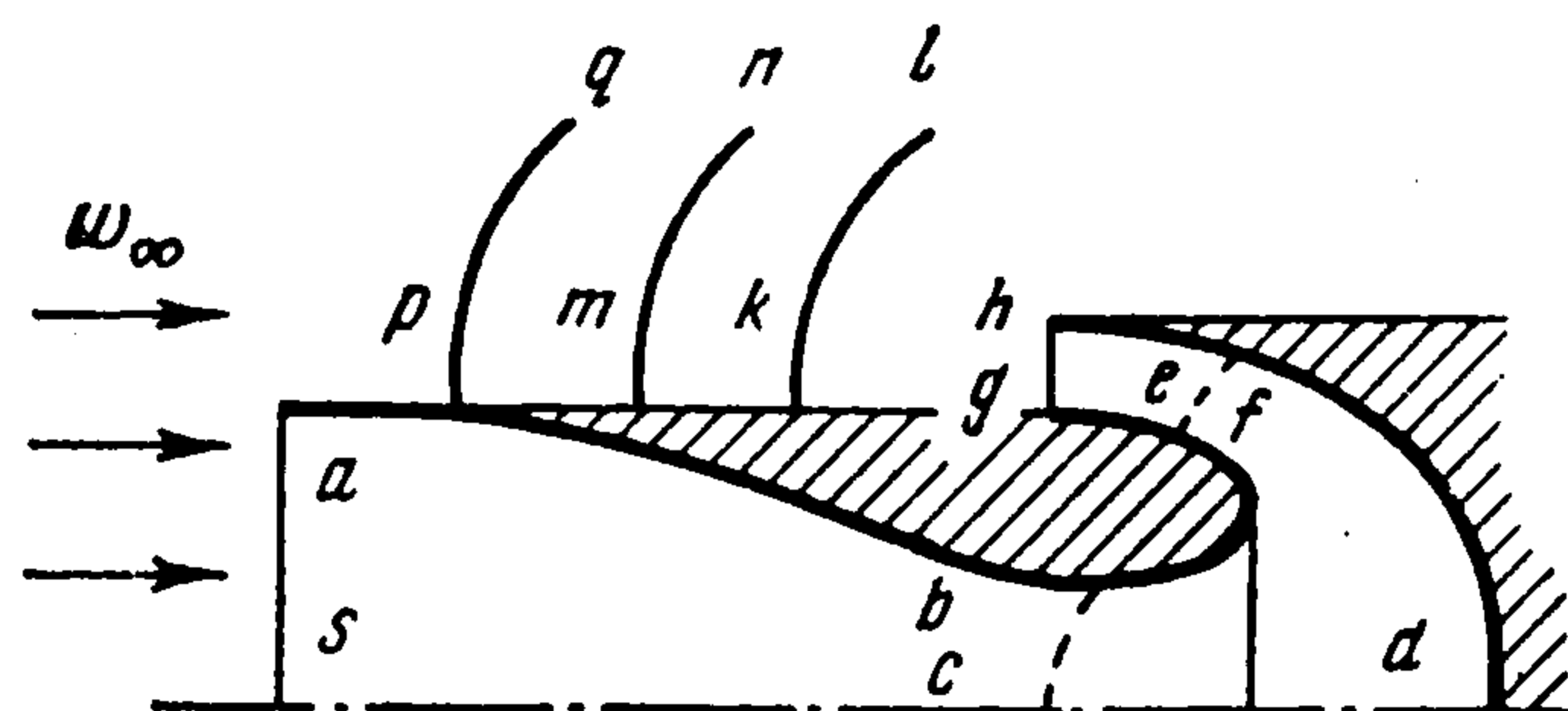


О МАКСИМАЛЬНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Ю. Д. Шмыглевский

(Москва)

Волновое сопротивление тела в стационарном сверхзвуковом потоке газа равно нулю, если это тело не вызывает появления ударных волн, а обтекание его является безотрывным. Примером служит биплан Буземана. Простое исследование, не учитывающее детальной структуры потока, позволяет найти другую, верхнюю, границу волнового сопротивления при заданных габаритах тела.



Фиг. 1

Из закона изменения количества движения вытекает зависимость между силовым воздействием газовой струи на тело и углом отклонения струи от первоначального направления. Для достижения максимального сопротивления следует найти наилучший способ поворота потока, вовлекая в него наибольшую возможную массу газа. Решение задачи может опираться на схему плоского или осесимметричного течения, изображенную на фиг. 1. Захваченный диффузором газ выбрасывается навстречу набегающему потоку. Линии kl и pq представляют ударные волны, а линия mn — разделяющую линию тока. Этот пример показывает, что искомое тело может не быть сплошным, а охватывающий его контрольный контур (например $sagh$) может пропускать газ. Ввиду сложности взаимодействия двух частей потока в области qpk целесообразно на первом этапе оставить структуру потока в стороне и получить оценку для величины волнового сопротивления.

Уравнения газовой динамики имеют вид

$$\oint_L y^v [\rho u v dx - (p + \rho u^2) dy] = 0, \quad \oint_L y^v \rho (v dx - u dy) = 0 \quad (1)$$

$$\rho = \frac{1}{\Phi W^{\kappa-1}}, \quad p = \Phi W^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad \left(\Phi = \frac{\rho^{\kappa k}}{p^k}, \quad k = \frac{1}{\kappa-1} \right)$$

$$W = \frac{\kappa+1}{2\kappa} - \frac{\kappa-1}{2\kappa} (u^2 + v^2)$$

Здесь L — граница произвольной области течения, которая может быть многосвязной; x, y — декартовы координаты; u, v — соответствующие составляющие вектора скорости, отнесенные к критической скорости a_* течения; ρ — плотность, отнесенная к плотности ρ_∞ газа в набегающем потоке; p — давление, отнесенное к $\rho_\infty a_*^2$; Φ — энтропийная функция, κ — показатель адиабаты; v равно 0 или 1 соответственно в плоском или осесимметричном случаях.

Пусть головная часть тела, поверхность которой может пропускать газ, ограничена прямоугольником $0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y$, где X, Y — заданные числа. Выберем контрольный контур следующим образом. Обозначим через sa линию Маха равномерного набегающего потока, проходящую в некоторую точку a . Если схема тела близка к изображенной на фиг. 1, то точкой a является передняя точка заостренного профиля. Из нее могут исходить присоединенные ударные волны. Если тело вызывает отошедшую ударную волну, то в качестве точки a выберем точку на пересечении ударной волны с линией тока, отделяющей массу газа, которая попадает во внутренние полости тела. Остальную часть контура, которая может пропускать газ, обозначим через ah . Контур sah замыкается осью симметрии и образующими поверхности тела.

Произведенный выбор контрольного контура позволит, в частности, выяснить роль головной ударной волны в увеличении сопротивления. Если для получения

максимальной силы на тело должен воздействовать газ, не прошедший через ударную волну, то результаты решения вариационной задачи позволят сделать дальнейшие выводы об оценке величины сопротивления.

Параметры набегающего потока отметим индексом ∞ . Уравнение линии ah запишем в виде $y = f(x)$. Тогда на основании первого уравнения из (1) равнодействующая сил давления χ в направлении оси x равна

$$\chi = \frac{(\kappa + 1) y_a^{\nu+1}}{2\kappa(\nu + 1)} (1 + w_\infty^2) + \int_{x_a}^{x_h} f^\nu [(p + \rho u^2) f' - \rho uv] dx \quad (2)$$

Здесь w_∞ — скорость набегающего потока. Для преобразований первого слагаемого правой части (2) использованы последние три уравнения из (1). Если суммарный расход газа через контур sah равен нулю, то второе уравнение из (1) дает

$$\Psi = 0 = \frac{w_\infty y_a^{\nu+1}}{\nu + 1} + \int_{x_a}^{x_h} f^\nu \rho (uf' - v) dx \quad (3)$$

Для постановки вариационной задачи об отыскании тела с максимальным сопротивлением необходимо, помимо функционала (2) и условия (3), привлечь уравнения газовой динамики, соотношения на допустимых разрывах и граничные условия задачи. Такая полная задача здесь не рассматривается.

Рассмотрим задачу, базирующуюся только на равенствах (2), (3), условиях

$$0 \leq f(x) \leq Y \quad \text{при } 0 \leq x \leq X \quad (4)$$

и очевидном условии

$$\varphi \leq \varphi_\infty \quad (5)$$

выражающем неубывание энтропии за ударной волной. Ее решение может привести к таким параметрам потока на ah , которых нельзя реализовать. Если при этом не должно быть головной ударной волны, то найденная величина χ должна рассматриваться как верхняя граница сопротивления.

Возникает следующая вариационная задача. Необходимо найти функции $f(x)$, $u(x)$, $v(x)$, $\varphi(x)$, реализующие максимум функционала (2) при условиях (3) — (5) и заданных величинах w_∞ , X , Y .

Составим функционал

$$J = \chi + \lambda \Psi$$

$$J = \frac{F}{\nu + 1} y_a^{\nu+1} + \int_{x_a}^{x_h} \Phi(f, f', w, \vartheta, \varphi) dx, \quad F = \frac{(\kappa + 1)(1 + w_\infty^2)}{2\kappa} + \lambda w_\infty$$

$$\Phi = f^\nu [(p + \rho w^2 \cos^2 \vartheta) f' - \rho w^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - \lambda \rho w (\sin \vartheta - f' \cos \vartheta)]$$

Здесь λ — постоянный множитель Лагранжа, w — модуль скорости, ϑ — угол наклона скорости к оси x .

Вначале предположим, что $\varphi = \varphi_\infty$. Вычислим первую вариацию

$$\begin{aligned} \delta J = & (F y^\nu - \Phi_{f'})_a \delta y_a - \Phi_a \delta x_a + (\Phi_{f'})_h \delta y_h + \\ & + \int_{x_a}^{x_h} \left[\left(\Phi_f - \frac{d}{dx} \Phi_{f'} \right) \delta f + \Phi_w \delta w + \Phi_\vartheta \delta \vartheta \right] dx \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь индексы f , f' , w , ϑ отмечают частные производные

$$(F y^\nu - \Phi_{f'})_a = y_a^\nu [F - (p + \rho w^2 \cos^2 \vartheta + \lambda \rho w \cos \vartheta)_{ah}]$$

$$(\Phi_{f'})_h = y_h^\nu (p + \rho w^2 \cos^2 \vartheta + \lambda \rho w \cos \vartheta)_h$$

Двойной индекс ah показывает, что величины берутся в точке a при стремлении к ней со стороны точки h .

Прочие величины, входящие в равенство (6), имеют вид

$$\Phi_f - \frac{d}{dx} \Phi_{f'} = \frac{\nu \Phi}{f} - \frac{d}{dx} [f^\nu (p + \rho w^2 \cos^2 \vartheta + \lambda \rho w \cos \vartheta)]$$

$$\Phi_w = - \frac{f^\nu \rho}{\kappa + 1 - (\kappa - 1) w^2} \{ 2w (\kappa + 1 - \kappa w^2) (\sin \vartheta - f' \cos \vartheta) \cos \vartheta +$$

$$+ [\kappa + 1 - (\kappa - 1) w^2] w f' + \lambda (\kappa + 1) (1 - w^2) (\sin \vartheta - f' \cos \vartheta) \}$$

$$\Phi_\vartheta = - f^\nu \rho [w^2 (\cos 2\vartheta + f' \sin 2\vartheta) + \lambda w (\cos \vartheta + f' \sin \vartheta)]$$

Необходимым условием максимума J является $\delta J \leq 0$ при допустимых вариациях. Из равенства (6) видно, что это условие выполняется при

$$x_a = 0, \quad y_h = Y \quad (7)$$

и при выполнении условий

$$\Phi_a \geq 0, \quad (\Phi_{f'})_h \geq 0 \quad (8)$$

$$(F y^\nu - \Phi_{f'})_a = 0 \quad (9)$$

$$\Phi_f - \frac{d}{dx} \Phi_{f'} = 0, \quad \Phi_w = 0, \quad \Phi_\vartheta = 0 \quad (0 \leq x \leq X) \quad (10)$$

Неравенства (8) обеспечивают $\delta J \leq 0$ в силу того, что допустимые вариации при выполнении равенств (7) удовлетворяют условиям $\delta x_a \geq 0$, $\delta y_h \leq 0$.

Функции $f(x)$, $w(x)$, $\vartheta(x)$ при $0 \leq x \leq X$ и величина y_a определяются из уравнений (10) и равенства (9). Величина λ определяется равенством (3). После этого условия (8) подлежат проверке.

Одно частное решение в плоском и осесимметричном случаях даст система равенств

$$(f')^{-1} = 0, \quad w = 1, \quad \vartheta = \pi$$

В этом случае газ выбрасывается со звуковой скоростью навстречу набегающему потоку. В действительности такое течение может быть реализовано при ненулевой длине тела.

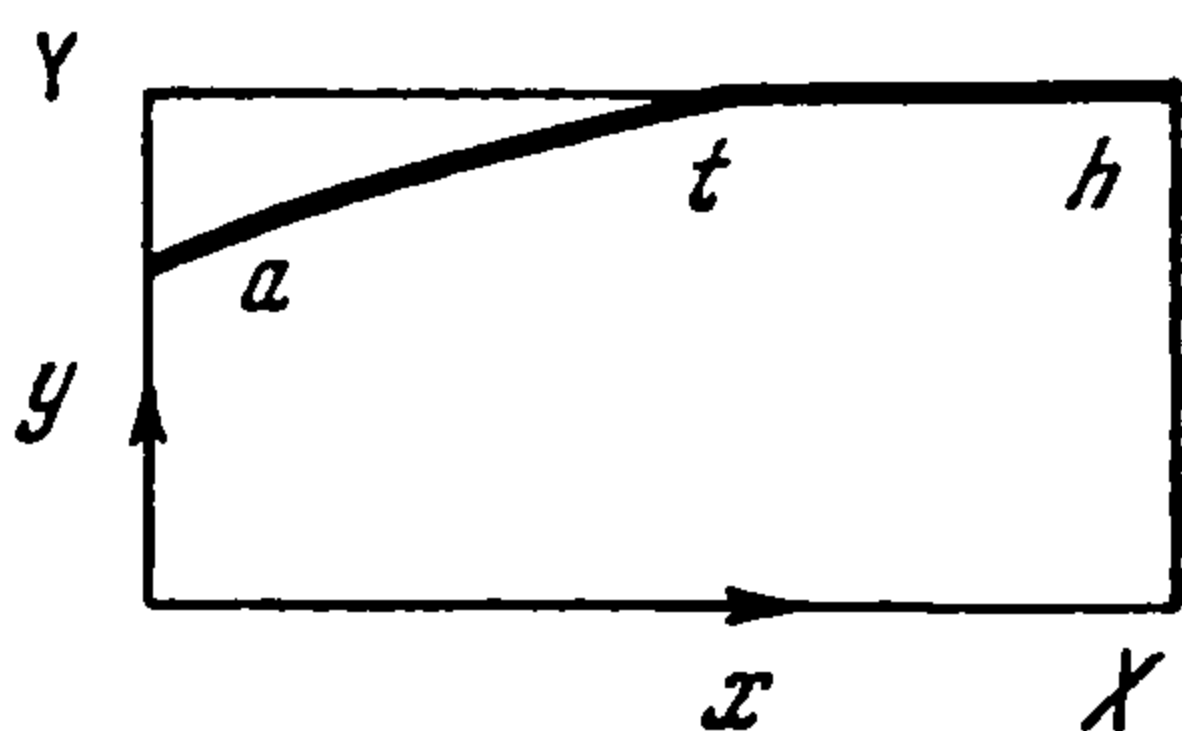
В плоском случае, $\nu = 0$, величина Φ_f равна нулю, и первое уравнение из (10) дает

$$p + \rho w^2 \cos^2 \vartheta + \lambda \rho w \cos \vartheta = \text{const}$$

Это равенство вместе с вторым и третьим уравнениями из (10) показывает, что в плоском случае величины f' , w , ϑ при $0 \leq x \leq X$ постоянны.

Еще одно частное решение в плоском случае дают равенства

$$f(x) = Y, \quad \vartheta = \arccos \left[- \left(\frac{(\kappa + 1)(w^2 - 1)}{2w^2} \right)^{1/2} \right] \quad (11)$$



Фиг. 2

Для получения необходимых величин задаются значения w и Y при условиях $1 \leq w \leq \sqrt{(\kappa + 1) / (\kappa - 1)}$, величины f и ϑ определяются из (11), величина w_∞ — из равенства (9), а $X = x_h$ вычисляется на основании равенства (3) при $y_a = Y$ и $x_a = 0$. Это решение обуславливает захват диффузором максимальной массы газа и выбрасывание его через образующую, параллельную вектору набегающего потока.

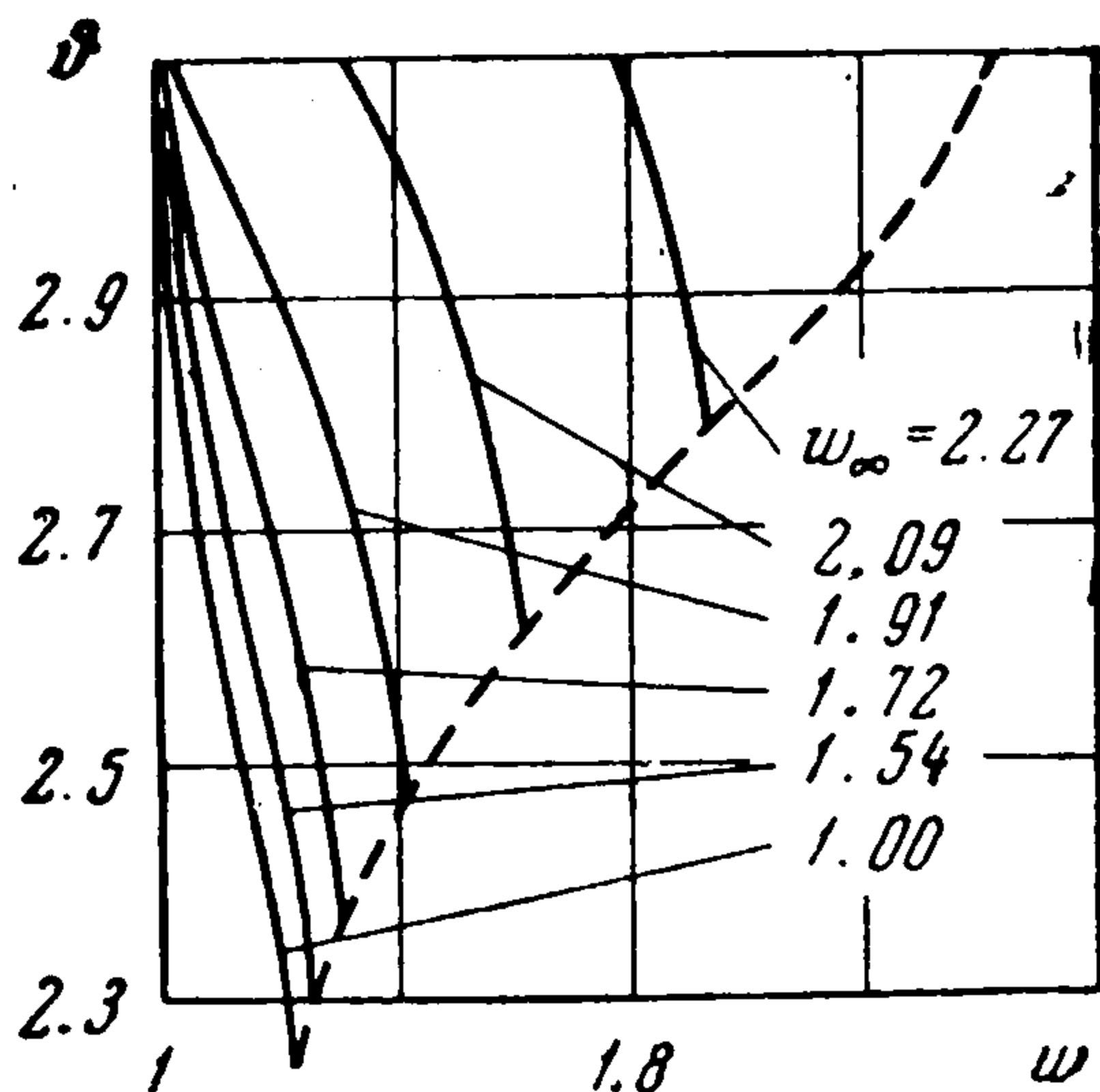
В осесимметричном случае решение, определяемое уравнениями (10), существует не при всяких величинах w_∞ , X , Y . Искомая линия ah может тогда состоять из двух участков (фиг. 2). На участке at реализуется двусторонний экстремум, а участок th определяется равенством $f(x) = Y$ при односторонней допустимой вариации $\delta f \leq 0$. В этом случае функционал J следует записать в виде

$$J = \frac{1}{2} F y_a^2 + \int_{x_a}^{x_t} \Phi dx + \int_{x_t}^{x_h} \Phi dx$$

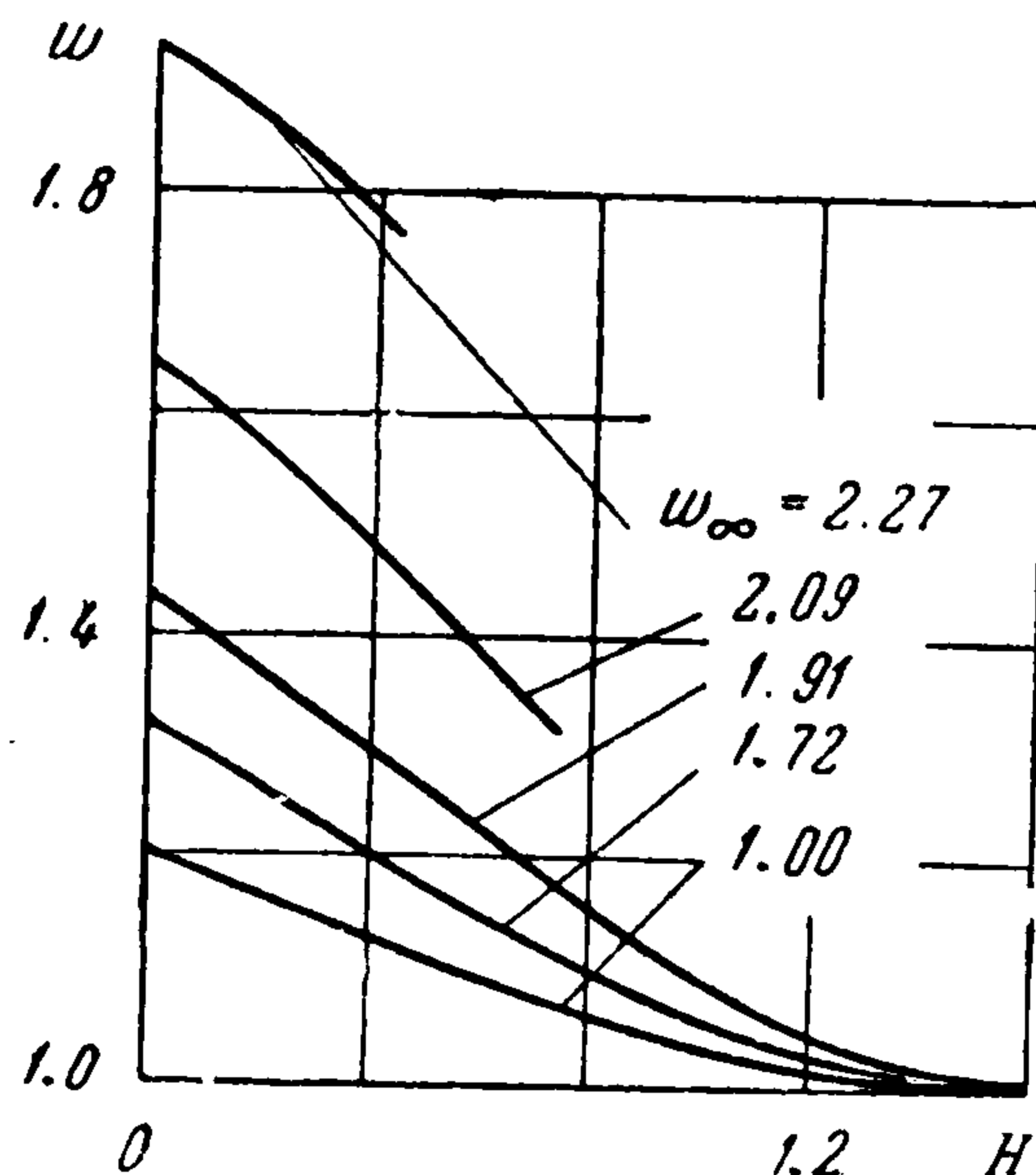
Первая вариация этого функционала равна

$$\begin{aligned} \delta J = & (Fy^2 - \Phi_{f'})_a \delta y_a - \Phi_a \delta x_a + (\Phi_{ta} - \Phi_{th}) \delta x_t + (\Phi_{f'})_h \delta y_h + \\ & + \int_{x_a}^{x_t} \left[\left(\Phi_t - \frac{d}{dx} \Phi_{f'} \right) \delta f + \Phi_w \delta w + \Phi_\vartheta \delta \vartheta \right] dx + \\ & + \int_{x_t}^{x_h} \left[\left(\Phi_f - \frac{d}{dx} \Phi_{f'} \right) \delta f + \Phi_w \delta w + \Phi_\vartheta \delta \vartheta \right] dx \end{aligned}$$

Здесь двойные индексы показывают, что величины берутся в точке t при подходе к этой точке со стороны точки, отмеченной вторым индексом. Функции $w(x)$ и $\vartheta(x)$ могут иметь разрыв в точке t .



Фиг. 3



Фиг. 4

Для обеспечения неравенства $\delta J \leq 0$ потребуем выполнения условий

$$\Phi_a \geq 0, \quad (\Phi_{f'})_h \geq 0 \quad (12)$$

$$(Fy^2 - \Phi_{f'})_a = 0 \quad (13)$$

$$\Phi_{ta} - \Phi_{th} = 0 \quad (14)$$

$$\Phi_f - \frac{d}{dx} \Phi_{f'} = 0, \quad \Phi_w = 0, \quad \Phi_\vartheta = 0 \quad (0 \leq x \leq x_t) \quad (15)$$

$$f(x) = Y, \quad \Phi_w = 0, \quad \Phi_\vartheta = 0 \quad (x_t \leq x \leq X) \quad (16)$$

$$\Phi_f - \frac{d}{dx} \Phi_{f'} \geq 0 \quad (x_t \leq x \leq X) \quad (17)$$

Второе и третье равенства из (16) помимо w и ϑ содержат только постоянные величины. Отсюда следует, что w и ϑ постоянны на участке th .

При заданных значениях w_∞ , X , Y величины λ , y_a , x_t , функции $f(x)$, $w(x)$, $\vartheta(x)$ на интервале at и величины f , w , v на th определяются уравнениями (3), (13)–(16) и граничным условием $f(x_t) = Y$. После их определения необходимо проверить выполнение условий (12) и (17). Условие (17) упрощается с учетом равенств $f(x) = Y$, $w(x) = \text{const}$, $\vartheta(x) = \text{const}$ и принимает вид

$$\rho w \sin \vartheta (w \cos \vartheta + \lambda) \leq 0 \quad (18)$$

Частное решение этого типа получается при $x_t = 0$, когда весь газ, попавший внутрь тела, выбрасывается через цилиндрическую боковую поверхность. В этом случае должны быть выполнены условия (3), (12), (13), (16), (17).

Пусть теперь допустимо возрастание энтропии, $\varphi \leq \varphi_\infty$. Введем обозначение $\varphi = \varphi_\infty \varphi_*$, где $0 < \varphi_* \leq 1$. В выражении (6) для первой вариации δJ появится дополнительное слагаемое

$$\delta J_* = \int_{x_a}^{x_h} \Phi \frac{\delta \varphi_*}{\varphi_*} dx$$

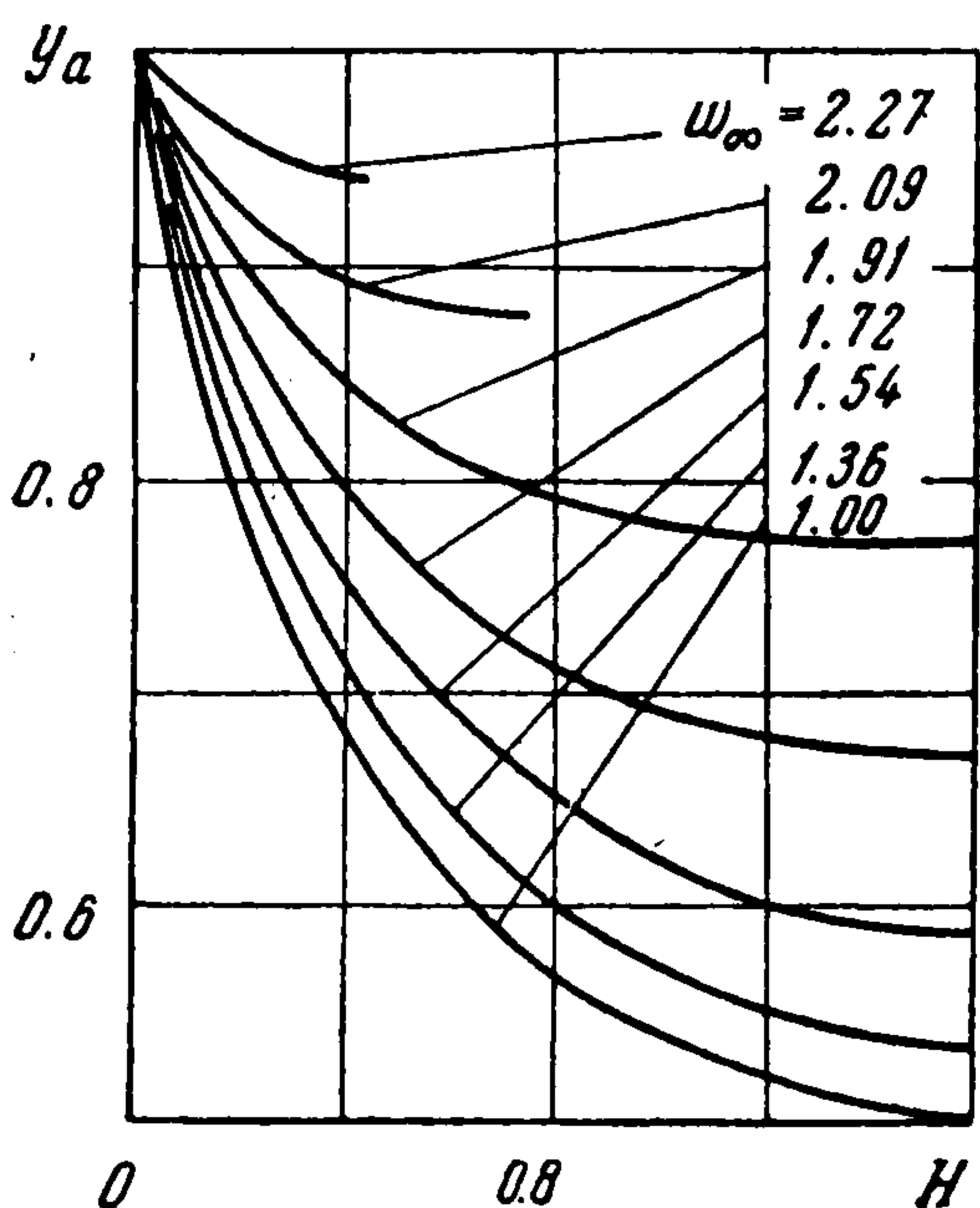
Подставим в это выражение функции, найденные из решения задачи при $\varphi = \varphi_\infty$. Допустимая вариация $\delta\varphi_*$ удовлетворяет условию $\delta\varphi_* \leq 0$. Следовательно, условие $\delta J_* \leq 0$ выполняется при

$$\Phi \geq 0 \quad (0 \leq x \leq X) \quad (19)$$

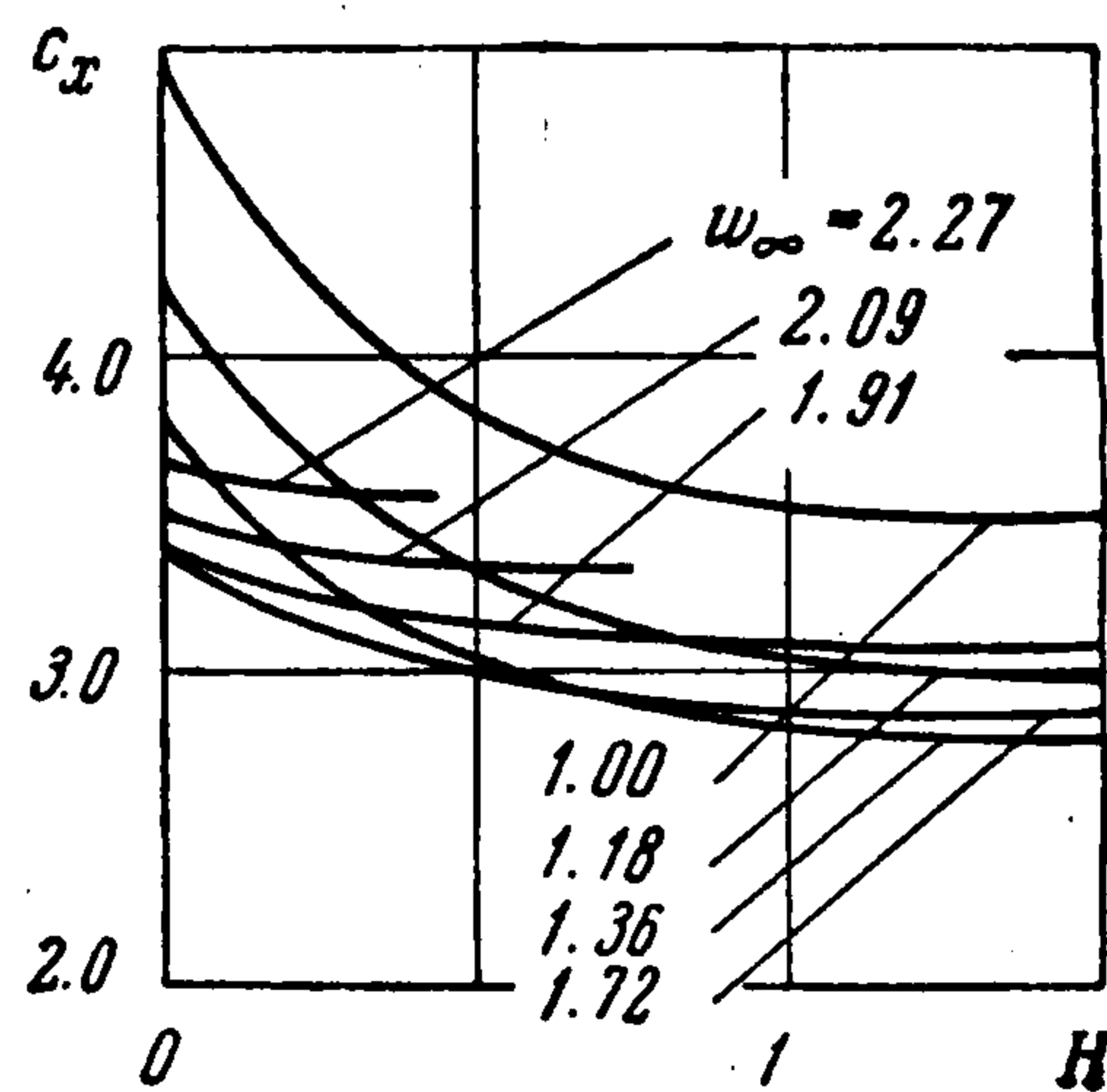
Итак, после определения решения на основании уравнений (3), (9), (10) или (3), (13)—(16) необходимо проверить выполнение условий (8), (19) или (12), (18), (19). Выполнение условия (19) обеспечивает выполнение первого условия из (8).

Примеры расчетов по уравнениям (9), (10) были проведены при $\kappa = 1.4$ в плоском и осесимметричном случаях. При всех значениях w_∞ из сверхзвукового интервала $1 \leq w_\infty \leq \sqrt{(\kappa + 1) / (\kappa - 1)}$ и при всех значениях величины $L = X / Y$ из интервала $0 \leq L < \infty$ условия (8) и (19) выполняются. Отсюда следует, что, по край-

ней мере, при $\kappa = 1.4$ наибольшее сопротивление осуществляется при воздействии на тело газа, не прошедшего через ударные волны.



Фиг. 5



Фиг. 6

Результаты расчетов плоской задачи изображены на фиг. 3—6. Во всех случаях параметром кривых является скорость набегающего потока w_∞ . На фиг. 3 сплошными линиями показана зависимость ϑ от w , а штриховая линия является геометрическим местом точек частного решения (11). На фиг. 4—6 даны зависимости величин w , Y_a и коэффициента волнового сопротивления c_x от величины H , причем

$$c_x = 2\chi / w_\infty^2 Y, \quad H = \arctg f'$$

В осесимметричном случае коэффициент c_x определяется формулой

$$c_x = 4\chi / w_\infty^2 Y^2$$

Его величина совпадает с c_x плоских течений при $H = 0$ и $H = 1/2\pi$, где

$$H = \arctg \frac{y_h - y_a}{x_h - x_a}$$

В промежуточных случаях коэффициент волнового сопротивления тел вращения при точности фиг. 6 не отличается от величины c_x для плоских течений.

Отметим, что, например, при числе Маха набегающего потока $M = 4$ максимальное сопротивление тела вращения может в два раза превышать волновое сопротивление полубесконечного цилиндра с плоским головным срезом в случае осевой симметрии. Для проведения этого сравнения был использован расчет осесимметричного течения с отошедшей ударной волной, приведенный в [1].

Поступила 5 II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский О. М. Симметричное обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком совершенного и реального газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 6.